Sobre dois problemas em espaços de Banach

Elói Medina Galego

IME-USP

No que segue, sendo K um compacto disperso e X um espaço de Banach, denotaremos por $C(K, X)$ o espaço de Banach das funções contínuas definidas em K a valores em X com a norma do supremo.

Se Γ é um conjunto qualquer e $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de espaços de Banach, $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ denotará a soma zero desses espaços com a norma do supremo. Quando $X_\gamma = \mathbb{R}$, $\forall\gamma \in \Gamma$ indicaremos esse espaço por $C_0(\Gamma)$.

Usaremos as mesmas notações de [D] e [DS] e só lembraremos que se X e Y são espaços de Banach então $X \twoheadrightarrow Y$ indicará que existe uma transformação linear contínua de X sobre Y, isto é, Y é um quociente de X e $X \hookrightarrow Y$ (respectivamente $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$) significará que Y contém um subespaço (respectivamente complementado) isomorfo a X.

<u>Problema 1.</u>

A motivação do primeiro teorema desta nota segue do seguinte: em [G] foi provado que se $C(K, X) \twoheadrightarrow H$, onde H é um espaço de Banach separável, então existe n, $1 \leq n < w$ tal que $X^n \twoheadrightarrow H$ ou $H \twoheadrightarrow c_0(\mathbb{N})$.

Na tentativa de remover a hipótese de separabilidade de H neste resultado, observemos:

1. Se $\ell_1(\mathbb{N}) \not\hookrightarrow H$, então pelo teorema 8 de [G] e pelo teorema 2.2 de [SF], segue que sob a hipótese $C(K, X) \twoheadrightarrow H$, tem-se que existe n, $1 \leq n < w$ tal que $X^n \to H$ ou $c_0(\mathbb{N}) \overset{c}{\hookrightarrow} H$ (e portanto $H \twoheadrightarrow c_0(\mathbb{N})$.

2. Se $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow H$ e ainda $\ell_1(\mathbb{N}) \overset{c}{\hookrightarrow} H$ veja por exemplo o teorema 6 de [TL], como $\ell_1(\mathbb{N}) \twoheadrightarrow c_0(\mathbb{N})$, (veja [D]), segue que $H \twoheadrightarrow c_0(\mathbb{N})$.

3. Resta-nos considerarmos o caso H não separável, $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow H$ (veja o teorema 8 de [G]), $\ell_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow H$ e $\ell_1(\mathbb{N}) \overset{c}{\not\hookrightarrow} H$; o contra-exemplo natural, seria pois tomarmos $H = \ell_\infty(\mathbb{N})$, e então provamos:

<u>Teorema 1.</u> Seja Γ um conjunto qualquer e $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de espaços de Banach. Se $(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0 \twoheadrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$, então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $X_\gamma \twoheadrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$.

<u>Demonstração.</u> Seja S_1^* a bola unitária de $(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ com a $(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ - topologia, pelo teorema 4 de [T] existe $\varphi : \beta\,\mathbb{N} \to S_1^*$ um homeomorfismo do compactificado de Stone-Cech de $\mathbb{N}$ sobre a imagem.

Mas $(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)^* = (\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma^*)_1$ e portanto $S_1^* = \{(x^*(\gamma))_\gamma \in (\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma^*)_1 : \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \|x^*(\gamma)\| \leq 1\}$.

Para cada $\gamma \in \Gamma$, seja S_γ^* a bola unitária de X_γ^* com a X_γ - topologia. Lembrando, agora, que o $\sum$ - produto $P_{\sum}\{S_\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}$ com ponto base $(w(\gamma))_\gamma$, onde $w(\gamma) = 0, \forall\ \gamma \in \Gamma$, é o subespaço do produto cartesiano $\prod_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma^*$ de todos os elementos $(y^*(\gamma))_\gamma$ tal que $\{\gamma \in \Gamma : y^*(\gamma) \neq 0\}$ é enumerável (veja [M] pag 296), a função identidade $i : S_1^* \to P_{\sum}\{S_\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}$ é contínua; de fato, se $(x_\xi^*)_\xi$ é um net em S_1^* convergindo para $x^* \in S_1^*$, na $(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ - topologia, pondo $x_\xi^* = (x_\xi^*(\gamma))_\gamma$, $\forall \xi$ e $x^* = (x^*(\gamma))_\gamma$, então fixados $\gamma_0 \in \Gamma$ e $x_{\gamma_0} \in X_{\gamma_0}$ e considerando $z = (z(\gamma))_\gamma$ em $(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ definido por $z(\gamma) = 0$ se $\gamma \neq \gamma_0$ e $z(\gamma_0) = x_{\gamma_0}$, temos que

$$x_\xi^*(z) \xrightarrow{\xi} x^*(z), \text{ isto é } x_\xi^*(\gamma_0)(x_{\gamma_0}) \xrightarrow{\xi} x^*(\gamma_0)(x_{\gamma_0}), \text{ logo}$$

$$x_\xi^*(\gamma_0) \xrightarrow{\xi} x^*(\gamma_0) \text{ na } X_{\gamma_0} \text{ - topologia e portanto } x_\xi^* \xrightarrow{\xi} x^* \text{ em } P_{\sum}\{S_\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}.$$

Consequentemente $i\varphi$ é um homeomorfismo sobre a imagem e pelo teorema 2 de [M], segue que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que S_γ^* na X_γ - topologia contém uma cópia homeomorfa de $\beta\mathbb{N}$ e novamente pelo teorema 4 de [T] concluímos que para esse $\gamma \in \Gamma$ temos $X_\gamma \twoheadrightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$.

$\square$

O teorema acima leva-nos a observar o seguinte:

Observação 1. Usando os argumentos apresentados na prova da proposição 1.b de [G] e o teorema 2.2 de [SF] pode-se provar que sendo Γ um conjunto qualquer, $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de espaços de Banach e H um espaço de Banach, se $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0 \twoheadrightarrow H$ então existem um inteiro n e $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ tal que $X_{\gamma_1} \oplus X_{\gamma_2} \oplus \cdots \oplus X_{\gamma_n} \twoheadrightarrow H$ ou $H \twoheadrightarrow c_0(\mathbb{N})$.

O teorema acima resolve o problema 2 de [G] e junto com a observação anterior ele motiva a procura da solução positiva para o seguinte problema.

Problema 1. Se $C(K,X) \twoheadrightarrow H$, então existe $n, 1 \leq n < w$ tal que $X^n \twoheadrightarrow H$ ou $H \twoheadrightarrow c_0(\mathbb{N})$?

Problema 2.

Lembremos que dado um espaço topológico S, a densidade de S, *dens* S, é o menor cardinal m para o qual existe um subconjunto de S de cardinalidade m que é denso em S; e dado um espaço de Banach X, $\dim X$, é o menor cardinal m para o qual existe um subconjunto de X de cardinalidade m que gera um subespaço denso em X.

Observação 2. Não é difícil ver que se C é um subconjunto convexo fechado do espaço de Banach X, então $dens\ C = \dim X$ e que $dens\ C = dens_w\ C$, onde $dens_w\ C$ é a densidade de C na X^* - topologia de X; veja por exemplo [GS].

O próximo problema é motivado pelos trabalhos [G], [GS] e [GA] como veremos nas observações 3 e 4 abaixo.

Problema 2. Sejam Γ um conjunto infinito, $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de espaços de Banach e H um espaço de Banach com $\dim H = card\ \Gamma$.

Se $H \hookrightarrow (\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$, então $c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} H$ ou existe $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $card\ \Gamma_1 < card\ \Gamma$ tal que $H \hookrightarrow (\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$?

Observação 3. Se $X_\gamma = \mathbb{R}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então pela demonstração da proposição 1 de [GA] ou pelo lema 6 de [GS], temos $c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} H$.

Observação 4. Se $card\ \Gamma = X_0$, então pela proposição 1 de [G], temos que $c_0(\mathbb{N}) \overset{c}{\hookrightarrow} H$ ou $H \hookrightarrow (\sum_{\gamma\in\Gamma_1} X_\gamma)_0$, onde $card\ \Gamma_1 < \chi_0$; logo basta considerarmos o caso $card\ \Gamma > \chi_1$ e neste caso, lembrando que um espaço de Banach H é $W \subset G$ se existe um subconjunto compacto de H na H^* - topologia que gera um subespaço denso em H, usando as idéias de [GS], obtemos:

Teorema 2. Sejam Γ um conjunto com $card\ \Gamma > \chi_1$, $(X_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de espaços de Banach separáveis e H um espaço de Banach $W \subset G$, com $\dim H = card\ \Gamma$.

Se $H \hookrightarrow (\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$, então $c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} H$.

Demonstração. I. Para cada subconjunto A de Γ com $card\ A < card\ \Gamma$, existe $x \in H, x \neq 0$ tal que $\forall\gamma, \gamma \in A$, têm-se $x(\gamma) = 0$.

De fato, caso contrário, existe um subconjunto A de Γ tal que a função restrição a A $r_A : (\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0 \to (\sum_{\gamma\in A} X_\gamma)_0$ é injetora.

Seja C um subconjunto convexo compacto na H^* - topologia de H de $card\ \Gamma$ que gera um subespaço denso em H, logo $r_{A|_C}$ é um homeomorfismo sobre a imagem na H^* - topologia de H e na $(\sum_{\gamma\in A} X_\gamma^*)_1$ - topologia de $(\sum_{\gamma\in A} X_\gamma)_0$.

Usando a observação 2 segue que

$$card\ \Gamma = \dim H = dens\ C = dens_w\ C = dens_w\ r_A(C) = dens\ r_A(C).$$

E como $dens\ r_A(C) \leq card\ A$ se A for infinito e $dens\ r_A(C) \leq \chi_0$ se A for finito, teríamos

$card\ \Gamma \leq card\ A$ ou $card\ \Gamma \leq \chi_0$; absurdo.

II. Lembrando que o suporte de $x \in (\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ é o conjunto $\{\gamma \in \Gamma : x(\gamma) \neq 0\}$, afirmamos que existe uma família $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de elementos de H, com $\|x_\gamma\| = 1$, $\forall\gamma \in \Gamma$ com suportes dois a dois disjuntos.

De fato, usando I, se tomarmos uma família $\{x_\gamma\}_{\gamma\in J}$ maximal de elementos de H, com suportes dois a dois disjuntos e com $\|x_\gamma\| = 1$, $\forall\gamma \in \Gamma$, segue que necessariamente $card\ J = card\ \Gamma$.

III. Para cada $\gamma \in \Gamma$, denotaremos por Γ_γ o suporte de x_γ, onde $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família obtida em II; e para cada $x \in (\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$, denotaremos por x_{Γ_γ} o elemento de $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ que é a restrição de x a Γ_γ e é nulo fora de Γ_α.

Utilizando o teorema de Hahn-Banach, existe, para cada $\gamma \in \Gamma$, φ^*_γ em $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)^*_0$ tal que $\|\varphi^*_\gamma\| = \varphi^*_\gamma(x_\gamma) = 1$ e $\varphi^*_\gamma(x) = \varphi^*_\gamma(x_{\Gamma_\gamma})$, $\forall x$ em $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$.

Afirmamos que a família $(\varphi^*_\gamma(x)x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ é somável, $\forall x$ em $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$; de fato, dado x em $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ e $\epsilon > 0$ existe um inteiro n e $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ em Γ tais que se γ verifica $\|x(\gamma)\| \geq \epsilon$, então $\gamma \in U_{i=1}^n \Gamma_{\gamma_i}$ ou $\gamma \notin U_{\gamma\in\Gamma}\Gamma_\gamma$.

Seja F um subconjunto finito de Γ tal que $F \bigcap \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\} = \emptyset$, logo

$$\|\sum_{\gamma\in F} \varphi^*_\gamma(x)x_\gamma\| = \max_{\gamma\in F} |\varphi^*_\gamma(x)| = \max_{\gamma\in F} |\varphi^*_\gamma(x_{\Gamma_\gamma})| \leq \epsilon.$$

Portanto a família $\{\varphi^*_\gamma(x)x_\gamma\}_{\gamma\in F}$ é somável e claramente $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi^*_\gamma(x)x_\gamma$ define uma projeção de $(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma)_0$ sobre $[\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ que é isométrico a $c_0(\Gamma)$. □

Bibliografia

[D] Diestel, J. Sequences and series in Banach space. Graduate Texts in Math nº 92, Spring Verlag, 1984.

[DS] Dunford, N; Schwartz, J. T. Linear Operators. New York, Interscience, I, 1957.

[G] Galego, E. M. Sobre o espaço de Banach $C(K, X)$, onde K é disperso. 41º SBA, 333-344, 1995.

[GA] Granero, A. S. On the complemented subspaces of $C_0(I)$. Departamento De Análisis Matemático, Facultad De Matemáticas, Universidad Complutense De Madrid. 1994.

[GS] Galego, E. M.; Samuel, C. Sur les sous-espaces complementes de $C_0(\Gamma)$. Faculté des Sciences et Téchinques de St. Jérome. Departement de Matématiques. Marscelle. 1989.

[M] Malyhin, V. I. β IN is Prime. Bulletin De L'Acadêmie Polonaise Des Sciences. Serie des sciences mathematiques XXVII, 3-4, 295-297, 1979.

[SF] Santiago, D.; Fernández, A. Reflexivity in Banach lattices. Arch. Math. 63, 549-552, 1994.

[T] Talagrand, M. Sur les espaces de Banach contenant $\ell^1(\tau)$. Israel Journal of Mathematics 40, 3-4, 324-330, 1981.

[TL] Tzafriri, L. Reflexivity in Banach lattices and their subspaces, J. Funct. Anal. 10, 1-18, 1972.