

RT-MAE-9305

**INTRODUÇÃO À TEORIA DA PERCOLAÇÃO**

by

**Nelson Ithiro Tanaka**

and

**Héilton Ribeiro Tavares**

**Palavras Chaves:** Percolação, Transição de fase, Teoria da  
(key words) escala, Renormalização de grupo.

**Classificação AMS:** 60K35, 82A42  
(AMS Classification)

## INTRODUÇÃO À TEORIA DA PERCOLAÇÃO

NELSON ITHIRO TANAKA<sup>1</sup> E HELITON RIBEIRO TAVARES<sup>2</sup>

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

CAIXA POSTAL 20570 - AGÊNCIA IGUAÇU

01498 - 970 - SÃO PAULO - SP - BRASIL

### RESUMO

O presente estudo consiste numa introdução à percolação. Damos uma visão ampla dos fenômenos envolvidos na percolação, porém com justificativas bem menos rigorosas que do ponto de vista matemático. Tratamos aqui de algumas medidas da estrutura do conglomerado tais como : o tamanho médio, o perímetro e o raio do conglomerado; discutimos um pouco a técnica de renormalização de grupos. Este trabalho foi baseado em Stauffer (1985).

Palavras chaves : Percolação. Transição de fase. Teoria de escala. Renormalização de grupo.

---

1 Parcialmente financiado pelo CNPq

2 Bolsa de Iniciação Científica do CNPq

## 1. INTRODUÇÃO

Na teoria da percolação existem vários tipos de redes de interesse. Começemos com um das redes mais simples : Imaginemos um grande arranjo como mostrado na figura (1.a). Fisicos a denominam de rede quadrada, enquanto matemáticos a denotam por  $Z^2$ . Em seguida uma fração destes quadrados (também chamados de sítios) serão preenchidos aleatoriamente com pontos, como na figura (1.b). Definimos agora um conglomerado como um conjunto de sítios ocupados unidos por, pelo menos, um dos lados do quadrado ocupado, como indica a figura (1.c):

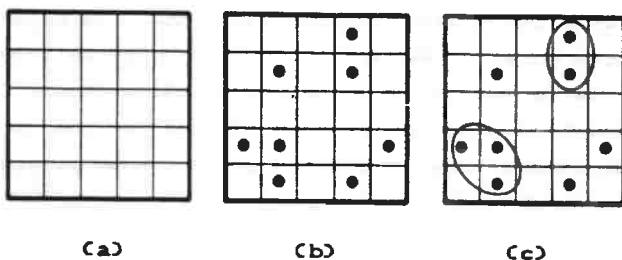


Figura 1 : Definição de percolação e conglomerados

Uma questão inicial é : como os pontos estão distribuídos entre os quadrados na figura 1 ? uma suposição simples e bem aceita é que a presença ou não de cada ponto em um sítio é independente de qualquer outro sítio estar ocupado ou não. Seja  $p$  a probabilidade de um sítio estar ocupado e  $1-p$  a de estar desocupado.

Definimos uma rede finita como um subconjunto finito de  $Z^2$ ; diremos que temos percolação se existir um conglomerado que contenha a origem e alcance a borda de qualquer rede finita. Se temos  $N$  sítios ( $N$  grande) numa rede finita, podemos esperar que  $Np$  destes sítios estejam ocupados. Para  $p$  próximo de zero haverá poucos sítios ocupados, e assim, em uma rede grande não haverá percolação. Por outro lado, para  $p$  próximo de 1 teremos um grande número de sítios ocupados indicando que teremos percolação (exceto para o caso unidimensional, correspondente a rede de Bethe com  $\alpha=1$ , que só teremos

percolação se  $p=1$ ). Prova-se (ver, por exemplo, Andjel e Galves, 1988) que existe um valor crítico  $p_c$  intermediário ( $0 < p_c < 1$ ), tal que se  $p < p_c$  não teremos percolação, e se  $p > p_c$  haverá percolação com probabilidade positiva.

Se considerarmos a rede acima ( neste caso, finita ) como uma floresta, onde as árvores são representadas pelos sítios ocupados, teremos um modelo de propagação de fogo na floresta. Este modelo pode ser simulado no computador considerando a rede finita como uma matriz  $L \times L$ . Isso nos dá  $L^2$  sítios. Iniciamos a simulação tomando cada sítio e ocupando-o com probabilidade  $p$  fixada, independente dos demais. Dessa forma esperamos  $L^2 p$  sítios ocupados (árvores). O passo seguinte será incendiar as árvores. Isso é feito incendiando-se todas as árvores na primeira linha da matriz, e a cada iteração ( tempo ) as árvores que estiverem imediatamente ao lado ou abaixo de uma árvore incendiada também serão incendiadas. O gráfico do tempo de duração do incêndio é o seguinte:

Tempo de  
Duração

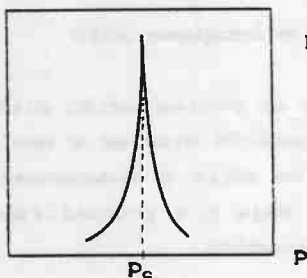


Figura 2 : Tempo de duração  
do fogo na floresta.

Notamos neste gráfico que para  $p$  próximo de zero ou de 1, a duração é pequena. Isto ocorre porque para  $p$  próximo de zero, a maioria das árvores não tem vizinhas e daí o fogo não pode prosseguir. Para  $p$  próximo de 1 a maioria das árvores tem vizinhas e assim a cada tempo uma linha da matriz é incendiada, e o tempo de duração do fogo é aproximadamente igual ao tamanho da floresta ( $L$ ). Para  $p$  ligeiramente acima de  $p_c$  aparece pela primeira vez um caminho de árvores ligando o início ao fim da floresta, e este caminho, em geral, é bem diferente de uma linha reta e assim o sistema leva um tempo muito maior que  $L$ .

para extinguir o fogo. Para  $p$  ligeiramente abaixo de  $p_c$  ainda não há um caminho ligando o início ao fim da floresta, e o sistema leva um tempo muito maior que  $L$  para perceber isso ( esgotar todos os possíveis caminhos ).

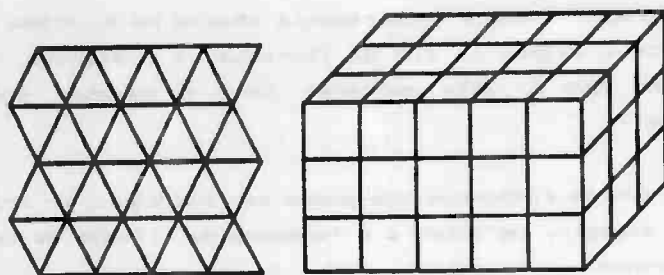
Há diversos outros fenômenos que podem ser adaptados ao modelo de percolação. Por exemplo, um deles é o fenômeno de difusão de um átomo de Hidrogénio através de um sólido, onde consideramos uma matriz  $L \times L$  como sendo o sólido e ocupamos cada elemento desta com probabilidade  $p$ , independente dos demais. Em seguida escolhemos aleatoriamente um dos sítios ocupados e nele colocamos um átomo de hidrogénio. Vamos assumir que este átomo só possa se mover para um dos sítios escolhido aleatoriamente dentre seus sítios vizinhos ocupados. Entendemos por vizinhança de um sítio aqueles sítios que tenham um lado em comum com ele.

Este modelo foi chamado de "formiga no labirinto" por Gennes (1976), e a questão é : será que a formiga consegue escapar do labirinto? Tal como no exemplo anterior ( fogo na floresta ) se  $p$  for próximo de zero a formiga não terá por onde se locomover, para  $p$  próximo de 1, ela escapará facilmente e para  $p$  ligeiramente acima de  $p_c$  ela escapará, porém com grande dificuldade, ou seja, o tempo gasto para escapar será grande.

## 2. NÚMERO DE CONGLOMERADOS

### 2.1. Definição de modelos

Há alguns materiais na natureza com a estrutura molecular exatamente igual a rede quadrada, porém há muitos outros com estrutura totalmente diferente. Surge então a necessidade de definir outros tipos de rede. Algumas dessas outras formas são : rede triangular, colméia e outras redes bi-dimensionais. Em três dimensões temos, dentre outras , a rede cúbica simples, cúbica central e a rede cúbica face-central.



(a) : Rede Triangular      (b) : Rede cúbica

**Figura 3 : Outros tipos de rede**

Na rede quadrada não faz diferença se definimos o sítio como o centro do quadrado ou como o ponto de encontro de duas linhas vertical e horizontal ( cruzamento ou nós ). Se na rede triangular definirmos o sítio como o centro do triângulo, teremos a rede colméia. Na rede cúbica simples o sítio é o nó. Na rede cúbica central, além dos nós também temos os centros dos cubos, e na rede cúbica face-central além dos nós temos os centros de cada uma das faces dos cubos.

O problema descrito anteriormente denomina-se **percolação de sítio** ( ou de ponto ). Quando consideramos que todos os sítios estão ocupados com probabilidade 1, e cada "laço" ligando dois sítios estará aberto (permitindo a comunicação entre estes sítios) com probabilidade  $p$ , e fechado com probabilidade  $1-p$  independentemente dos demais, temos um outro problema denominado **percolação de laço**. Um **conglomerado** na percolação de laço é definido como um conjunto de sítios ligados por laços abertos.

Para cada modelo citado acima existe um valor crítico  $p_c$  não trivial, ou seja,  $0 < p_c < 1$ , tal que se  $p < p_c$  a probabilidade do conglomerado associado a origem ser infinito é zero, e para  $p > p_c$  esta probabilidade é positiva. Deste modo está havendo uma mudança no comportamento do sistema, ou seja, uma **transição de fase**.

A tabela a seguir apresenta resultados obtidos através de simulação para os parâmetros críticos dos modelos apresentados anteriormente:

**Tabela 1. Parâmetros Críticos em duas e três dimensões**

Rede	Dimensão	Sítio	Laço
Quadrada	2	0.59275	0.50000
Triangular	2	0.50000	0.34729
Colmeia	2	0.6962	0.65271
Cúbica Simples	3	0.3117	0.2492
Cúbica Central	3	0.245	0.1785
Cúbica Face-Central	3	0.198	0.119

## 2.2. Solução exata em dimensão 1

O interesse do caso uni-dimensional da percolação é que, além dele ter solução exata, ele traz algumas dicas para modelos com dimensões maiores. Um conglomerado no caso uni-dimensional é caracterizado por um conjunto de sítios ocupados com os vizinhos dos extremos desse conjunto estando vazios, como mostra a Figura 4.



**Figura 4 : Exemplo de conglomerado em  $d=1$ . No centro temos um conglomerado de tamanho 5.**

Consideremos inicialmente uma rede finita de tamanho  $L$  ( $L$  grande). A probabilidade de que haja um conglomerado de tamanho  $s$  é  $p^s(1-p)^2$ , onde  $p$  é a probabilidade de um sítio qualquer estar ocupado. O número esperado de conglomerados de tamanho  $s$  é  $Lp^s(1-p)^2$ . Vamos definir o número esperado de conglomerados por sítio,  $n_s$ . Teremos então :

$$n_s = p^s(1-p)^2. \quad (1)$$

Para  $p < 1$ , o número de conglomerados vai a zero quando  $s \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{p \rightarrow 0} n_s = \lim_{p \rightarrow 0} p^s (1-p)^{2s} = (1-p)^2 \lim_{p \rightarrow 0} p^s = 0$$

E também o número esperado de sítios vazios vai a infinito quando

$$L \rightarrow \infty : \lim_{L \rightarrow \infty} (1-p)L = (1-p) \lim_{L \rightarrow \infty} L = +\infty$$

Assim, não teremos um conglomerado de tamanho infinito, ou seja, não haverá percolação se  $p < 1$ . Com isso concluímos que

$$p_c = 1 \quad (2)$$

Um outro aspecto de interesse é quanto ao tamanho médio do conglomerado. Para isso, lembremos que  $n_s$  é a probabilidade de um sítio arbitrário pertencer a um conglomerado de tamanho  $s$ , daí a probabilidade de que um sítio arbitrário pertença a qualquer conglomerado é  $p$ , pois

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} n_s s &= \sum_{s=1}^{\infty} p^s (1-p)^{2s} s = (1-p)^2 p \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d(p^s)}{dp} \stackrel{*}{=} (1-p)^2 p \frac{d}{dp} \left( \sum_{s=1}^{\infty} p^s \right) = \\ &= (1-p)^2 p \frac{d}{dp} \left( \frac{p}{1-p} \right) = p \end{aligned} \quad (3)$$

onde a igualdade  $*$  vale devido ao teorema da convergência dominada (ver, por exemplo, James(1981)).

Seja  $w_s$  a probabilidade de que um conglomerado contendo um sítio ocupado arbitrário contenha exatamente  $s$  sítios. Temos então :

$$w_s = \frac{n_s s}{\sum_{t=1}^{\infty} n_t t}$$

Seja ainda  $S$  o tamanho médio do conglomerado, ou seja :

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} w_s s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{n_s s^2}{\sum_{t=1}^{\infty} n_t t} = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} n_s s^2 \quad (4)$$

Explicitamente, teremos :



$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} n_s s^2 = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{\infty} p^s (1-p)^{2s} s^2 = \frac{(1-p)^2}{p} \sum_{s=1}^{\infty} p^s s(s-1+1) = \\
&= (1-p)^2 p \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d^2}{dp^2} (p^s) + (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (p^s) \\
&= (1-p)^2 p \frac{d^2}{dp^2} \left( \sum_{s=1}^{\infty} p^s \right) + (1-p)^2 \frac{d}{dp} \left( \sum_{s=1}^{\infty} p^s \right) \\
&= (1-p)^2 p \frac{2}{(1-p)^3} + (1-p)^2 \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1+p}{1-p} \quad , \quad (p < p_c) \quad (6)
\end{aligned}$$

Assim o tamanho médio do conglomerado diverge quando nos aproximamos de  $p_c$ . Resultados análogos a este podem ser obtidos para dimensões maiores que 1. Para o modelo de percolação esta divergência é bem plausível, pois se há um conglomerado infinito presente acima de  $p_c$ , então, ligeiramente abaixo de  $p_c$  já temos um conglomerado muito grande, porém finito.

Vamos definir a função de correlação  $g(r)$  como a probabilidade de que um sítio à distância  $r$  de um outro sítio ocupado (origem) esteja no mesmo conglomerado. Note que o sistema é homogêneo (o mesmo  $p$  para todo sítio) e portanto invariante por translação. É fácil notar que  $g(0)=1$  e  $g(1)=p$ . Para um sítio à distância  $r$ , devemos ter esse sítio ocupado e os  $r-1$  entre este e a origem também devem estar ocupados. Temos portanto

$$g(r) = p^r \quad (6)$$

para todo  $p$  e  $r$ . Para  $p < 1$  esta função de correlação, ou função de conectividade, vai a zero exponencialmente quando  $r$  vai a infinito:

$$g(r) = p^r = \exp(\ln(p^r)) = \exp(r \cdot \ln p) = \exp\left[\frac{-r}{-1/\ln(p)}\right] = \exp\left(\frac{-r}{\xi}\right)$$

com  $\xi = -\frac{1}{\ln(p)}$ . Usando que  $\ln(1-x) \approx -x$  se  $x \rightarrow 0$ , temos

$$\xi = -\frac{1}{\ln(1-(p_c-p))} \approx -\frac{1}{-(p_c-p)}$$

$$\xi = \frac{1}{p_c - p} \quad \text{para } p \approx p_c = 1. \quad (7)$$

Podemos notar que esta outra característica  $\xi$ , denominada comprimento de correlação, diverge em  $p_c$ . Em dimensões maiores temos que o comprimento de correlação é proporcional ao diâmetro de um conglomerado típico. Para o caso unidimensional esta relação é óbvia. O comprimento de um conglomerado com  $s$  sítios é  $s-1$ , não tão diferente de  $s$  se  $s$  é grande. Assim, o comprimento de correlação  $\xi$  varia com o tamanho médio do conglomerado :

$$S \propto \xi \quad (p \rightarrow p_c) \quad (8)$$

Infelizmente esta relação torna-se complicada em dimensões maiores. Uma relação mais geral é a seguinte :

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} g(r) = S \quad (9)$$

onde  $r > 0$  e  $r < 0$  significa que estamos tomando, respectivamente, vizinhos da direita e da esquerda. De fato

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} g(r) = 2 \sum_{r=0}^{\infty} g(r) - g(0) = 2 \sum_{r=0}^{\infty} p^r - 1 = 2 \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{1+p}{1-p} = S$$

O caso unidimensional pode ser resolvido exatamente, enquanto para  $d=2$  apenas os conglomerados pequenos podem ser tratados exatamente. É este o conteúdo da seção seguinte.

### 2.3. Conglomerados pequenos em $d$ dimensões

Se a solução da Equação (1) no caso unidimensional é simples, surge a seguinte pergunta : será possível aplicar o mesmo princípio para dimensões mais altas? Para responder essa pergunta, vamos olhar para a rede quadrada da figura 1. Nesta rede, para que um sítio ocupado arbitrário seja um conglomerado de tamanho  $s=1$ , devemos ter

seus quatro vizinhos vazios, independentemente, assim esta probabilidade é  $n_4 = p(1-p)^4$ . O número de pares por sítio é  $n_2 = 2p^2(1-p)^6$ , pois devem haver dois sítios ocupados e seus 6 vizinhos vazios, podendo estar na vertical ou na horizontal. Geralmente o número de conglomerados de tamanho  $s$  por sítio formando uma linha reta é  $n_s = 2p^s(1-p)^{2s+2}$  em uma rede quadrada. Em  $d=3$ , na rede cúbica simples, temos um número médio de conglomerados de tamanho  $s$  por sítio formando uma linha reta igual a  $3p^s(1-p)^{4s+2}$ . Infelizmente o conglomerado não precisa formar necessariamente uma linha reta. Na rede quadrada, por exemplo, podemos ter um conglomerado formando um triângulo ( $s=3$ ), e neste caso teremos 7 vizinhos vazios e 4 orientações possíveis, com probabilidade  $4p^3(1-p)^7$ . Combinando com o resultado anterior, teremos  $n_3 = 2p^3(1-p)^8 + 4p^3(1-p)^7$  num total de  $6(=2+4)$  configurações possíveis.

O número de vizinhos é denominado "perímetro" ( $t$ ) de um conglomerado (este perímetro não pode ser comparado com a superfície do conglomerado porque inclui buracos internos). Assim, na rede quadrada com  $s=3$  temos  $t=7$  e  $t=8$ . Se o número de configurações de um conglomerado de tamanho  $s$  e perímetro  $t$  é denotado por  $g_{st}$ , então

$$n_s = \sum_t g_{st} p^s (1-p)^t \quad (10)$$

é o número médio de conglomerados de tamanho  $s$  por sítio. A dificuldade desta equação é que envolve a soma sobre todos os possíveis perímetros  $t$  e assim cada possível configuração deve ser encontrada e cuidadosamente analisada para determinar  $g_{st}$ , o que nem sempre é possível, ou fácil.

Uma relação para o número total de configurações (veja Stauffer, 1979 e Essam, 1980)  $g_s = \sum_t g_{st}$  é

$$g_s = s^{-\theta} (\text{const})^s \quad (11)$$

Para  $d=2$  temos  $\theta=1$ , enquanto para  $d=3$  temos  $\theta=3/2$  e para  $d>8$ ,  $\theta=5/2$  como na rede de Bethe.

## 2.4. Alguns aspectos da rede de Bethe

Tal como o caso unidimensional, a rede de Bethe pode ser resolvida exactamente (ver, por exemplo, Andjel & Galves (1988)) e corresponde à dimensionalidade infinita. Porque? Façamos uma analogia: Para  $d=2$  a circunferência de um círculo de raio  $r$  é  $2\pi r$  e sua área é  $\pi r^2$ . Para  $d=3$  a superfície de uma esfera de raio  $r$  é  $4\pi r^2$ , enquanto seu volume é  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . A partir daí podemos notar que em  $d$  dimensões a superfície de uma esfera é proporcional a  $r^{d-1}$  enquanto seu volume é proporcional a  $r^d$ . Assim

$$(\text{superfície}) \propto (\text{volume})^{1-1/d} \quad (12)$$

e no limite  $d \rightarrow \infty$  a superfície é proporcional ao volume. Veremos a seguir que a rede de Bethe possui esta característica.

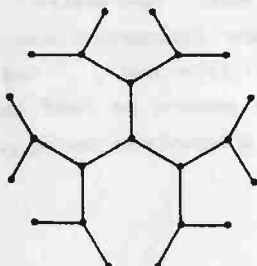


Figura 5 : Rede de Bethe com  $z=3$   
(cada sítio tem 3 vizinhos)

Na rede de Bethe há  $z$  sítios conectados à origem (1ª geração),  $z(z-1)$  sítios na 2ª geração,  $z(z-1)^2$  na 3ª geração e assim por diante. Considerando o volume da esfera de  $r$  gerações como o número de sítios até a  $(r-1)$ -ésima geração e a superfície como o número de sítios na  $r$ -ésima geração, o volume será igual a

$$\begin{aligned} & 1 + z + z(z-1) + z(z-1)^2 + z(z-1)^3 + \dots + z(z-1)^{r-2} \\ &= 1 + z(1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots + (z-1)^{r-2}) = \frac{z(z-1)^{r-1} - 2}{z-2} \\ &\approx \frac{z(z-1)^{r-1}}{z-2} \end{aligned}$$

e a superfície será  $z(z-1)^{r-1}$ . Assim a relação entre a superfície e o volume dessa esfera é  $(z-2)$ . Para  $z=3$  podemos notar que metade dos

sítios está na superfície e a outra metade está no interior da esfera.

Podemos notar que a relação  $t/s$  (onde  $s$  representa o volume do conglomerado) pode ser escrita como :

$$\frac{t}{s} \approx z-2 = z-1-1 = (z-1) \left[ 1 - \frac{1}{z-1} \right] = \frac{1-p_c}{p_c}$$

Esta relação é válida para todas as redes, não somente a rede de Bethe.

Mesmo para  $p > p_c$  podemos ter a origem, ou qualquer outro ponto fixado, não conectado ao infinito. Vamos definir portanto  $\theta(p)$ , a probabilidade de percolação como sendo a probabilidade da origem, ou qualquer outro ponto fixado, pertencer ao conglomerado infinito. Claramente esta probabilidade é zero se  $p < p_c$  e queremos calculá-la apenas para  $p > p_c$ .

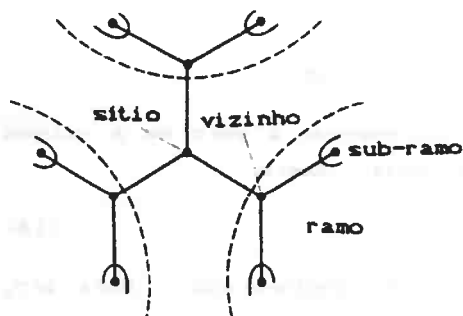


Figura 6: Esta figura mostra o que chamamos de sítio, vizinho ramo e sub-ramo

Para o cálculo de  $\theta(p)$  vamos definir  $Q$  como a probabilidade de que um sítio qualquer não esteja conectado ao infinito através de um fixado ramo originado deste sítio. Para simplificar, tomamos  $z=3$  como mostrado na figura acima. A probabilidade que dois sub-ramos que comecem num vizinho fixado ocupado não estejam conectados ao infinito é  $pQ^2$ . Este vizinho estará vazio com probabilidade  $1-p$ . Deste modo  $Q = 1-p + pQ^2$  é a probabilidade de que um fixado ramo não leve ao infinito (ou porque a conexão já é quebrada no 1º vizinho ou por um de seus sub-ramos).

Esta equação quadrática tem duas soluções :  $Q=1$  e  $Q=(1-p)/p$ . A probabilidade  $p-\theta(p)$  de que a origem esteja ocupada mas não conectda

ao infinito através de um de seus 3 ramos é  $pQ^2$ . Assim temos :

$$p - \theta(p) = pQ^2, \text{ ou seja, } \theta(p) = p(1-Q^2)$$

que dá zero para a solução  $Q=1$  e

$$\theta(p) = p(1 - ((1-p)/p)^2) \quad (13)$$

para a outra solução, que corresponde a  $p > p_c = 1/2$ .

Tal como no caso unidimensional, poderemos calcular o tamanho médio do conglomerado  $S$  para a rede de Bethe. Novamente, tomamos  $z=3$  por simplicidade. Seja  $T$  o tamanho médio de um dos ramos. Novamente, sub-ramos têm o mesmo tamanho médio dos ramos ( $T$ ). Se o vizinho está vazio o tamanho médio do ramo é zero. Se o vizinho está ocupado, ele contribui com sua própria massa (uma unidade) para o conglomerado e adiciona a massa de cada um de seus sub-ramos. Assim

$$T = (1-p)0 + p(1+2T), \text{ ou seja } T = p/(1-2p)$$

para  $p < p_c = 1/2$ . O tamanho médio do conglomerado é zero se a origem está vazia e  $(1+3T)$  se a origem está ocupada. Assim

$$S = p(1+3T) = p(1+p)/(1-2p) \quad (14)$$

é a forma exata para o tamanho médio do conglomerado. Para  $p < p_c$  podemos notar que

$$S = \frac{p(1+p)}{1-2p} = \frac{\frac{1}{2} p(1+p)}{\frac{1}{2} - p} \propto \frac{1}{\frac{1}{2} - p} = \frac{1}{p_c - p}, \text{ resultando que}$$

$$S \propto \frac{1}{p_c - p} \quad (p < p_c) \quad (15)$$

A Equação (13) nos diz que  $\theta(p)=0$  para  $p=p_c$ , e para  $p > p_c$  podemos expandir  $\theta(p)$  em série de Taylor. Teremos :

$$\theta(p) = (p - \frac{1}{2}) \left( 6 - 24(p - \frac{1}{2}) + 80(p - \frac{1}{2})^2 + \dots \right). \text{ Ou seja,}$$

$$\propto (p - \frac{1}{2}) = (p - p_c) \quad (16)$$

Quanto ao número médio de conglomerados de tamanho  $s$  por sítio, podemos notar que um conglomerado de tamanho  $s=1$  deve ter  $z$  vizinhos desocupados (perímetro), um conglomerado de tamanho  $s=2$  deve ter perímetro  $t=2(z-1)=2(z-2)+2$ . Cada sítio que acrescentamos ao conglomerado contribui com  $z-2$  outros sítios vizinhos vazios. Temos portanto para um conglomerado de tamanho  $s$ ,  $t=s(z-2)+2$ . Aplicando este resultado na Equação (10), resulta

$$n_s(p) = g_s p^s (1-p)^{s(z-2)+2}$$

Vamos fazer novamente  $z=3$  (lembramos que  $p_c=1/2$ ), e para evitar o cálculo de  $g_s$  podemos olhar para

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} = \frac{p_c^s (1-p_c)^{s(z-2)+2}}{p^s (1-p)^{s(z-2)+2}} = \left[ \frac{1-p}{1-p_c} \right]^2 \left[ \left[ \frac{p}{p_c} \right] \frac{1-p}{1-p_c} \right]^3$$

onde  $\frac{p}{p_c} \frac{1-p}{1-p_c} = 4p(1-p) = 1 - 4p(1-p) - 1 = 1 - 4(p - \frac{1}{2}) = 1 - 4(p-p_c)^2$ , daí

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \propto [1 - 4(p-p_c)^2]^s = \exp [s \ln(1 - 4(p-p_c)^2)] =$$

$$\propto \exp(-cs)$$

(17)

com  $c = -\ln(1 - 4(p-p_c)^2)$ . Usando que  $\ln(1-x) \approx -x$  se  $x \rightarrow 0$

$$c \propto -(-4(p-p_c)^2) \propto (p-p_c)^2$$

Podemos notar um decaimento exponencial para a razão do número de conglomerado (Equação(17)). Infelizmente esse decaimento é uma peculiaridade da rede de Bethe. Em  $d=2$  ou  $d=3$  esse decaimento só é válido para grandes conglomerados e  $p < p_c$ .

Para determinar o comportamento assintótico do número de conglomerado em  $p=p_c$ , lembremos que

$$S = \frac{1}{p} \sum_s s^2 n_s \propto \sum_s s^2 n_s$$

Para  $p=p_c$  esta soma é infinita, enquanto para  $p < p_c$  ela permanece finita (Equação (15)). Se  $n_s(p_c)$  decai exponencialmente com  $s$ , então  $S$  permanece finito em  $p=p_c$ . Assim, um decaimento em lei de potência

para  $n_s(p_c)$  é mais plausível :

$$n_s(p_c) \propto s^{-\tau} , s \text{ grande} \quad (18)$$

onde  $\tau$  é denominado "expoente de Fisher", e a validade desta lei é geral, não ficando restrita somente à rede de Bethe.

Vamos agora estimar  $S$  e calcular  $\tau$  por comparação do resultado com a Equação (15). Vamos assumir  $p$  ligeiramente menor que  $p_c$ .

$$S \propto \sum s^2 n_s(p)$$

$$\text{mas } n_s(p) \propto n_s(p_c) \exp(-cs) \propto s^{-\tau} \exp(-cs)$$

$$S \propto \sum s^{2-\tau} \exp(-cs)$$

aproximando por uma integral, temos

$$S \propto \int s^{2-\tau} \exp(-cs) ds$$

fazendo  $z=cs$

$$S \propto c^{\tau-3} \int z^{2-\tau} \exp(-z) dz$$

mas a integral é uma constante, daí

$$S \propto c^{\tau-3}$$

onde  $c \propto (p-p_c)^2$ . Segue que

$$S \propto (p-p_c)^{2(\tau-3)} \quad (19)$$

Da Equação (15) temos que  $S \propto (p-p_c)^{-1}$ . Igualando os expoentes :

$$2(\tau-3) = -1. \text{ Com isso, para a rede de Bethe, temos}$$

$$\tau = 5/2 \quad (20)$$

Podemos então reescrever a Equação (17) para  $s$  grande como :

$$n_s(p) = s^{-5/2} \exp(-cs), \forall p ; c \propto (p-p_c)^2, p > p_c \quad (21)$$

Em resumo, a solução da rede de Bethe, Equações (15), (16) e (21), bem como a solução unidimensional, Equação (1), mostram que o número



de conglomerado segue uma lei bem simples, e o decaimento exponencial é comum entre estes casos. Tentaremos utilizar estes resultados na seção seguinte para tornar plausível a lei de escala para o número de conglomerado em geral, não apenas para  $d=1$  ou  $d=\infty$ .

## 2.5. Rumo à solução de escala para $n_s$

Nesta seção iremos tentar encontrar uma fórmula que contenha as soluções do caso unidimensional e da rede de Bethe como casos especiais.

Tanto a Equação (1) para o caso unidimensional como a Equação (21) para dimensionalidade infinita são dominados, para  $s$  grande, por uma lei de decaimento exponencial,  $\log n_s \propto -s$ . Podemos então propor :

$$n_s \propto \exp(-cs)$$

onde o fator de proporcionalidade e o parâmetro  $c$  dependem de  $p$ . Os resultados obtidos através de simulação indicam que este decaimento exponencial não é consistente com a Equação (21), caso em que foi encontrado um fator  $s^{-\tau}$ , que é multiplicado pela exponencial. Postulamos então :

$$n_s \propto s^{-\tau} \exp(-cs) \quad (22)$$

onde  $\tau$  é uma constante não necessariamente igual a  $5/2$ . Propomos então para  $p$  próximo de  $p_c$  :

$$c \propto |p-p_c|^{1/\sigma} \quad (p > p_c) \quad (23)$$

com  $\sigma$  não necessariamente igual a  $1/2$  como na rede de Bethe.

Essa construção foi feita de modo a ser uma generalização da rede de Bethe, surge então uma pergunta : esta generalização inclui o caso unidimensional ? usando  $p_c=1$  e  $p=\exp(\ln p)=\exp(p-1)=\exp(p-p_c)$  para  $p > p_c$ . Reescrevendo a Equação (1), teremos

$$n_s(p) = (1-p)^2 p^s = (p-p_c)^2 \exp(-(p-p_c)s)$$

que não é um caso especial de (20), uma vez que temos uma potência de

$(p-p_c)$  e não de  $z$  em frente da exponencial. Temos então que escolher entre a generalização do caso unidimensional e a generalização da rede de Bethe. Optamos pela rede de Bethe por considerá-la mais realística, caso em que temos uma transição de fase ( $p_c < 1$ ).

Vamos começar por generalizar  $\theta(p)$ . Para isto vamos usar a expressão geral, válida para toda rede :

$$\theta(p) + \sum n_s(p)z = p \quad (24)$$

(esta equação simplesmente declara que um sítio ocupado, probabilidade  $p$ , ou pertence ao conglomerado infinito, probabilidade  $\theta(p)$ , ou a um conglomerado finito, probabilidade  $\sum n_s(p)z$  )

Exatamente em  $p=p_c$  nos temos que  $\theta(p)=0$  e daí  $\sum n_s(p)z = p$  ( esta soma é convergente se  $\tau > 2$ , pois  $\sum n_s(p_c) \propto \sum z^{s-\tau-1}$ , que diverge se  $(\tau-1) \leq 1$ , i.e.,  $\tau \leq 2$  ). Podemos então reescrever a Equação (24) como :

$$\theta(p) = p - \sum n_s(p)z = \sum n_s(p_c)z - \sum n_s(p)z = \sum (n_s(p_c) - n_s(p))z$$

$$\theta(p) = \sum n_s(p_c) \left[ 1 - \frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \right] z \propto \sum z^{s-\tau} [ 1 - \exp(-cs) ] \quad (25)$$

por causa de (17) e (18). Substituindo o somatório pela integral, temos

$$\theta(p) \propto \int z^{s-\tau} [ 1 - \exp(-cs) ] ds$$

usando integral por partes :

$$\int f'g \, ds = fg - \int fg' \, ds, \text{ com } f(s) = z^{s-\tau} \text{ e } g(s) = 1 - \exp(-cs) \text{ , temos}$$

$$\theta(p) \propto z^{s-\tau} [ 1 - \exp(-cs) ] + c \int z^{s-\tau} \exp(-cs) ds$$

Para  $p$  muito próximo de  $p_c$ , o fator  $c$  na exponencial será próximo de zero e assim o primeiro termo da soma também será muito pequeno, teremos portanto

$$\theta(p) \propto \int z^{s-\tau} \exp(-cs) ds$$

fazendo  $z=cs$ , obtemos :

$$\theta(p) \propto c^{\tau-2} \int z^{\tau-2} \exp(-z) dz$$

mas a integral é apenas uma constante, daí

$$\theta(p) \propto c^{\tau-2} \propto (p-p_c)^{(\tau-2)/\sigma}$$

Como na teoria dos fenômenos críticos supomos que

$$\theta(p) \propto (p-p_c)^\beta$$

o último resultado vai nos dar uma das relações conhecidas como relações de escala :

$$\beta = (\tau - 2) / \sigma \quad (26)$$

Vamos agora estudar como  $S$ , o tamanho médio do conglomerado, diverge em  $p_c$ . Da Equação (10) temos que

$$S = \frac{1}{p_c} \sum s^2 n_s(p) \propto \sum s^2 n_s(p) \propto \sum s^{\tau-2} \exp(-cs) \propto \int s^{\tau-2} \exp(-cs)$$

$$\propto c^{\tau-3} \propto |p-p_c|^{-(3-\tau)/\sigma} = |p-p_c|^{-\gamma}$$

com expoente crítico

$$\gamma = (3 - \tau) / \sigma \quad (27)$$

Pela nossa própria construção devemos ter  $\beta$  e  $\gamma$  positivos, e isso ocorre se  $2 < \tau < 3$ , com  $\sigma > 0$ .

É importante ressaltar que dos 4 expoentes críticos  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  apenas 2 destes são necessários e os outros dois podem ser derivados destes dois. Estes expoentes necessários são chamados de *parâmetros livres* e podem ser tanto  $\tau$  e  $\sigma$  como  $\beta$  e  $\gamma$ , pois temos

$$\sigma = 1/(\beta + \gamma) \quad \bullet \quad \tau = 2 + \beta/(\beta + \gamma)$$

De modo geral, podemos definir  $M_k$  o  $k$ -ésimo momento da distribuição do tamanho do conglomerado, onde  $k$  é um inteiro,

$$M_k = \sum s^k n_s \quad (28.a)$$

Para  $k=1$ , temos a probabilidade de percolação  $\theta(p)$ , e para  $k=2$  temos o tamanho médio do conglomerado  $S$ .

Vamos assumir que  $k > (\tau-1)$  para garantir a convergência da soma, e de forma análoga ao que foi feito para  $S$ , teremos

$$M_k \propto \sum s^{k-\tau} \exp(-cs) \propto \int s^{k-\tau} \exp(-cs) ds \propto c^{\tau-1-k}$$

$$\propto |p-p_c|^{(\tau-1-k)/\sigma} \quad (28.b)$$

Assim o expoente  $(\tau-1-k)/\sigma$  é novamente expresso em termos de  $\tau$  e  $\sigma$ , como também poderia ser em termos de  $\beta$  e  $\gamma$ , pois

$$(\tau-1-k)/\sigma = \beta - (\beta+\gamma)(k-1). \quad (28.c)$$

As relações (26), (27) e (28.c) são três das possíveis relações de escala.

## 2.6. Suposições de escala para o número de conglomerados

Podemos generalizar a Equação (17) :  $v_s(p) = n_s(p)/n_s(p_c) = \exp(-\text{const}(p-p_c)s^\sigma)$  e a (22) :  $v_s = \exp(-\text{const}|p-p_c|^{1/\sigma}s)$  reescrevendo como

$$v_s(p) = f(z) \quad ; \quad z = (p-p_c)s^\sigma$$

Lembrando que  $n_s(p_c) \propto s^{-\tau}$ , temos

$$n_s(p) = s^{-\tau} f((p-p_c)s^\sigma) \quad (p > p_c, s \rightarrow \infty) \quad (29)$$

onde  $f=f(z)$  é denominada função de escala.

Note que no caso uni-dimensional, como  $p_c=1$ , temos

$$n_s(p) = (1-p)^2 p^2 = (p_c-p)^2 \exp(s \log p) \approx (p_c-p)^2 \exp(-(p_c-p)s)$$

que não seria contemplado pela Equação (17) ou (22). Com a generalização podemos englobar este caso, pois se fizermos  $\tau=2$  e  $\sigma=1$ , e usando  $z=(p-p_c)s$ , ou seja,  $p-p_c=z/s$ . Temos que

$$n_s(p) = s^{-2} z^2 \exp(z) = s^{-2} f(z) \quad ; \quad \text{com } f(z) = z^2 \exp(z)$$

Temos que lembrar que a função  $f$  deve evitar o surgimento de um conglomerado infinito abaixo de  $p_c$ . Será isto possível? Vamos partir da Equação (24) lembrando que  $n_s(p_c) = p$  se  $p < p_c$ :

$$\theta(p) = \sum_s (n_s(p_c) - n_s(p)) = \sum_s (s^{-\tau} f(0) - s^{-\tau} f(z)) = \sum_s s^{1-\tau} (f(0) - f(z)) =$$

aproximando por uma integral e fazendo  $z = (p - p_c) s^\sigma$ , teremos

$$\begin{aligned} \theta(p) &= \int \left[ \frac{z}{p - p_c} \right]^{(1-\tau)/\sigma} [f(0) - f(z)] \frac{z^{1/\sigma-1}}{\sigma (p - p_c)^{1/\sigma}} dz \\ &= \frac{1}{\sigma} (p - p_c)^{(\tau-2)/\sigma} \int |z|^{-1-(\tau-2)/\sigma} (f(0) - f(z)) dz \end{aligned}$$

usando (26) e (27) temos que  $\beta + \gamma = 1/\sigma$ , daí

$$\theta(p) = (\beta + \gamma) (p - p_c)^\beta \int |z|^{-1-\beta} (f(0) - f(z)) dz$$

onde a integral sobre  $z = (p - p_c) s^\sigma$  varia de  $-\infty$  a 0 para  $p < p_c$  e de 0 a  $+\infty$  para  $p > p_c$ . Como sabemos que  $\theta(p) = 0$  se  $p < p_c$ , a condição para isso é

$$-\int |z|^{-\beta} \left[ \frac{df}{dz} \right] dz = 0 \quad (30)$$

Para  $p > p_c$  esta integral não pode dar zero. Para que ela seja zero (necessário se  $p < p_c$ ), a função  $f(z)$  deve alternar de sinal. A natureza tornou a  $f(z)$  simples de tal forma que ela só tenha um máximo em um valor  $z_{\max}$ , e o valor da  $f$  neste máximo será chamado de  $f_{\max}$ . Assim

$$f(z_{\max}) = f_{\max} \quad \text{e} \quad f(z) < f_{\max} \quad \forall z \neq z_{\max} \quad (31)$$

Para um conglomerado de tamanho fixado  $s$ , o número  $n_s$  tem um máximo em  $p_{\max}$  abaixo de  $p_c$ , com  $z_{\max} = (p_{\max} - p_c) s^\sigma$ , ou seja

$$p_{\max} = p_c + z_{\max} s^{-\sigma}$$

Estamos assumindo aqui que a  $f$  é uma função analítica, que significa grosseiramente que todas as derivadas de  $f$  são finitas para todo  $z$ , em particular para  $z=0$  (i.e.  $p=p_c$ ).

## 2.7. Número de conglomerados para $p$ longe de $p_c$

Também há interesse em determinar o número de conglomerados para  $p$  longe de  $p_c$ . É possível que alguns de seus aspectos sejam aproximados razoavelmente pela solução da rede de Bethe. Infelizmente essa aproximação nem sempre é satisfatória.

Inicialmente vamos argumentar porque para  $p < p_c$  o número de conglomerados decai exponencialmente com  $s$ , isto é.

$$\log (n_s) \propto -s \quad (32)$$

Foi visto na Equação (11) que o número  $g_s$  de configurações varia exponencialmente com  $s$ , isto é

$$\log (g_s) \propto +s \quad (s \rightarrow \infty)$$

a menos de um fator de menor importância  $s^{-\epsilon}$ . Das equações (10) e (11) podemos notar que se  $p$  for muito pequeno, teremos  $n_s(p \rightarrow 0) \propto s^{-\epsilon} p^{\epsilon} \text{const}^{\epsilon}$ . Todavia há uma crença geral apoiada por renormalização de grupo ( a ser discutida mais adiante ) que a Equação (32) é válida para todo  $p < p_c$ , e não apenas para  $p$  próximo de zero. Dessa forma, postulamos

$$n_s(p < p_c) \propto s^{-\epsilon} (p \text{const})^{\epsilon} \quad (s \rightarrow \infty) \quad (33)$$

Contudo, deve ser lembrado que esta extensão das equações (32) e (33) para todo  $p < p_c$  não é rigorosamente provada. Sabemos apenas que vale para  $p < p' < p_c$  (veja Kunz and Souillard, 1978). Para percolação de ponto ou de laço em 2 ou 3 dimensões não há indicações contra a Equação (33) até o momento.

Voltemos agora para o caso super crítico. Pode ser provado (veja Kunz and Souillard, 1978) que o comportamento de  $n_s(p)$  para  $p > p' > p_c$  (com  $s$  grande) inclui a dimensão  $d$  na lei de decaimento exponencial.

$$\log n_s(p > p_c) \propto -s^{1-1/d} \quad (34.a)$$

ou

$$n_s(p > p_c) \propto s^{-\epsilon'} \exp(-Cs^{1-1/d}) \quad (34.b)$$

Através de simulações podemos ver que a Equação (34.a) já é uma

boa aproximação para  $s$  próximo de 10. O expoente  $\theta'$  na Equação (34.b) é  $5/4$  em duas e  $-1/3$  em três dimensões, de acordo com Lubensky e McKane (1981). Na rede de Bethe não há diferenças entre as Equações (32) e (34), pois como ela corresponde a dimensionalidade infinita, os expoentes 1 e  $1-1/d$  são iguais.

Não há contradições entre as fórmulas (32) e (34), presumivelmente válidas longe de  $p_c$ , e a suposição de escala (29), presumivelmente válida perto de  $p_c$ . Para  $p$  próximo de  $p_c$  e  $s$  grande de tal forma que  $|z|=|p-p_c|s^\sigma$  seja muito maior que 1, as Equações (32) a (34) e (29) são esperadas serem válidas. Contudo a função de escala  $f(z)$  na Equação (29) deve comportar-se, para  $|z|$  grande, de tal forma que a Equação (33) seja obedecida abaixo de  $p_c$ , e a Equação (34.b) seja obedecida acima de  $p_c$ . Para  $p > p_c$ , por exemplo, nos precisamos

$$f(z) \propto z^{(\tau-\sigma)/\sigma} \exp(-\text{const}' z^{(1-1/d)/\sigma})$$

para alcançar nosso objetivo, com uma lei simples abaixo de  $p_c$ . Através de simulação podemos notar uma boa concordância dessa função.

Nos podemos sumarizar estes resultados com ajuda de um expoente  $\zeta$  definido como

$$\log n_s \propto -s^\zeta \quad (s \rightarrow \infty, p \text{ fixado}) \quad (35.a)$$

onde

$$\zeta(p < p_c) = 1 \quad \bullet \quad \zeta(p > p_c) = 1 - 1/d \quad (35.b)$$

No capítulo seguinte tentaremos investigar se também há essa diferença entre o comportamento abaixo e acima de  $p_c$  na estrutura do conglomerado.

### 3. A ESTRUTURA DO CONGLOMERADO

Na Seção 2.3 nos introduzimos o "perímetro"  $t$  de um conglomerado, que é o número de sítios vazios em torno do conglomerado. Nos podemos chamar o tamanho  $s$  de um conglomerado de massa desse conglomerado;

então  $t$  é uma das quantidades que definem a estrutura dessa massa. A palavra perímetro sugere que esta medida seja uma espécie de superfície, similar ao perímetro de um círculo de raio  $r$ , que é  $2\pi r$ , e assim é proporcional à raiz quadrada da massa (área)  $\pi r^2$  do círculo. Assim nos podemos esperar que  $t$  seja proporcional a  $s^{1/2}$  em  $d$  dimensões, análogo a Equação (12). O objetivo da seção seguinte é mostrar que isto não é verdade.

### 3.1. O perímetro do conglomerado é um perímetro real ?

Da forma como o perímetro foi definido, estamos considerando apenas o perímetro externo, mas o conglomerado pode ter buracos e cada um destes buracos também tem um perímetro interno. Se tivermos um buraco a cada, digamos, trinta sítios, teremos um perímetro proporcional ao número de sítios na rede infinita. Para um conglomerado muito grande, porém finito, nos podemos esperar o mesmo comportamento de uma rede infinita e assim também um perímetro proporcional ao número de conglomerados. Assim

$$t \propto s \quad (s \rightarrow \infty)$$

parece plausível, de acordo com o argumento acima. Se isto for verdade a quantidade  $t$  não pode ser identificada como a superfície do conglomerado. Vejamos porque. Primeiro vamos definir  $t_s$  o perímetro médio de um conglomerado de tamanho  $s$  :

$$t_s = \sum_l t \frac{n_{sl}}{n_s} \quad \text{onde } n_{sl} = g_{sl} p^s (1-p)^l$$

Desta forma temos que  $n_s = \sum_l n_{sl}$ . Derivando  $n_s$  com relação a  $p$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d(n_s)}{dp} &= \frac{d}{dp} \left( \sum_l g_{sl} p^s (1-p)^l \right) = \sum_l g_{sl} (s p^{s-1} (1-p)^l - p^s (1-p)^{l-1}) \\ &= \frac{s}{p} \sum_l g_{sl} p^s (1-p)^l - \frac{1}{1-p} \sum_l g_{sl} p^s (1-p)^l t \\ &= \frac{s}{p} n_s - \sum_l n_{sl} t \end{aligned}$$



dividindo ambos os lados por  $n_s$  :

$$\frac{d}{dp}(\ln(n_s)) = \frac{1}{p} = -\frac{1}{1-p} t_s$$

daí temos que

$$t_s = \frac{1-p}{p} = - (1-p) \frac{d}{dp} (\ln(n_s)) \quad (36.a)$$

Como vimos na seção anterior,  $\ln(n_s) = ks^c$  com  $k$  dependendo de  $p$ . Assim

$$t_s = \frac{1-p}{p} = - (const) s^c \quad (s \rightarrow \infty) \quad (36.b)$$

Podemos notar agora que o perímetro não é uma superfície no sentido usual, ou seja, para  $p < p_c$  (caso em que  $\zeta=1$ ) o perímetro é proporcional à massa  $s$ , enquanto para  $p > p_c$  (caso em que  $\zeta=1-1/d$ ) apenas o segundo termo de  $t_s$  varia com  $s^{1-1/d}$ , e assim apenas esse termo dá a contribuição proporcional à superfície usual.

Mesmo que o perímetro seja restrito apenas ao perímetro externo, em algumas redes, como na rede cúbica simples, o perímetro varia com o volume  $s$  e não com uma superfície  $\propto s^{2/3}$ .

Em resumo, nem o perímetro e nem o perímetro externo medem bem a superfície de um conglomerado em  $d$  dimensões, como a palavra 'perímetro' sugere; deste modo, outras definições são necessárias para estudar a superfície de um conglomerado no sentido usual. Surge então a necessidade de estudar outras medidas da estrutura do conglomerado, como por exemplo o raio do conglomerado. É isso que veremos a seguir.

### 3.2. Raio do conglomerado e dimensão fractal

Enquanto a superfície do conglomerado é uma medida difícil de ser definida, o 'raio' de um conglomerado já parece bem mais fácil. Seja então

$$R_s^2 = \sum_{i=1}^s \frac{|r_i - r_0|^2}{s} \quad (37)$$

onde

$$r_0 = \sum_{i=1}^s \frac{r_i}{s} \quad (38)$$

é a posição do centro de massa do conglomerado e  $r_i$  é a posição do  $i$ -ésimo sítio.

Usando essa definição podemos calcular a distância média entre dois conglomerados de massa  $s$ ; que é definida como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{|r_i - r_j|^2}{s^2} &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{|(r_i - r_0) - (r_j - r_0)|^2}{s^2} = \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{[(r_i - r_0)^2 + (r_j - r_0)^2 - 2(r_i - r_0)(r_j - r_0)]}{s^2} = \\ &= \sum_{i=1}^s \frac{|r_i - r_0|^2}{s} + \sum_{j=1}^s \frac{|r_j - r_0|^2}{s} = \\ &= 2R_s^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Como já vimos na Seção 2.2, a função de correlação  $g(r)$  é a probabilidade que um sítio à distância  $r$  de um sítio ocupado (origem) em um conglomerado finito também esteja ocupado e pertença ao mesmo conglomerado. O número médio de sítios conectados à origem é  $S = \sum_r g(r)$  (onde esta soma envolve todos os sítios da rede). Por outro lado, este número é igual a  $\sum_r s^2 n_s / p$ , uma vez que  $n_s s / p$  é a probabilidade que um sítio pertença a um conglomerado de tamanho  $s$ . Assim

$$pS = \sum_r s^2 n_s = p \sum_r g(r) \quad (p < p_c) \quad (40)$$

Vamos redefinir agora o comprimento de correlação  $\xi$  (ou comprimento de conectividade) como uma distância média de dois sítios pertencentes ao mesmo conglomerado:

$$\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 g(r)}{\sum_r g(r)} \quad (41.a)$$

Porém,  $2R_g^2$  é a distância média ao quadrado entre dois sítios no mesmo conglomerado de tamanho  $s$ , logo  $s 2R_g^2$  é a distância média ao quadrado dos sítios num conglomerado de tamanho  $s$ , e  $\sum s 2R_g^2 s n_s = 2 \sum R_g^2 s^2 n_s$  é a distância média ao quadrado de dois sítios pertencentes ao mesmo conglomerado, que é igual a  $\sum r^2 g(r)$ , logo

$$\xi^2 = \frac{2 \sum R_g^2 s^2 n_s}{\sum s^2 n_s} \quad (41.b)$$

( a menos de um fator numérico  $p$  ).

O comprimento de correlação é o raio do conglomerado típico, ou seja, é o raio daquele conglomerado que dá a maior contribuição para o segundo momento da distribuição do tamanho do conglomerado perto do ponto crítico  $p_c$ .

Este comprimento de correlação diverge no ponto crítico com um expoente  $\nu$ . Definimos então  $\nu$  através de

$$\xi \propto |p-p_c|^{-\nu} \quad (41.c)$$

Para percolação em  $d=2$ , argumentos plausíveis ( porém não rigorosos ) dão  $\nu=4/3$ , em excelente concordância com resultados de simulação. Em  $d=3$ ,  $\nu$  é próximo de 0.9 e na rede de Bethe temos  $\nu=1/2$ .

Agora vamos tentar estudar como o raio  $R_g$  varia com  $s$  no ponto critico. Esta questão leva a um conceito usado de **dimensão fractal**. Consideremos o exemplo a seguir: podemos notar que a massa de uma barra de ferro depende apenas de seu comprimento; se em vez da barra tivermos uma chapa, essa massa dependerá do comprimento e da largura da chapa, ao passo que se tivermos um sólido, a massa dependerá também da altura. Assim, para um material em  $d$  dimensões, a massa dependerá de  $d$  medidas. Deste modo, temos que para percolação, a massa está relacionada com  $R_g$  por  $s \propto R_g^d$ . Mais geralmente, Mandelbrot (1984) define o expoente de dimensão fractal  $D$  através de

$$(massa) \propto (comprimento)^D \quad (42)$$

e denota objetos como **fractais** se eles obedecem a Equação (42) com  $D$  diferente da sua dimensão Euclidiana  $d$ . Em percolação usamos  $\rho=1/D$ .

Usualmente estamos interessados no comportamento assintótico para grandes comprimentos, e a Equação (42) pode não ser válida para pequenos conglomerados. Então estes objetos são fractais apenas assintoticamente. Um objeto infinito como um conglomerado que percola é chamado um fractal se subsecções grandes, porém finitas, forem fractais no sentido da Equação (42). Para nosos propósitos é mais prático pensar em fractais como conjuntos de objetos de diferentes tamanhos que obedecem (42) pelo menos assintoticamente, e não apenas restringir a fractal propriamente apenas um objeto infinitamente grande.

Surge agora uma pergunta: Um conglomerado finito é um fractal no sentido da Equação (42)? Como vimos nesta equação, a massa  $s$  é proporcional ao raio  $R_s^D$ , temos então

$$R_s \propto s^p \quad (p=p_c, s \rightarrow \infty) \quad (43)$$

Pela Equação (41.b) podemos notar que seu denominador é o segundo momento do conglomerado ( $M_2$ ) e portanto diverge com expoente  $\gamma=(3-\tau)/\sigma$ . Se  $p$  é próximo de  $p_c$  então  $R_s$  varia com  $s^p$  e o numerador da Equação (41.b) é um momento com  $k=2+2p$  (pois  $2 \sum R_s^2 s^2 n_s \propto \sum s^{2+2p} n_s$ ) e assim diverge com expoente  $(3-\tau+2p)/\sigma$ , de acordo com a Equação (28). Portanto, a razão  $\xi^2$  diverge com expoente  $2p/\sigma$  (pois  $\xi^2 \propto (3-\tau+2p)/\sigma / s^{(3-\tau)/\sigma} = s^{2p/\sigma}$ ). Este expoente, segundo a Equação (41.c) deve ser igual a  $2\nu$  (pois  $\xi^2 \propto |p-p_c|^{-2\nu}$ ). Assim  $2p/\sigma = 2\nu$ , ou seja

$$p=\sigma\nu \quad (44)$$

Esta dimensão fractal  $1/p$  é 1.896 para  $d=2$ ; cerca de 2.5 para  $d=3$  e 4 para  $d=\infty$  (rede de Bethe). Assim um conglomerado finito em  $p_c$  é um fractal, pois sua dimensão fractal é menor que a dimensão  $d$ .

Para rede de Bethe é provado que  $p=1/4$  é o mesmo para todo  $p$  e não apenas para  $p=p_c$ . Surge então uma pergunta: podemos esperar também para o caso tridimensional que  $p$  seja o mesmo abaixo e acima de  $p_c$ ? Não podemos. O argumento é o seguinte: imagine que  $p$  é próximo de 1. A Equação (10) nos diz que apenas aqueles conglomerados com o perímetro bem pequeno são importantes. O menor perímetro para um conglomerado de  $s=L^3$  sítios em uma rede cúbica simples é obtida da configuração não tendo buracos no seu interior; seu perímetro é  $6L^2$  e seu raio médio é da ordem de  $L$ , ou seja

$$s=L^3 ; \quad t=6L^2 ; \quad R_g \propto L$$

Assim  $R_g$  é proporcional a  $s^{1/3}$  para  $p$  próximo de 1, e não a  $s^{0.4}$  como para  $p=p_c$ . Como foi visto na Seção 2.7, podemos esperar o mesmo comportamento assintótico para  $p$  abaixo de  $p_c$  (Equação (35.b)); assim esperamos que essa lei de  $s$  também seja válida para  $R_g$  quando  $p$  é maior que  $p_c$ , ou seja,  $\rho=1/3$ . Em  $d$  dimensões nos teremos então

$$\rho = \frac{1}{d} \quad (p > p_c) \quad (45)$$

que mostra que  $\rho$  não é o mesmo que em  $p_c$ , pois  $1/\rho$  é igual a 2.5 para  $p=p_c$  e 3 para  $p>p_c$ . É importante enfatizar que conglomerados abaixo de  $p_c$  também são fractais e conglomerados acima de  $p_c$  não são fractais, mas objetos 'normais' com  $\rho=1/d$ .

A Tabela 2 sumariza os resultados exatos e obtidos via simulação para os parâmetros de percolação considerando  $d=2, d=3$  e  $d=\infty$ .

Analogamente à Equação (33) para o número de conglomerados, também é esperado para o raio do conglomerado que haja uma função de escala de tal maneira que ela leve a dimensões fractais diferentes abaixo e acima de  $p_c$ . Vamos propor

$$R_g = s^{\rho} h((p-p_c)s^{\rho}) \quad (46)$$

As Equações (29) e (46) são apenas dois exemplos para o comportamento geral do sistema quando  $p$  está próximo de  $p_c$ .

**Tabela 2 : Expoentes de percolação para a rede bi-dimensional, tri-dimensional e rede de Bethe**

Expoente	d=2	d=3	d=∞
$\beta$	5/36	0.4	1
$\gamma$	43/18	1.8	1
$\nu$	4/3	0.9	1/2
$\sigma$	36/91	0.45	1/2
$\tau$	187/91	2.2	5/2
$D(p < p_c)$	1.56	2	4
$D(p = p_c)$	81/48	2.5	4
$D(p > p_c)$	2	3	4
$\zeta(p < p_c)$	1/2	2/3	1
$\zeta(p = p_c)$	1	1	1
$\zeta(p > p_c)$	1	3/2	5/2
$\theta(p < p_c)$	5/4	-1/9	5/2

### 3.3. O conglomerado infinito em $p_c$

Uma das questões mais interessantes na percolação é se há ou não um conglomerado infinito em  $p=p_c$ . Nos sabemos que há para  $p>p_c$  e não há para  $p<p_c$ , mas para  $p=p_c$  a melhor resposta até agora é : talvez. Em simulações feitas com redes grandes, consideramos que há um conglomerado infinito quando ele consegue conectar a linha do topo (ou plano do topo) à linha da base ( ou plano da base ), e nestas simulações uma fração finita de todas as redes tinham um conglomerado infinito nesse sentido.

Vamos olhar para uma rede grande, porém finita (como sempre ocorre em computadores ). Mesmo para  $p<p_c$  o sistema tem um maior conglomerado, mas apenas para  $p>p_c$  o tamanho desse maior conglomerado é da ordem do tamanho do sistema; para  $p<p_c$  o tamanho  $s$  do maior conglomerado aumenta muito fracamente ( logaritmicamente ) com o tamanho do sistema  $L$  (  $s \propto \log L$  ). Aparece agora uma questão : como aumenta o tamanho  $s$  do maior conglomerado com  $L$  em um sistema com  $L^d$  sítios ? Abaixo de  $p_c$  temos que ele aumenta com  $\log(L)$ , acima de  $p_c$  com  $L^d$ ; o que esperar em  $p=p_c$ ?

Parece razoável que o maior conglomerado tenha o raio da ordem do tamanho do sistema:  $R_g \propto L$ . Como em  $p_c$  nos temos  $R_g \propto s^\rho$ , deveremos ter então  $L \propto s^\rho$  (pois  $L \propto R_{g, \text{max}}$ ), muito similar às Equações (42) e (43). Assim o conglomerado infinito em  $p_c$  ( que às vezes é chamado de conglomerado infinito incipiente ) também é um fractal no nosso sentido, e tem a mesma dimensão fractal  $1/\rho$  que um grande conglomerado finito em  $p_c$ . Acima de  $p_c$  a massa  $s$  do conglomerado infinito aumenta com  $L^{1/4}$  significa que ele não é um fractal, pois  $\rho=1/d$ , tal como para o conglomerado finito. Abaixo de  $p_c$  a dimensão fractal é zero (correspondendo a um muito fraco incremento com  $L$  ), em contraste com a dimensão fractal de conglomerados finitos que é  $\rho=1/2$  em três dimensões.

A Figura 7 mostra resultados em duas dimensões para redes contendo acima de  $10^{10}$  sítios

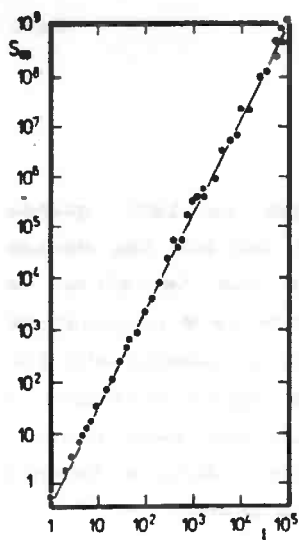


Figura 7 : Resultados de simulação para o tamanho do maior conglomerado em  $p_c=1/2$  da rede triangular

Desconsiderando algumas flutuações, podemos notar uma simples linha reta neste gráfico do  $\log(s)$  contra  $\log(L)$ . A inclinação desta linha está próxima do valor  $1/\rho=91/48$ . Assim temos agora uma resposta mais quantitativa de quanto é grande o conglomerado infinito incipiente.

Nesta figura tomamos  $p_c=1/2$  como é conhecido para rede triangular. Mas mesmo que  $p_c$  não seja conhecido exatamente e se tomamos um  $p'_c$  ligeiramente maior que o verdadeiro, ainda observamos para o maior conglomerado a massa  $s$  sendo proporcional a  $L^{1/\rho}$ , tão grande quanto  $L$  é menor que o comprimento de correlação  $\xi$ . (Em  $p_c$ ,  $\xi$  é infinito, e esta condição é sempre satisfeita). Se  $L$  é muito maior que  $\xi$ , a massa do maior conglomerado será  $\theta(p)L^d$ , proporcional a  $(p-p_c)^\beta$ . Se  $L$  é da ordem de  $\xi$  estas duas expressões  $\theta(p)L^d$  e  $L^{1/\rho}$  devem ser da mesma ordem :

$$\theta(p)L^d = \text{const} L^{1/\rho} \quad \text{se} \quad L = \xi \alpha (p-p_c)^{-\nu}$$

assim

$$(p-p_c)^\beta (p-p_c)^{-\nu d} \propto (p-p_c)^{-\nu/\rho}$$

e daí

$$\beta - d\nu = -\nu/\rho$$

juntando com as outras leis de escala, obtemos

$$dv = \gamma + 2\beta = (\tau - 1)/\sigma$$

(47)

#### 4. RENORMALIZAÇÃO DE GRUPO

A renormalização de grupo teve sua origem em 1971 quando K.G. Wilson trabalhou com fenômeno crítico e foi honrado uma década depois com o prêmio Nobel para física. Ela é uma tentativa de justificar as suposições de escala feitas anteriormente e calcular os expoentes críticos através dessas suposições. Historicamente ela foi aplicada em transição de fase na termodinâmica e depois estendida à percolação. Como estaremos trabalhando sempre com uma rede finita, faremos uma introdução à lei de escala para rede finita e somente depois entraremos propriamente em renormalização de grupo.

##### 4.1. Lei de escala para rede finita

A pergunta inicial aqui é : como as várias quantidades de interesse se comportam próximo de  $p_c$  em uma rede grande, porém finita? Vamos tomar como exemplo o tamanho renormalizado do maior conglomerado, que é a probabilidade  $\theta(p)$  de que um sítio arbitrário pertença ao maior conglomerado do sistema.

Para uma rede finita, tendendo a infinito, este maior conglomerado é também muito grande se  $p > p_c$ . Se este tamanho é dividido pelo tamanho do sistema, a razão  $\theta(p)$  é finita e maior que zero. Para  $p < p_c$ , mesmo o maior conglomerado é relativamente pequeno e a razão deste tamanho pelo tamanho da rede vai a zero quando o tamanho da rede vai ao infinito, i.e.,  $\theta(p < p_c) = 0$ . Para  $p$  ligeiramente acima de  $p_c$  vimos na Equação (26) que  $\theta(p) \propto (p - p_c)^\beta$ . A pergunta que surge agora é : como estes resultados mudam quando estamos considerando uma rede finita? Neste caso  $\theta(p)$  não depende apenas da concentração  $p$ , mas também do comprimento da rede  $L$ , por exemplo, em uma rede cúbica simples de lado  $L$  teríamos  $L^3$  sítios.

Em regime assintótico, que significa  $L$  muito grande ( $1/L$  próximo



de zero) e  $p$  próximo de  $p_c$  ( $p-p_c$  próximo de zero), esperamos  $\theta(p)$  seguir

$$\theta(p) = L^{-A} F[(p-p_c)L^B] \quad (48.a)$$

em analogia com a Equação (46) ou (29). Aqui  $F$  é uma função de escala adequada e  $A$  e  $B$  são expoentes críticos adequados. Como o sistema é finito, o maior conglomerado é sempre finito e além disso não muda drasticamente perto de  $p_c$ , a função de escala  $F(z)$  será sempre uma função positiva de seu argumento  $z=(p-p_c)L^B$  e é analítica para todo  $z$ , em especial para  $z=0$  ( $p=p_c$ ). Para  $L \rightarrow \infty$  e  $p$  fixado acima de  $p_c$ , devemos obter  $(p-p_c)^\beta$  para  $\theta(p)$  independentemente de  $L$ . Assim para um valor muito alto e positivo de  $z$ , a função de escala  $F(z)$  deve variar como  $z^{A/B}$  pois

$$\begin{aligned} \theta(p) &\propto (p-p_c)^\beta = L^{-A}(p-p_c)^\beta L^A = L^{-A}(p-p_c)^{A/B} L^{A+B} = L^{-A} [(p-p_c)L^B]^{A/B} \\ &= L^{-A} F[(p-p_c)L^B] \end{aligned}$$

"Obtemos" então que  $\theta(p) \propto (p-p_c)^{A/B}$  e com isso  $\beta = A/B$ . Por outro lado, para  $z=0$ , que ocorre quando  $p=p_c$ , o maior conglomerado terá seu raio da ordem do tamanho do sistema  $L$ . Da Equação (43) nos obtemos que o maior conglomerado contém cerca de  $L^{1/\rho}$  sítios quando  $p=p_c$  (pois  $s \propto R_0^{d/\rho} \propto L^{1/\rho}$ ).

A probabilidade  $\theta(p)$  (tamanho do conglomerado dividido pelo tamanho da rede) varia como  $L^{-d+1/\rho}$  (pois  $\theta(p) \propto L^{1/\rho}/L^d$ ) em  $d$  dimensões. Por outro em  $p=p_c$  temos, segundo (48),  $\theta(p) = L^{-A} F(0) \propto L^{-A}$ . Portanto  $A = d-1/\rho = \beta/\nu$  (por (47)). Nossa relação dá  $A/B = 1/\nu$  e  $B = A/\beta$ . Podemos então reescrever a Equação (48.a) como

$$\theta(p) = L^{-\beta/\nu} F[(p-p_c)L^{1/\nu}] \quad (48.b)$$

O que esta equação significa realmente? Sua simplicidade requer que haja apenas 1 comprimento de correlação  $\{\propto |p-p_c|^{-\nu}$  em nosso sistema pois de outro modo, dois diferentes expoentes  $\nu$  poderiam aparecer na Equação (48.b). Se esse comprimento de correlação é muito menor que o tamanho do sistema  $L$ , i.e.  $\{\ll L$ , que significa que  $p-p_c \gg L^{-1/\nu}$ , não vemos efeito de borda do sistema em nossas simulações, que significa

que as quantidades em estudo comportam-se como em um sistema infinito. Este é o caso se o argumento  $|z|$  é muito maior que 1 (pois  $z=(p-p_c)L^{1/\nu} \gg L^{-1/\nu}L^{1/\nu} = 1$ ). Se formos nos aproximando de  $p_c$  a um  $L$  fixado, o argumento  $z=(p-p_c)L^{1/\nu}$  diminui enquanto  $\xi \propto |p-p_c|^{-\nu}$  aumenta. Quando  $\xi$  chega à ordem de  $L$ ,  $z$  será da ordem de 1 (pois  $z=(p-p_c)L^{1/\nu} \propto L^{-1/\nu}L^{1/\nu} = 1$ ) e então alguns desvios da função com relação ao comportamento do sistema infinito são esperados. Este comportamento geral é desenhado esquematicamente na Figura 8 para  $\theta(p)$  descrito pela Equação (48.b). (É importante lembrar que todas as relações de escala são válidas apenas para redes grandes e  $p$  próximo de  $p_c$ . Não podemos aprender muito sobre percolação olhando apenas para um único sítio ocupado).

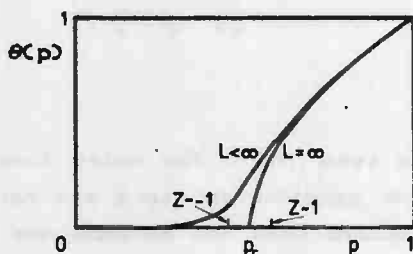


Figura 8: Comportamento esquemático de  $\theta(p)$  de acordo com a teoria de escala para rede finita.

Vamos aplicar essas idéias à probabilidade  $R=R(p,L)$  de que uma rede finita de dimensão  $L$  percole, onde  $p$  é a probabilidade de um sítio estar ocupado. (Definimos que há percolação se pelo menos um conglomerado conecta o topo à base da rede.) Em um sistema finito, nos temos  $R=1$  se  $p > p_c$  e  $R=0$  se  $p < p_c$ . A quantidade  $dR/dp$  é a probabilidade que a rede comece a percolar quando passamos de  $p$  para  $p+dp$ . Como em um sistema tendendo a infinito temos que  $R=1$  para  $p$  acima de  $p_c$ , o expoente crítico de  $R$  é zero, e o análogo à Equação (47.b) em um sistema finito para  $L$  grande e  $p$  próximo de  $p_c$  é:

$$R = \phi[(p-p_c)L^{1/\nu}]. \quad (49.a)$$

A função de escala de  $\phi$  aumenta de 0 para 1 se o argumento aumenta de  $-\infty$  ( $p$  muito abaixo de  $p_c$ ) para  $+\infty$  ( $p$  muito acima de  $p_c$ ). A derivada é:

$$\frac{dR}{dp} = L^{1/\nu} \phi'[(p-p_c)L^{1/\nu}]. \quad (40.b)$$

Para  $L \rightarrow \infty$  esta derivada aproxima-se da função delta.

Vamos definir a concentração média  $p_{av}$  como o primeiro valor de  $p$  em que vemos um conglomerado percolar

$$p_{av} = \int p \left( \frac{dR}{dp} \right) dp \quad (50)$$

onde a integral vai de  $p=0$  a  $p=1$ . (Note que  $\int (dR/dp) dp = R(1) - R(0) = 1$ ). Nos podemos determinar  $p_{av}$  fazendo numerosas simulações, onde vamos incrementando o valor de  $p$  até aparecer um conglomerado que percola.

A pergunta que surge agora é : como este valor  $p_{av}$  para rede finita se aproxima de seu valor assintótico  $p_c$  para rede infinita? Através da Equações (50), temos que

$$\begin{aligned} (p_{av} - p_c) &= \int p \left( \frac{dR}{dp} \right) dp - \int p_c \left( \frac{dR}{dp} \right) dp \\ &= \int (p - p_c) \left( \frac{dR}{dp} \right) dp = \int (p - p_c) L^{1/\nu} \phi'[(p - p_c) L^{1/\nu}] dp = \end{aligned}$$

Fazendo  $z = (p - p_c) L^{1/\nu}$ , teremos  $dz = L^{1/\nu} dp$ . Segue que

$$(p - p_{av}) = L^{-1/\nu} \int z \phi'(z) dz$$

onde a integral é apenas uma constante, logo

$$(p - p_{av}) \propto L^{-1/\nu} \quad (51)$$

No caso especial da rede triangular a constante de proporcionalidade pode ser zero, uma vez que  $dR/dp$  é completamente simétrica em torno de zero.

A variação de  $p_{av}$  com o tamanho do sistema  $L$  é uma maneira de determinar o expoente crítico  $\nu$ . Vamos definir então um parâmetro de variação de  $p_{av}$ , denominando-o de  $\Delta$ :

$$\Delta^2 = \int (p - p_{av})^2 \left( \frac{dR}{dp} \right) dp \quad (52.a)$$

Com essa definição, temos que

$$\Delta^2 = \int [(p-p_c)-(p_{av}-p_c)]^2 \left( \frac{dR}{dp} \right) dp =$$

$$\Delta^2 = \int (p-p_c)^2 \left( \frac{dR}{dp} \right) dp + (p_{av}-p_c)^2 - 2(p_{av}-p_c) \int (p-p_c) \left( \frac{dR}{dp} \right) dp =$$

$$= \int (p-p_c)^2 \left( \frac{dR}{dp} \right) dp + (p_{av}-p_c)^2 - 2(p_{av}-p_c)^2 =$$

$$\approx \int (p-p_c)^2 \left( \frac{dR}{dp} \right) dp$$

pois  $p_{av}$  está muito próximo de  $p_c$ , ou seja,  $(p_{av}-p_c)^2$  é muito próximo de zero. Daí

$$\Delta^2 \approx \int (p-p_c)^2 L^{1/\nu} \phi' [(p-p_c)L^{1/\nu}] dp$$

Fazendo  $z = (p-p_c)L^{1/\nu}$ , temos

$$\Delta^2 \approx \int L^{-2/\nu} z^2 L^{1/\nu} \phi' [z] L^{1/\nu} dz$$

$$\approx 2L^{-2/\nu} \int z^2 \phi' [z] dz$$

Como a integral é apenas uma constante, temos que

$$\Delta^2 \propto L^{-2/\nu}, \text{ ou seja,}$$

$$\Delta \propto L^{-1/\nu}$$

(52.b)

Traçando o gráfico de  $\log \Delta$  contra  $\log L$ , para vários valores de  $L$ , podemos obter o valor do expoente do comprimento de correlação  $\nu$  através da inclinação desta reta.

É importante salientar que para determinação de uma estimativa precisa do expoente do comprimento de correlação é necessário um número muito maior de simulações do que para a obtenção de uma estimativa precisa de  $p_c$ .

Na seção seguinte iremos mencionar resultados numéricos, onde iremos mostrar a proximidade entre lei de escala para um sistema finito e as técnicas de renormalização de grupo.

## 4.2. Renormalização células pequenas

A idéia básica de renormalização é a de auto-similaridade no ponto crítico. O que significa isso? Vimos na Equação (48.b) que a questão crucial da lei de escalonamento para rede finita é se o tamanho do sistema é maior ou menor que o comprimento de correlação  $\xi \propto |p-p_c|^{-\nu}$ . Vimos nas Equações (29) e (46) que os conglomerados podem ser separados em dois grupos principais : aqueles com massa maior que  $\xi \propto |p-p_c|^{-1/\nu}$ , e aqueles com menor massa. Para conglomerados pequenos uma espécie de lei de potência é válida, por exemplo  $\theta(p) = L^{-p/\nu}$ , e para conglomerados grandes, uma outra lei de potência é assegurada, por exemplo,  $\theta(p) = (p-p_c)^p$ . Em outras palavras, todos os conglomerados menores (no sentido do maior diâmetro) que o comprimento de correlação  $\xi$  são auto-similares desde que contenham muitos sítios. Esta similaridade é quebrada para conglomerados com diâmetros da ordem de  $\xi$  ou diâmetros da ordem da distância entre dois sítios na rede. Exatamente em  $p_c$ , o comprimento de correlação é infinito, logo todos os conglomerados são similares.

O procedimento básico de renormalização é considerar um conjunto de sítios como um único sítio denominado super-sítio, por exemplo, tomamos um quadrado de  $4 \times 4$  sítios e transformamos ele em um único sítio. De forma geral, transformamos um conjunto de  $b^d$  sítios em um único super-sítio. Porém esta renormalização precisa de uma regra governamental, ou seja, uma regra para decidir se este super-sítio estará vazio ou ocupado.

Com a renormalização teremos um novo valor de  $p$ , digamos  $p'$  e em geral teremos  $p'$  diferente de  $p$ . Apenas no ponto crítico  $p_c$ , onde a auto-similaridade é válida, nos temos  $p' = p = p_c$ . Em geral conhecemos que o comprimento de correlação  $\xi$  limita a validade da similaridade e assim este limite  $\xi$  é o mesmo para a rede original e para a rede renormalizada :  $\xi = \xi'$ . Se na rede original temos

$$\xi = \text{const} |p-p_c|^{-\nu}$$

na rede renormalizada com uma constante da rede  $b$ , teremos

$$\xi' = \text{const} b |p'-p_c|^{-\nu}$$

com a mesma constante de proporcionalidade e o mesmo expoente crítico  $\nu$ . Assim

$$b|p'-p_c|^{-\nu} = |p-p_c|^{-\nu} \quad (53.a)$$

É esta a equação básica de renormalização. Tomando o logaritmo de ambos os lados, obtemos

$$\frac{1}{\nu} = \log \left[ \frac{p'-p_c}{p-p_c} \right] / \log(b) \quad (53.b)$$

para o expoente do comprimento de correlação.

Em resumo, renormalizamos uma célula de tamanho  $b$  para um único super-sítio e para a quantidade  $\xi$  permanecer inalterada também renormalizamos  $p$  para  $p'$ .

Como exemplo, vejamos o caso da rede triangular. Cada triângulo tem três sítios, e colocamos o super-sítio no centro do triângulo. A nossa regra de decisão será a seguinte : o super-sítio estará aberto se dois lados do triângulos estão conectados (uma possível regra de decisão se resume a dizer que o super sítio está aberto se dois lados da célula estão conectados, e fechado em caso contrário) e isso ocorre ou se os três sítios estão ocupados ( com probabilidade  $p^3$  ) ou se apenas dois deles estão abertos ( com probabilidade  $3p^2(1-p)$  ). Assim nossa probabilidade renormalizada é

$$p' = p^3 + 3p^2(1-p) \quad (54)$$

Exatamente no ponto crítico nos devemos ter uma similaridade completa:  $p'=p$  e chamaremos de  $p^*$  os valores de  $p$  ( pontos fixos de (51) ) que satisfazem essa condição. Teremos portanto as seguintes soluções :

$$p^* = 0, 1/2 \text{ e } 1$$

onde a primeira (zero) e a última (um) são soluções triviais e existem para redes de dimensões diferentes. Nos estamos interessados somente na solução  $p^*=1/2$ . Este ponto fixo concorda exatamente com o ponto crítico  $p_c$  da rede triangular, uma primeira indicação que a idéia de

renormalização deve ser correta. Se expandirmos a Equação (54) em série de Taylor em torno do ponto fixo  $p^* = 1/2$ , teremos

$$p' = p^* + \lambda(p - p^*) + O(p - p^*)^2$$

$$\text{com } \lambda = dp'/dp = 6p(1-p) = 3/2 \quad \text{em } p = p^* = 1/2$$

A Equação (53.b) tem agora a forma

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\log \lambda}{\log b} \quad (55)$$

Em nosso caso particular, temos  $b^2 = 3$ , pois estamos transformando  $b^d$  ( $d=2$ ) sítios em um único super-sítio. Assim

$$\nu = \frac{\log(3^{1/2})}{\log(3/2)} = 1.355$$

Este resultado está muito próximo do valor, presumivelmente correto,  $\nu = 4/3$  em duas dimensões.

Infelizmente esta boa concordância com os valores de  $p_c$  e  $\nu$  é bem excepcional. Para outras redes ou outras dimensões os resultados apresentam grandes desvios com relação ao valor conhecido.

## **5. REFERÊNCIAS**

- [1] Andjel, E.D. & Galves, A. (1988), **Uma Introdução à Teoria da Percolação**, IMPA, 8º SINAPE, Rio de Janeiro.
- [2] Essam, J.W. (1980), **Reports on Progress in Physics**, 43, 843.
- [3] de Gennes, P.G. (1976), **La Recherche**, 7, Q19.
- [4] James, B.R. (1981), **Probabilidade : Um Curso em Nível Intermediário**, Projeto Euclides, IMPA, R.J.
- [5] Kunsz, H. and Souillard, B.J. (1978), **J. Statist. Phys.**, 19, 77.
- [6] Lubensky, T.C. and McKane, A.J. (1981), **J. Phys. A**, 14, L 157.
- [7] Mandelbrot, B.B. (1984), **The Fractal Geometry of Nature**, San Francisco: Freeman and (1982) **J. Statist. Phys.**, 24, 805.
- [8] Stauffer, D. (1985), **Introduction to Percolation Theory**, Taylor & Francis, London and Philadelphia.
- [9] Stauffer, D. (1979), **Scaling Theory of Percolation Clusters**, **Phys. Rep.**, 54, 1-74.



## ULTIMOS RELATORIOS TECNICOS PUBLICADOS

1992

9201 - BOLFARINE, H., NASCIMENTO, J.A. & RODRIGUES, J. Comparing Several Regression Models with Measurement Errors. A Bayesian Approach, 16p.

9202 - BOLFARINE, H. & SANDOVAL, M.C. Empirical Bayesian Prediction in the Location Error in Variables Superpopulation Model, 26p.

9203 - BUSSAB, W.O. & BARROSO, L.P. Painei Multivariado - Análise Através do Modelo de Componentes de Variância, 07p.

9204 - LEITE, J.G. & PEREIRA, C.A.B. Urn Scheme to Obtain Properties of Stirling Numbers of Second Kind, 09p.

9205 - BELITSKY, V. A Stochastic Model of Deposition Processes with Nucleation, 21p.

9206 - BOLFARINE, H. & NASCIMENTO, J.A. Bartlett Correction Factors for the Structural Regression Model with Known Reliability Ratio, 11p.

9207 - FERRARI, P.A. Growth Processes on a Strip, 23p.

9208 - FERRARI, P.A., GALVES, J.A. & LANDIM, C. Exponential Waiting Time for a Big Gap in a One Dimensional Zero Range Process, 8p.

9209 - LOSCHI, R.H. Coerência e Probabilidade, 17p.

9210 - CRIBARI-NETO, F. & FERRARI, S.L.P. An Improved Lagrange Multiplier Statistic for the Test of Heteroskedasticity, 22p.

9211 - LEITE, J.G. & BOLFARINE, H. Bayesian Estimation of the Number of Equally Likely Classes in a Population, 10p.

9212 - BOLFARINE, H. & SANDOVAL, M.C. On Predicting the Finite Population Distribution Function, 9p.

9213 - FERRARI, P.A. & FONTES, L.R.G. Fluctuations in the Asymmetric Simple Exclusion Process, 5p.

9214 - FERRARI, P.A. & FONTES, L.R.G. Current fluctuations for the Asymmetric Simple Exclusion Process, 14p.

9215 - IRONY, T.Z. & PEREIRA, C.A.B. Motivation for the Correct Use of Discrete Distributions in Quality Assurance, 12p.

9216 - IRONY, T.Z. & PEREIRA, C.A.B. Bayesian Hypotesis Test: Using Surface Integrals to Distribute Prior Information Among the Hypotheses, 25p.

9217 - FERRARI, P.A. & MAURO, E.S.R. Ergodicity and Invariance Principle for the One Dimensional S.O.S. Stochastic Model, 10p.

9218 - PEREIRA, C.A.B. & TIWARI, R.C. A Nonparametric Bayesian Analysis of Competing Risks Models, 20p.

9219 - PEIXOTO, C. Tempos Exponenciais e Aproximação do Equilíbrio para um Passeio Aleatório no Hiperbucb, 24p.

9220 - FERRARI, S.L.P. & CRIBARI-NETO, F. On the Corrections to the Wald Test of Nonlinear Restrictions, 8p.

9221 - DANTAS, C.A.B. Verificação e Validação de Modelos de Simulação, 11p.

9222 - DRUMOND, F.B. & SINGER, J.M. Comparison of scale-invariant M-estimators in simple regression models: a simulation study, 9p.

9223 - FERRARI, P.A., KESTEN, H., MARTINEZ, S. & PICCO, P. Existence of quasi stationary distributions. A renewal dynamical approach, 18p.

#### 1993

9301 - BUENO, V.C. & ARIZONO, H. Comparisons for Maintenance Policies Involving Complete and Minimal Repair Through Compensator Transform, 12p.

9302 - BUENO, V.C. Maintenance Comparisons Through Compensator Transform: Block Policies, 13p.

9303 - FERRARI, P.A. & FONTES, L.R.G. Shock Fluctuations in the Asymmetric Simple Exclusion Process, 17p.

9304 - CORDEIRO, G. M., BOTTER, D.A. & FERRARI, S.L.P. Nonnull Asymptotic Distributions of Three Classic Criteria in Generalized Linear Models, 21p.

The complete list of Relatórios do Departamento de Estatística, IME-USP, will be sent upon request.

- Departamento de Estatística  
IME-USP  
Caixa Postal 20.570  
01498-970 - São Paulo, Brasil