

A Cardinalidade de Bases Algébricas em Espaços de Banach

Marcelo Dias Passos

Orientadora: Carmen Silvia Cardassi

Conhecemos bem o fato de que espaços normados de dimensão algébrica finita são sempre completos. Outro fato conhecido é que espaços de Banach de dimensão infinita têm base algébrica não-enumerável. A demonstração deste resultado muitas vezes é dado como exercício nos livros de análise funcional e depende do Teorema de Baire ou do Teorema de Hahn-Banach. Nosso objetivo neste trabalho é dar uma demonstração mais elementar.

Proposição: Todo espaço de Banach de dimensão algébrica infinita tem base não-enumerável.

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e suponha, por absurdo, que tenha base enumerável $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ com $\|e_i\| = 1$, para $i \in \mathbb{N}^*$. Construiremos uma sequência de Cauchy que não é convergente.

Definimos $r_i = \inf \{\|x + e_i\| : x \in S_{i-1}\} = d(e_i + S_{i-1}, 0)$ $i \geq 2$, onde S_{i-1} é o subespaço gerado por $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$. Como S_{i-1} tem dimensão finita temos que é fechado e então $r_i > 0$, pois $e_i \notin S_{i-1}$. $r_i \leq \|e_i + 0\| = 1$.

Agora seja $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{3}$ e $t_{i+1} = \frac{r_i t_i}{3}$; $i \geq 2$. A sequência $u_n = \sum_{i=1}^n t_i e_i$ é a sequência que nos dará a contradição.

Sobre $\{r_i\}$ e $\{t_i\}$ podemos afirmar (e demonstra-se por indução)

$$0 < t_{i+k} \leq \frac{1}{3^k} r_i t_i \leq \frac{1}{3^{i+k-1}}; \quad i \geq 2; \quad k \geq 1.$$

Daí temos que $\{u_n\}$ é de Cauchy:

$$n > m : \|u_n - u_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^n t_i e_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^n t_i \leq \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{3^{i-1}} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Logo $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u = \sum_{i=1}^m a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, pois o espaço é de Banach e temos uma contradição:

$$\forall n > m + 1 : \|u_n - u\| = \left\| \sum_{i=1}^m (t_i - a_i) e_i + t_{m+1} e_{m+1} + \sum_{j=m+2}^n t_j e_j \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\geq t_{m+1} \left\| \sum_{i=1}^m \left(\frac{t_i - a_i}{t_{m+1}} \right) e_i + e_{m+1} \right\| - \left\| \sum_{j=m+2}^n t_j e_j \right\| \\
&\geq t_{m+1} r_{m+1} - \sum_{j=1}^{n-m-1} t_{m+1+j} \\
&\geq t_{m+1} r_{m+1} - \sum_{j=1}^{n-m-1} \frac{r_{m+1} t_{m+1}}{3^j} \geq \frac{r_{m+1} t_{m+1}}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_n - u\| \neq 0$$

E a base algébrica de E é não-enumerável.

Bibliografia

- [1] Tsang, Nam-Kiu. "Infinite-Dimensional Banach Spaces Must Have Uncountable Basis-
An Elementary Proof", **American Mathematical Monthly** 91, 10, 1984.