VII SIMPÓSIO DE QUANTIFICAÇÃO EM GEOCIÊNCIAS
Boletim de Resumos Expandidos - IGCE/UNESP - Rio Claro, 1997, 172-177

UM MÉTODO PARA O CÁLCULO DA VARIÂNCIA DE INTERPOLAÇÃO PARA O INVERSO DA POTÊNCIA DA DISTÂNCIA

*Jorge Kazuo Yamamoto**

INTRODUÇÃO

O método do inverso da potência da distância tem sido extensivamente utilizado em geologia como uma função de interpolação, quando os dados disponíveis não justificam o cálculo de um variograma e, portanto, a técnica da krigagem ordinária não pode ser aplicada.

O usuário da técnica da krigagem ordinária sabe muito bem que a variância de krigagem é somente uma medida da configuração espacial do subconjunto de pontos de dados considerado na estimativa. Portanto, a variância de krigagem não reconhece a dispersão local dos pontos de dados, ou seja, se a mesma configuração de um conjunto de dados é utilizada, independentemente da sua dispersão, a variância de krigagem será exatamente a mesma. Antes de expor o método proposto, para o cálculo da variância de interpolação, há necessidade de se apresentar uma breve descrição do método do inverso da potência da distância.

INVERSO DA POTÊNCIA DA DISTÂNCIA: INTERPOLAÇÃO PONTUAL

A interpolação pontual usando o inverso da potência da distância é baseada na equação geral da média ponderada:

$$T = \sum_{i=1}^{n'} . W_i . T_i \tag{1}$$

onde T_i é o teor da i-ésima amostra, W_i é o peso normalizado entre o i-ésimo ponto e o ponto a ser estimado e n' é o número de amostras vizinhas consideradas para a estimativa.

O i-ésimo peso normalizado é dado por:

$$W_i = \left[1/d_i^p \Big/ \sum_{j=1}^{n'} 1/d_j^p \right] \tag{2}$$

onde d_i é a distância entre a i-ésima amostra e o ponto a ser estimado, e p é potência da distância.

INVERSO DA POTÊNCIA DA DISTÂNCIA: INTERPOLAÇÃO DE BLOCO

O método para avaliação de bloco usando o inverso da potência da distância, foi proposto por Yamamoto (1996), o qual é baseado na seguinte relação:

$$T = \sum_{i=1}^{n'} . \overline{W}_i . T_i \tag{3}$$

onde $\overline{W}_i$ é o ponderador médio entre a i-ésima amostra e todos os sub-blocos.

* Departamento de Geologia Econômica e Geofísica Aplicada, IG-USP.

O peso médio $\overline{W_i}$ é calculado como:

$$\overline{W_i} = \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb} W_{i,k} \text{ , para i=1 até n} \quad (4)$$

onde $W_{i,k}$ é o peso normalizado entre a i-ésima amostra e o k-ésimo sub-bloco:

$$W_{i,k} = \left[\left(1/d_{i,k}^{p}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n'} 1/d_{j,k}^{p} \right) \right] \quad (5)$$

Pode ser demonstrado que o teor médio do bloco é igual à média aritmética dos teores encontrados nos sub-blocos:

$$T = \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb} T_k \quad (6)$$

Onde T_k, o teor do k-ésimo sub-bloco, pode ser calculado como:

$$T_k = \sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} . T_i \quad (7)$$

Portanto, o teor médio do bloco é:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} . T_i \\ &= \sum_{i=1}^{n'} T_i \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb} W_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{n'} \overline{W_i} . T_i \end{aligned} \quad (8)$$

VARIÂNCIA DE INTERPOLAÇÃO

Desde que a técnica da krigagem foi publicada na década de 60, a medida do desvio associado à uma estimativa foi deixada para um segundo plano, porque a variância de krigagem foi considerada por muitos anos como uma medida de dispersão de uma estimativa. Contudo, a variância de krigagem não é uma medida real da dispersão local e, portanto, não poderia ser utilizada como um indicador de qualidade da estimativa.

A variância de interpolação deve ser proporcional ao quadrado da diferença entre o i-ésimo valor T_i e o valor estimado T, sendo a proporção definida pela efetiva contribuição do i-ésimo valor para o resultado da estimativa, ou seja o peso W_i. Assim, estendendo este raciocínio para todos os n' pontos do subconjunto, tem-se a variância de interpolação como a somatória das diferenças ao quadrado multiplicados pelos respectivos pesos. Dessa forma, a variância de interpolação pode ser calculada como:

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^{n'} W_i . \left(T_i - T\right)^2 \quad (9)$$

Esta equação é válida para estimativa pontual. O que se pretende mostrar é que esta equação pode ser facilmente adaptada para o cálculo da variância associada a estimativa de bloco.

De acordo com o método da estimativa de bloco, pelo inverso da potência da distância, o teor médio do bloco é igual à média aritmética dos teores calculados nos sub-blocos. Assim, a variância de interpolação para o k-ésimo sub-bloco, usando a equação (9), pode ser calculada como:

$$S_k^2 = \sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} \cdot (T_i - T_k)^2 \tag{10}$$

A variância total para o bloco pode ser determinada pela composição das variâncias de interpolação dos sub-blocos (variância dentro dos sub-blocos) e corrigindo para a mudança de suporte (variância entre os sub-blocos), que denomina-se variância de dispersão. A expressão da variância total, segundo Isaacks & Srivastava (1989), é:

$$\underbrace{S^2}_{\text{Var. total}} = \underbrace{\frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb} S_k^2}_{\text{Var. dentro sub-blocos}} + \underbrace{\frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}(T_k - T)^2}_{\text{Var. entre sub-blocos}} \tag{11}$$

Esta equação pode ser desenvolvida como segue:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\left[S_k^2 + (T_k - T)^2\right] \\
&= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\left[\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k}(T_i - T_k)^2 + (T_k - T)^2\right] \\
&= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\left[\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k}\left(T_i^2 - 2T_k T_i + T_k^2\right) + T_k^2 - 2T_k T + T^2\right] \\
&= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\left[\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i^2 - 2T_k \sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i + 2T_k^2 - 2T_k T + T^2\right]
\end{aligned}$$

Usando a equação (7) tem-se:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\left[\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i^2 - 2T_k^2 + 2T_k^2 - 2T_k T + T^2\right] \\
&= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\left[\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i^2 - 2T_k T + T^2\right]
\end{aligned}$$

Substituindo-se T_k pela equação (7), a variância total para um bloco torna-se:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\left[\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i^2 - 2T\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i + T^2\right] \\
&= \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i^2 - 2T\frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb}\sum_{i=1}^{n'} W_{i,k} T_i + T^2
\end{aligned}$$

Rearranjando as somatórias tem-se:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n'} T_i^2 \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb} W_{i,k} - 2T\sum_{i=1}^{n'} T_i \frac{1}{nsb}\sum_{k=1}^{nsb} W_{i,k} + T^2$$

Substituindo a equação (4):

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n'} T_i^2 \overline{W}_i - 2T\sum_{i=1}^{n'} T_i\overline{W}_i + T^2$$

Essa pode ser escrita como:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n'} T_i^2 \overline{W}_i - 2T\sum_{i=1}^{n'} T_i\overline{W}_i + T^2\sum_{i=1}^{n'}\overline{W}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n'} \overline{W}_i\left(T_i^2 - 2TT_i + T^2\right)$$

Portanto, a variância total para um bloco pode ser calculada como:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n'} \overline{W}_i\left(T_i - T\right)^2 \qquad (12)$$

Esta equação permite o cálculo da variância total para um bloco diretamente dos pesos médios, porque esta é similar à equação (9) onde os pesos para estimativa pontual foram substituídos pelos pesos médios. É importante ressaltar que esta equação incorpora tanto a variância de interpolação (variância dentro dos sub-blocos) como a variância de dispersão (variância entre os sub-blocos).

EXEMPLO NUMÉRICO PARA O CÁLCULO DA VARIÂNCIA DE INTERPOLAÇÃO

A Figura 1 apresenta uma configuração, a mesma utilizada por Yamamoto (1996), em que pretende-se estimar o ponto central do bloco a partir dos pontos de dados, conforme as coordenadas dos pontos da Tabela 1.

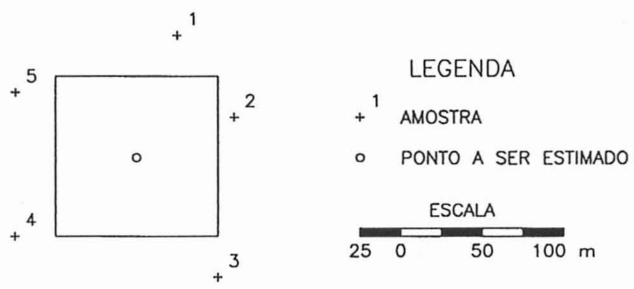

Figura 1: Localização dos pontos de dados e o ponto a ser estimado.

Tabela 1: Coordenadas do subconjunto de pontos de dados para estimativa do ponto no centro do bloco de coordenadas (100,100).

AMOSTRA	COORD. X (m)	COORD. Y (m)	TEOR (%)
1	125	175	5.5
2	160	125	5.0
3	150	25	4.8
4	25	50	3.0
5	25.5	140	4.5

A Tabela 2 apresenta os passos para o cálculo da variância de interpolação, a partir da determinação do teor médio (T).

Usando a mesma configuração da Figura 1, pretende-se demonstrar o cálculo da variância total do bloco, o qual, de acordo com a metodologia proposta por Yamamoto (1996), é dividido em 4 sub-blocos como mostra a Figura 2. As coordenadas dos centros dos sub-blocos encontram-se na Tabela 3.

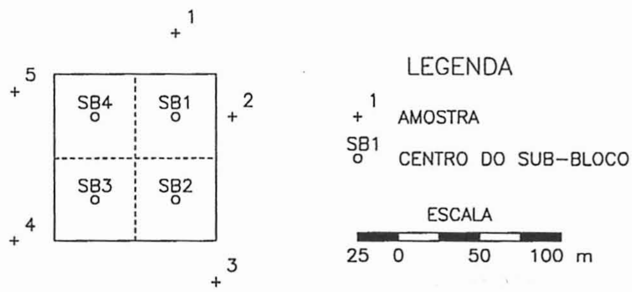

Figura 2: Localização dos pontos de dados e o bloco subdividido em 4 sub-blocos.

Tabela 2: Cálculo do teor médio e da variância de interpolação, conforme a equação (9).

AMOSTRA	$\frac{1}{d_i^2} \cdot 10^{-4}$	$W_i = 1/d_i^2 / \sum_{j=1}^{n'} d_j^p$	$W_i \cdot T_i (\%)$	$W_i \cdot (T_i - T)^2$ (%²)
1	1.6000	0.2044	1.1242	0.1418
2	2.3669	0.3024	1.5120	0.0335
3	1.2308	0.1572	0.7546	0.0028
4	1.2308	0.1572	0.4716	0.4368
5	1.3986	0.1788	0.8046	0.0050
TOTAIS	7.8270	1.0000	4.6670	0.6199

Tabela 3: Coordenadas dos centros dos sub-blocos da Figura 2.

sub-bloco	Coord. X	Coord. Y
1	125	125
2	125	75
3	75	75
4	75	125

Os resultados do cálculo do teor médio do bloco e da variância total encontram-se na Tabela 4, de acordo com a equação (11) e na Tabela 5, conforme a equação (12).

Tabela 4: Cálculo da variância total do bloco usando a equação (11).

AMOSTRA	SB1	SB2	SB3	SB4	MÉDIA
1	0.2715	0.1172	.1031	0.2224	0.1785
2	0.5541	0.3146	0.1326	0.1539	0.2888
3	0.0639	0.3750	0.1587	0.0712	0.1672
4	0.0435	0.1103	0.4125	0.1369	0.1758
5	0.0670	0.0829	0.1931	0.4156	0.1897
T_k	5.0025	4.7216	4.0983	4.6154	4.6094
S_k^2	0.2612	0.4287	0.9173	0.5620	0.5423
$(T_k - T)^2$	0.1545	0.0126	0.2613	3.5403×10^{-5}	0.1071
S^2	-	-	-	-	0.6494

Tabela 5: Cálculo da variância total do bloco usando a equação (12).

AMOSTRA	$\overline{W}_i$	$\overline{W}_i . T_i$	$\overline{W}_i(T_i - T)^2$
1	0.1785	0.9820	0.1416
2	0.2888	1.4440	0.0441
3	0.1672	0.8026	0.0061
4	0.1758	0.5274	0.4553
5	0.1897	0.8534	0.0023
SOMA	1.0000	4.6094	0.6494

Conforme os resultados obtidos, as equações (11) e (12) são absolutamente válidas para o cálculo da variância de bloco.

CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um método para o cálculo da variância associada a estimativa pontual ou de bloco usando o inverso da potência da distância. A variância de interpolação leva em consideração tanto a configuração dos pontos de dados como a dispersão. Nesse sentido, ela é mais precisa que a variância de krigagem, que considera apenas a configuração dos pontos de dados baseada num variograma global.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Isaacks, E.H. & Srivastava, R.M. 1989. An introduction to applied geostatistics. New York, Oxford University Press. 561p.

Yamamoto, J.K. 1996. A new method of block calculation using the inverse of weighted distance. Eng. & Min. J., 197(9):69-72.