

## **Modelo em Elementos Finitos para Simulação e Análise de um Gerador Piezelétrico de Energia**

Reinaldo Cesar, rcesar@sc.usp.br<sup>1</sup>

Carlos De Marqui Junior, demarqui@sc.usp.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Materiais e Aeronáutica, Escola de Engenharia de São Carlos

**Resumo:** A conversão de energia de vibração disponível no ambiente em energia elétrica é a definição para o termo *Vibration Based Energy Harvesting*, ou geração de energia a partir de vibrações. Diferentes mecanismos de transdução podem ser utilizados para a conversão, como por exemplo, o piezelétrico, eletromagnético e eletrostático. Entretanto, a literatura recente mostra que a transdução piezelétrica tem recebido a maior atenção devido a elevada densidade de potência elétrica que proporcionam. Um modelo em elementos finitos eletromecanicamente acoplado baseado nas hipóteses de Kirchhoff é apresentado. Um gerador piezelétrico de energia na configuração bimorph (uma camada de metal (subestrutura) completamente envolvida por duas camadas piezocerâmicas) em paralelo é analisado. Um circuito elétrico resistivo é considerado no domínio elétrico do problema. O gerador, representado na configuração livre-engastado, é excitado a partir do movimento harmônico de sua base engastada. Funções respostas em frequência (FRFs) eletromecanicamente acopladas são definidas e o comportamento do sistema analisado.

**Palavras-chave:** Vibrações Mecânicas; Piezeletricidade; Elementos Finitos; Geração de Energia

### **1. INTRODUÇÃO**

O desenvolvimento de estruturas multifuncionais tem sido objeto de várias pesquisas nos últimos anos. Tais estruturas são caracterizadas pela capacidade de realizar tarefas adicionais, além de sua função primária, sem alterações significativas de suas características originais (Dodemant, 2007). Estruturas aeronáuticas multifuncionais vêm sendo apontada como uma das tendências que deverá ter um impacto significativo no projeto de aeronaves autônomas não-tripuladas (Pines e Bohorquez, 2006). Estas estruturas multifuncionais poderiam minimizar o efeito das severas restrições de massa e volume a que estas aeronaves estão sujeitas, ampliando sua capacidade de carga e gerando fontes adicionais de energia. As utilizações de materiais inteligentes podem viabilizar a atribuição de funções adicionais à estrutura de um UAV (Unmanned Aerial Vehicle) ou MAV (Micro Air Vehicle). Esta tecnologia permitirá a utilização de materiais piezelétricos (fibras piezelétricas em compósito e piezocerâmicas) colados sobre a estrutura ou como elementos estruturais de um UAV, ou MAV, atribuindo-lhe a função extra de converter energia de vibração em energia elétrica (Erturk and Inman, 2009a; Anton and Inman, 2008; De Marqui et al., 2010). Esta fonte adicional de energia poderá ser utilizada para a alimentação de sistemas eletrônicos de baixo consumo ou para recarregar baterias da aeronave.

A conversão de energia de vibração disponível no ambiente em energia elétrica é a definição para o termo *Vibration Based Energy Harvesting*, ou geração de energia a partir de vibrações mecânicas a partir do efeito piezelétrico direto. Este conceito é particularmente importante para sistemas remotamente operados e com fontes limitadas de energia, como os UAVs e MAVs anteriormente citados. Possíveis fontes de energia para estas aeronaves são: vibração mecânica devido à interação entre motor e estrutura (Anton e Inman, 2008), vibrações durante movimentos em solo ou pouso sobre fontes de excitação (Magoteaux et al., 2008; Erturk et al., 2009b), ou oscilações aeroelásticas de superfícies de sustentação durante o voo (De Marqui et al., 2009). Diferentes mecanismos de transdução podem ser utilizados para a conversão eletromecânica, entretanto, a literatura recente mostra que a transdução piezelétrica tem recebido a maior atenção devido à elevada densidade de potência que proporciona e facilidades de instalação (Sodano et al., 2004; Priya, 2007; Anton and Sodano, 2007).

A configuração mais simples do gerador é composta por vigas ou placas metálicas engastadas, completamente cobertas por uma ou mais camadas de material piezocerâmico e excitadas a partir do movimento de sua base. Na condição mais simplificada, um elemento resistivo é considerado no domínio elétrico para a avaliação da potência elétrica gerada a partir das oscilações mecânicas. Estes geradores devem ser acoplados a uma estrutura principal que é a

fonte de excitação mecânica para o mesmo. Assim, esta energia de vibração disponível no ambiente poderá ser convertida em energia elétrica.

Um dos desafios das pesquisas na área é a obtenção de geradores que possam converter energia em uma ampla faixa de frequências de excitação, facilitando sua adequação as variadas fontes de excitação disponíveis em seu ambiente. Usualmente os geradores são dimensionados para que a frequência de ressonância de um de seus modos de vibrar seja excitada por fontes de vibrações disponíveis no ambiente. A amplitude da saída elétrica de um gerador será máxima quando o mesmo for excitado em uma de suas frequências de ressonância. A conversão mais eficiente se dá a partir do modo fundamental de vibrar da estrutura, primeiro modo de flexão. A distribuição de deformações ao longo de uma viga engastada para o modo fundamental explica tal fato.

Neste artigo é apresentada a modelagem por elementos finitos de um gerador piezelétrico de energia. Funções resposta em frequência (FRFs) eletromecânicas são apresentadas para um gerador bimorph (uma subestrutura completamente coberta por duas camadas de piezocerâmicas, uma sobre a superfície superior e outra sobre a inferior) em paralelo. Uma carga resistiva é considerada no domínio elétrico do problema. O sistema é excitado a partir do movimento harmônico de sua base engastada. Os resultados são apresentados e analisados para o modo de vibrar fundamental e uma ampla faixa de resistores.

## 2. MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE UMA PLACA GERADORA DE ENERGIA

### 2.1 Princípio Generalizado de Hamilton para um Gerador Piezelétrico de Energia

As equações eletromecanicamente acopladas de um gerador piezelétrico de energia podem ser obtidas a partir do Princípio Generalizado de Hamilton para um corpo eletroelástico, definido como,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta [ (T - U + W_e) + W ] dt = 0 \quad (1)$$

onde  $t_1$  e  $t_2$  são o tempo inicial e final, respectivamente,  $T$  é a energia cinética total do sistema,  $U$  é a energia potencial,  $W_e$  é a energia elétrica,  $W$  é o trabalho total das forças externas atuando no sistema, dadas por,

$$T = \int_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_s + \int_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_p \quad (2)$$

$$U = \int_{V_s} \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_s + \int_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_p \quad (3)$$

$$W_e = \int_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{E}^t \mathbf{D} dV_p \quad (4)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor do deslocamento mecânico,  $\mathbf{S}$  é o vetor das componentes da deformação mecânica,  $\mathbf{T}$  é o vetor das componentes de tensão mecânica,  $\mathbf{E}$  é o vetor das componentes de campo elétrico,  $\mathbf{D}$  é o vetor das componentes de deslocamento elétrico,  $\rho_s$  é a densidade de massa da subestrutura,  $\rho_p$  é a densidade de massa do piezelétrico,  $V_s$  o volume elementar da subestrutura,  $V_p$  o volume elementar do piezelétrico e  $t$  representa a transposta quando usado como sobrescrito.

A última parcela de energia vem do trabalho de forças mecânicas aplicadas nos pontos  $(x_i, y_i)$  e de um conjunto de cargas elétricas discretas extraídas nos pontos  $(x_j, y_j)$  da superfície,

$$\delta W = \sum_{i=1}^{nf} \delta \mathbf{u}(x_i, y_i, t) \cdot \mathbf{f}(x_i, y_i, t) + \sum_{j=1}^{nq} \delta \varphi(x_j, y_j, t) \cdot q(x_j, y_j, t) \quad (5)$$

onde  $\mathbf{f}$  é o vetor das componentes das forças mecânicas externa,  $\varphi$  é o potencial elétrico escalar,  $q$  é carga elétrica de superfície,  $nf$  é o número de forças mecânicas discretas aplicadas e  $nq$  é o número de pares de eletrodos discretos.

É importante mencionar que no último termo da Eq. (5) apresenta sinal positivo para o problema de geração de energia. Em um caso de atuação estrutural, oposto de um caso de geração piezelétrica de energia, a carga elétrica é a entrada do problema e, assim, este termo teria sinal negativo.

A relação constitutiva elástica-linear para a subestrutura pode ser escrita como,

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}_s \mathbf{S} \quad (6)$$

e a relação constitutiva eletroelástica linear para materiais piezelétricos é dada por (IEEE Std 176, 1978),

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}\mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \quad (7)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}_p^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^t \mathbf{E} \quad (8)$$

onde  $\mathbf{c}$  é a matriz de rigidez elástica,  $\mathbf{e}$  é a matriz de constante piezoeétrica,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é a matriz das componentes de permissividade, os sobrescritos E e S denotam que os parâmetros são medidos em campo elétrico e deformação constante, respectivamente.

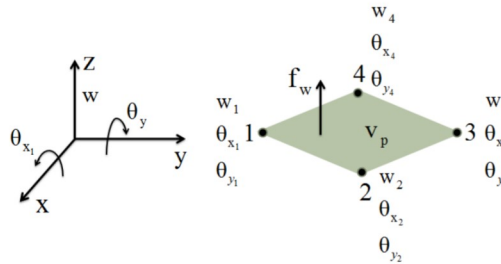
Substituindo-se as Eqs. (2) até (8) na Eq. (1) obtém equação do Princípio Variacional Eletromecânico para Meios Piezoeletricos,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[ \int_{V_s} \rho_s \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_s + \int_{V_p} \rho_p \dot{\mathbf{u}}^t \dot{\mathbf{u}} dV_p - \int_{V_s} \mathbf{S}^t \mathbf{c}_s \mathbf{S} dV_s - \int_{V_p} \mathbf{S}^t \mathbf{c}_p^E \mathbf{S} dV_p + \int_{V_p} \mathbf{S}^t \mathbf{e}^t \mathbf{E} dV_p + \int_{V_p} \mathbf{E}^t \mathbf{e} \mathbf{S} dV_p \right. \\ \left. + \int_{V_p} \mathbf{E}^t \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} dV_p + \sum_{i=1}^{nf} \mathbf{u}(x_i, y_i, t) \cdot \mathbf{f}(x_i, y_i, t) + \sum_{j=1}^{mq} \varphi(x_j, y_j, t) q(x_j, y_j, t) \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.2. Modelos por Elementos Finitos Eletromecanicamente Acoplado

O modelo aqui apresentado é originalmente derivado para um gerador unimorph (uma camada de subestrutura coberta por uma camada de piezocerâmica). A formulação é facilmente adaptada para o caso bimorph, como mostrado no final desta seção. A subestrutura e a camada piezocerâmica são assumidas perfeitamente coladas uma na outra. A camada piezoeletrica é completamente coberta em sua superfície superior e inferior por eletrodos contínuos e condutivos que são conectados a um circuito elétrico externo, aqui assumido como um resistor elétrico.

Um elemento finito tipo placa retangular com três graus de liberdade por cada nó, ou seja, os deslocamentos ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) nas direções ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), mostrado na Fig. (1) é utilizado. Tem-se então 12 graus de liberdade mecânicos por elemento utilizado para a representação da subestrutura metálica do gerador. O mesmo elemento finito é utilizado para a modelagem da camada piezocerâmica. Neste caso, porém, baseado na hipótese que a camada piezocerâmica é coberta por eletrodos condutivos, adiciona-se um grau de liberdade elétrico (voltagem elétrica através dos eletrodos) ao elemento, totalizando 13 graus de liberdade.



**Figura 1 - Elemento finito piezoeletrico com 12 graus de liberdade mecânicos e um grau de liberdade elétrico**

Com base em uma das hipóteses de Kirchhoff, desprezam-se deformações transversais cisalhantes e inércias rotativas, assim como os deslocamentos no plano ( $u$ ,  $v$ ) são relacionados à flexão da placa. O campo de deslocamentos é representado por,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial w}{\partial x} & -z \frac{\partial w}{\partial y} & w \end{Bmatrix}^t \quad (10)$$

onde os componentes de deformação ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) são dados em termos da deflexão transversal ( $w$ ) em uma distância ( $z$ ) da superfície de referência.

Os componentes de deformação mecânica são dados em termos das componentes de deslocamento transversal segundo a expressão,

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ 2S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix}^t = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^t \quad (11)$$

O deslocamento transversal do nó ( $k$ ) do elemento finito retangular mostrado na Fig. (1) é assumido variar segundo o polinômio,

$$w_k = w|_{x_k, y_k} = \mathbf{P}|_{x_k, y_k} \boldsymbol{\mu} \quad (12)$$

onde

$$\mathbf{P} = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3] \quad (13)$$

e o vetor das coordenadas generalizadas é dado por,

$$\boldsymbol{\mu} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_9 \ d_{10} \ d_{11} \ d_{12}]^t \quad (14)$$

Conseqüentemente suas rotações devido à flexão da placa podem ser dadas como a derivação dos deslocamentos,

$$\theta_{x_k} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x_k, y_k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} \Big|_{x_k, y_k} \boldsymbol{\mu} \quad (15)$$

$$\theta_{y_k} = -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x_k, y_k} = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \Big|_{x_k, y_k} \boldsymbol{\mu} \quad (16)$$

Considerando os 4 nós por elemento tipo placa e 3 graus de liberdade por nó, pode ser definido o vetor das variáveis nodais (12x1) como,

$$\boldsymbol{\Psi} = \{w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^t \quad (17)$$

que pode ser expresso na forma

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} \quad (18)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz transformação (12x12), cujo elementos são determinados por  $\mathbf{P}$  e suas derivadas através das definições de  $w_k$ ,  $\theta_{xk}$  e  $\theta_{yk}$ . Portanto, as aproximações nodais para uma deflexão transversal como função de uma variável nodal tem forma,

$$w \cong w_k = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Psi} \quad (19)$$

com

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{P}|_{x_k, y_k} \mathbf{A}^{-1} \quad (20)$$

Para o elemento estrutural tipo placa, a relação entre o vetor de deslocamento transversal e as rotações da seção transversal com o vetor das variáveis nodais, é definida como,

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \ \frac{\partial w}{\partial y} \ w \right\}^t = \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\Psi} \quad (21)$$

onde

$$\mathbf{B}_\eta = \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial x} \ \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial y} \ \boldsymbol{\Gamma} \right\}^t \quad (22)$$

De forma similar, o vetor de curvatura pode ser expresso em termos de variáveis nodais como,

$$\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^t = \mathbf{B}_k \boldsymbol{\Psi} \quad (23)$$

onde

$$\mathbf{B}_k = \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} \right\}^t \quad (24)$$

As expressões de função de forma  $\mathbf{B}_\eta$  e  $\mathbf{B}_k$  são matrizes (3x12). As relações anteriores constituem a cinemática do problema. As componentes de deslocamento dadas pela Eq. (10) e conseqüentemente as componentes de deformação descritas pela Eq. (11) podem ser expressas como função de variáveis nodais e podem então ser utilizadas no Princípio de Hamilton, dado pela Eq. (9).

Admitindo-se que o material piezelétrico é polarizado na direção da espessura (direção-z), e conseqüentemente o campo elétrico é assumido uniforme ao longo da espessura, o componente não nulo do campo elétrico se torna,

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{v_p}{h_p} \quad (25)$$

onde o potencial elétrico é assumido como variando linearmente através dos pares de eletrodos da camada piezocerâmica. Assim, o vetor de campo elétrico do problema aqui tratado se torna,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{B}_E \mathbf{v}_p \quad (26)$$

sendo

$$\mathbf{B}_E = \left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{h_p} \right\}^t \quad (27)$$

onde  $h_p$  é a espessura do elemento piezelétrico.

A partir do princípio generalizado de Hamilton pode-se definir a matriz elementar de massa  $\mathbf{m}$  (12x12), a matriz elementar de rigidez  $\mathbf{K}$  (12x12), o vetor de acoplamento eletromecânico  $\boldsymbol{\theta}$  (12x1), a capacitância interna  $c_p$  e o vetor de força  $\mathbf{f}$  (12x1), expressos como,

$$\mathbf{m} = \int_{V_s} \rho_s \mathbf{B}_\eta^t \mathbf{Z}^t \mathbf{B}_\eta \mathbf{Z} dV_s + \int_{V_p} \rho_p \mathbf{B}_\eta^t \mathbf{Z}^t \mathbf{B}_\eta \mathbf{Z} dV_p \quad (28)$$

$$\mathbf{K} = \int_{V_s} z^2 \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{c}}_s \mathbf{B}_k dV_s + \int_{V_p} z^2 \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{c}}_p^E \mathbf{B}_k dV_p \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \int_{V_p} z \mathbf{B}_k^t \bar{\mathbf{e}}^t \mathbf{B}_E dV_p \quad (30)$$

$$c_p = \int_{V_p} \mathbf{B}_E^t \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^S \mathbf{B}_E dV_p \quad (31)$$

$$\mathbf{f} = \int_s \boldsymbol{\Gamma}^t \mathbf{F}_w dS \quad (32)$$

com,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Se uma estrutura é excitada a partir do movimento transversal de sua base engastada (direção z), a excitação mecânica nada mais é do que a sua própria inércia na mesma direção. Por esta razão, o termo forçante da Eq. (32) deve ser representado como,

$$\mathbf{F}_w = -\mathbf{m}^* \mathbf{a}_B \quad (34)$$

onde  $\mathbf{m}^*$  é a massa por unidade de área do elemento finito (incluindo as camadas piezocerâmica e subestrutura) e  $\mathbf{a}_B$  é a aceleração de base engastada.



As equações constitutivas para a camada piezocerâmica para o estado plano de tensões é dado por,

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & 0 & \epsilon_{33}^S \\ \bar{c}_{11}^E & \bar{c}_{12}^E & 0 & -\bar{e}_{31} \\ \bar{c}_{12}^E & \bar{c}_{22}^E & 0 & -\bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{c}_{66}^E & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_3 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Em geral, as cerâmicas piezelétricas polarizadas (PZT-5A e PZT-5H) exibem um comportamento transversalmente isotrópico (isotrópico no plano-12, no plano xy) e, portanto, as componentes reduzidas no plano de tensão (2-D) da Eq. (35) podem ser obtidas em termos das componentes (3-D) (Bent, 1994) como,

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11}^E &= c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, & \bar{c}_{12}^E &= c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{23}^E}{c_{33}^E}, & \bar{c}_{22}^E &= c_{22}^E - \frac{(c_{23}^E)^2}{c_{33}^E}, & \bar{c}_{66}^E &= c_{66}^E \\ \bar{e}_{31} &= e_{31} - \frac{c_{13}^E e_{33}}{c_{33}^E}, & \bar{e}_{32} &= e_{32} - \frac{c_{23}^E e_{33}}{c_{33}^E}, & \bar{\epsilon}_{33}^S &= \epsilon_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \end{aligned} \quad (36)$$

Para a camada de subestrutura constituída por um material isotrópico, a matriz de rigidez elástica  $\bar{c}_s$  para a condição do estado plano de tensões é representado na forma,

$$\bar{c}_s = \frac{Y_s h_s^3}{12(1-\nu_s^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_s & 0 \\ \nu_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu_s)}{2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

onde  $Y_s$  é modulo de elasticidade da subestrutura,  $h_s$  é a espessura da subestrutura  $\nu_s$  é o coeficiente de Poisson da subestrutura.

As equações globais de movimento são então obtidas a partir da montagem das matrizes elementares dadas pelas Eqs. (28)-(32),

$$\mathbf{M}\ddot{\Psi} + \mathbf{C}\dot{\Psi} + \mathbf{K}\Psi - \mathbf{\Theta}\mathbf{v}_p = \mathbf{F} \quad (38)$$

$$\mathbf{C}_p \mathbf{v}_p + \mathbf{Q} + \mathbf{\Theta}^t \Psi = 0 \quad (39)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz global de massa ( $n_m \times n_m$ ),  $\mathbf{C}$  é a matriz global de amortecimento mecânico ( $n_m \times n_m$ ),  $\mathbf{K}$  é a matriz global de rigidez ( $n_m \times n_m$ ),  $\mathbf{\Theta}$  é a matriz global de acoplamento eletromecânico ( $n_m \times n_e$ ),  $\mathbf{C}_p$  a matriz global diagonal de capacitância ( $n_e \times n_e$ ),  $\Psi$  é o vetor global de coordenadas mecânicas ( $n_m \times 1$ ),  $\mathbf{F}$  é o vetor global das forças mecânicas ( $n_m \times 1$ ),  $\mathbf{Q}$  é o vetor global de saída de cargas elétricas ( $n_e \times 1$ ),  $\mathbf{v}_p$  vetor global de saída de voltagem ( $n_e \times 1$ ),  $n_e$  e  $n_m$  são, respectivamente, o número de graus de liberdade mecânico e elétrico da placa geradora. A matriz de amortecimento é assumida ser proporcional as matrizes de massa e rigidez,

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (40)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes de proporcionalidade da massa e rigidez.

A dimensão do vetor global das saídas das voltagens elétricas nas Eqs. (38) e (39) é igual ao numero de elementos finitos ( $n_e$ ) usado no modelo da malha da camada piezelétrica. Este é um caso geral, no qual assumimos que cada elemento finito eletromecânico tem seu próprio par de eletrodos, isolados um do outro. Apesar de esta condição ser correta matematicamente ela não é aceitável na prática, já que a camada piezocerâmica é coberta por eletrodos condutivos. Assim, uma matriz transformação pode ser determinada para modelar a presença de eletrodos condutivos. É assumido que todos os elementos do vetor  $\mathbf{v}_p$  são iguais, resultando em,

$$\mathbf{v}_p = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n_e} \end{Bmatrix}^t = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{Bmatrix}^t v_p \quad (41)$$

assim, a diferença de potencial elétrico entre estes dois eletrodos é simplesmente como um escalar  $v_p$ .

Definindo o vetor de acoplamento eletromecânico através da transformação da Eq. (41) obtêm-se,

$$\tilde{\Theta} = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}^t \Theta \quad (42)$$

onde a matriz global de acoplamento eletromecânico ( $n_m \times n_e$ ) foi transformada em um vetor ( $n_m \times 1$ ). Realizando a derivação no tempo da Eq. (39) e pré-multiplicando pelo vetor unitário  $\{1 \ 1 \ \dots \ 1\}$  de dimensão ( $1 \times n_e$ ) pode-se então obter a seguinte equação escalar,

$$C_p \dot{V}_p + \dot{Q} + \tilde{\Theta}^t \dot{\Psi} = 0 \quad (43)$$

onde  $C_p = \text{traço}(C_p)$ .

Utilizando a condição de contorno elétrica para um resistor elétrico no circuito externo obtêm-se as equações eletromecanicamente acopladas para um gerador unimorph,

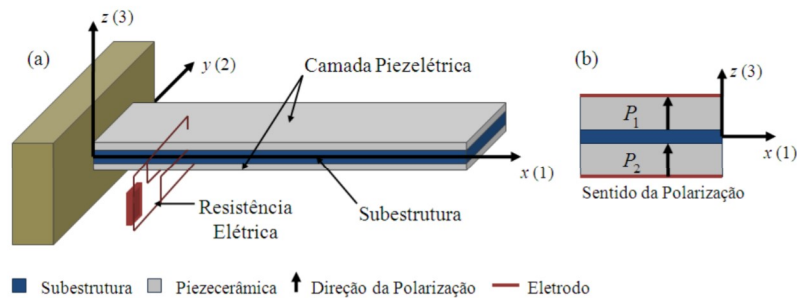
$$M\ddot{\Psi} + C\dot{\Psi} + K\Psi - \tilde{\Theta}V_p = F \quad (44)$$

$$C_p \dot{V}_p + \frac{V_p}{R_l} + \tilde{\Theta}^t \dot{\Psi} = 0 \quad (45)$$

Para a representação de um gerador bimorph as matrizes de massa, rigidez e de amortecimento devem ser modificadas, levando em conta a contribuição de uma nova camada de piezocerâmica. Para um gerador bimorph, as camadas piezocerâmicas podem ser conectadas em série ou em paralelo ao circuito externo. Para o caso em série as camadas piezocerâmicas são polarizadas em sentidos opostos, enquanto que no caso em paralelo no mesmo sentido. O caso aqui considerado é bimorph em paralelo, onde a capacitância equivalente é igual a duas vezes a capacitância de uma camada piezocerâmica e o vetor de acoplamento eletromecânico equivalente é igual a duas vezes o vetor de acoplamento de uma camada.

### 3. ESTUDO DE CASO

O gerador piezelétrico aqui analisado possui a configuração bimorph em paralelo, como representado na Fig. (2). Os resultados numéricos do modelo em EF foram verificados com sucesso em um trabalho anterior (De Marqui et al, 2009) a partir dos resultados analíticos e experimentais apresentados por Erturk e Inman (2009a) para um gerador bimorph série. Apesar de não representado na Fig. (1), o gerador considerado neste estudo de caso possui uma massa concentrada na sua extremidade livre. A representação de uma massa concentrada deve ser considerada na composição da matriz de massa e vetor forçante no problema de excitação de base.



**Figura 2 – Gerador piezelétrico bimorph em paralelo.**

As propriedades materiais e eletromecânicas para o PZT-5A e da subestrutura do gerador estão apresentadas na Tabs. (1) e (2), foram utilizadas nas simulações computacionais. Conforme descrito anteriormente, as propriedades das camadas piezocerâmicas no estado plano de tensões (requeridas no modelo aqui apresentado) podem ser obtidas das propriedades 3-D do material (Eqs. 36), apresentadas na Tab. (1) (www.efunda.com).

**Tabela 1 –Propriedades materiais e eletromecânicas do PZT-5A**

Permissividade, $\epsilon_{33}^s$ (nF/m)	7800
Permissividade no vácuo, $\epsilon_0$ ( nF/m)	$1800 \times \epsilon_0$
$c_{11}^E, c_{22}^E$ (GPa)	120,3
$c_{12}^E$ (GPa)	75,2

$c_{13}^E, c_{23}^E$ (GPa)	75,1
$c_{33}^E$ (GPa)	110,9
$c_{66}^E$ (GPa)	22,7
$e_{31}, e_{32}$ (C/m <sup>2</sup> )	-5,2
$e_{33}$ (C/m <sup>2</sup> )	15,9

**Tabela 2 - Geometria e propriedades materiais do gerador bimorph**

Comprimento da viga, L (mm)	100
Largura da viga, b (mm)	20
Espessura da subestrutura, h (mm)	0,5
Espessura do PZT, h <sub>p</sub> (mm)	0,4
Modulo de Young da subestrutura, Y <sub>s</sub> (GPa)	100
Modulo de Young do PZT, Y <sub>p</sub> (GPa)	66
Densidade de massa da subestrutura, ρ <sub>s</sub> (Kg/m <sup>3</sup> )	7165
Densidade de massa do PZT, ρ <sub>p</sub> (Kg/m <sup>3</sup> )	7800
Constante de proporcionalidade, α (rad/s)	14,65
Constante de proporcionalidade, β (s/rad)	10 <sup>-5</sup>

Assume-se aqui que o gerador é excitado a partir do movimento harmônico de sua base engastada,

$$w_B(t) = Y_0 e^{j\omega t} \quad (46)$$

sendo  $w_B$  o deslocamento da base,  $Y_0$  a sua amplitude de translação,  $j$  o número imaginário ( $j = \sqrt{-1}$ ),  $\omega$  a frequência de excitação e  $t$  o tempo. A FRF de voltagem é definida como a razão entre a saída de voltagem e a aceleração de base, também obtidas das Eqs. (44) e (45),

$$\frac{v_p(t)}{a_B(t)} = \frac{v_p(t)}{-\omega^2 Y_0 e^{j\omega t}} = j\omega \left( \frac{1}{R_l} + j\omega C_p \right)^{-1} \tilde{\Theta}^t \left( -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} + j\omega \left( \frac{1}{R_l} + j\omega C_p \right)^{-1} \tilde{\Theta} \tilde{\Theta}^t \right)^{-1} \mathbf{m}^* \quad (48)$$

onde  $\mathbf{m}^*$  é um vetor ( $n_m \times 1$ ) obtido do termo de excitação mecânica.

A FRF de corrente elétrica é definida dividindo-se a FRF de voltagem elétrica pela carga resistiva do circuito gerador. A FRF de potência elétrica vem do produto da FRF de voltagem e FRF de corrente, definida aqui como a razão da potência elétrica pela aceleração de base ao quadrado.

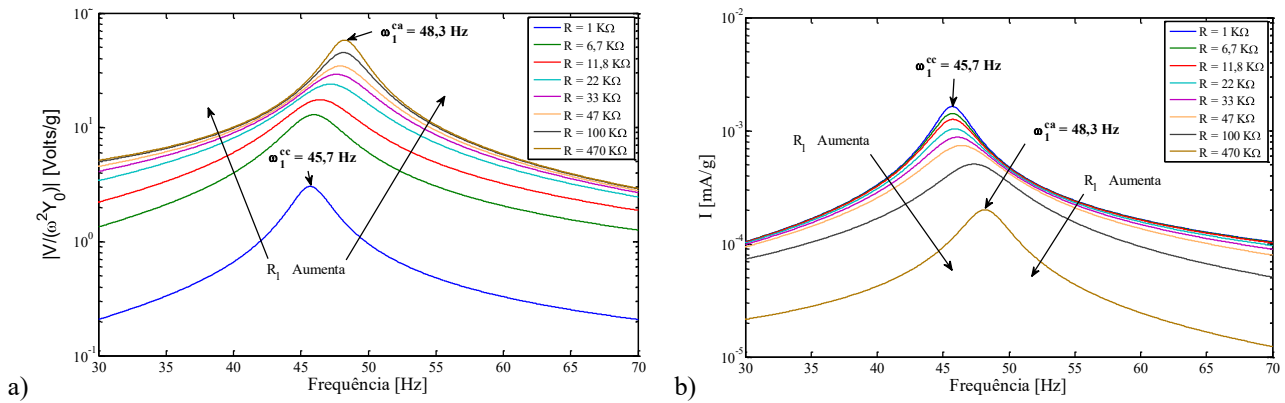
A partir das Eqs. (44) e (45) obtém-se também a FRF mecânica do sistema. Ela é definida neste trabalho como a relação entre a amplitude do deslocamento relativo na extremidade livre do gerador (em relação à base engastada) pelo deslocamento de entrada,

$$\frac{\mathbf{w}_{rel}}{Y_0 e^{j\omega t}} = \omega^2 \left( -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} + j\omega \left( \frac{1}{R_l} + j\omega C_p \right)^{-1} \tilde{\Theta} \tilde{\Theta}^t \right)^{-1} \mathbf{m}^* \quad (49)$$

Os módulos das FRFs de voltagem em torno do primeiro modo de vibrar do gerador bimorph em paralelo são apresentados na Fig. (3a) para oito valores de resistências externas. Aqui, a FRF é definida em termos da aceleração da gravidade ( $g$ ). Pode-se observar que a amplitude da voltagem de saída aumenta com o aumento da carga resistiva no domínio elétrico. É possível observar também que a frequência de ressonância aumenta varia com a variação da carga resistiva. A frequência de ressonância em curto circuito (ou próxima a condição de curto circuito) é de 45,7 Hz, enquanto a frequência de ressonância de circuito aberto é de 48,3 Hz.

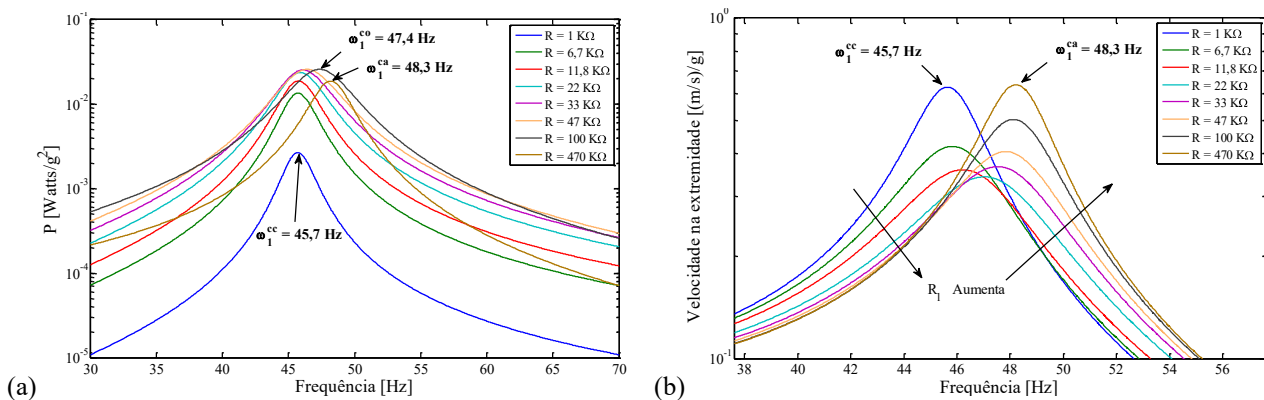
Os módulos das FRFs de corrente elétrica são apresentados na Fig. (3b) para várias cargas resistivas. O mesmo comportamento da frequência de ressonância é observado. Porém, no caso da corrente elétrica, a amplitude diminui com o aumento da carga resistiva. A máxima corrente é sempre obtida quando o sistema está na condição de curto circuito





**Figura 3 – FRFs de tensão para oito valores de cargas resistivas (a) e FRFs de corrente elétrica para oito valores de cargas resistivas (b).**

Os módulos das FRFs de potência elétrica são mostrados na Fig. (4a). A FRF de potência é obtida a partir da multiplicação das FRFs de tensão e corrente elétrica, que possuem comportamentos opostos (em relação à variação de amplitude) com a variação da carga resistiva. Assim, a FRF de potência não apresenta um comportamento monotônico, ou seja, sua amplitude nem sempre aumenta com o aumento da carga resistiva. Tal fato pode ser observado pelos cruzamentos das FRFs para uma mesma frequência de excitação. Novamente a frequência de ressonância do sistema varia desde a frequência de curto circuito até a frequência de circuito aberto. Entretanto, é possível observar que existe uma carga resistiva ótima que fornece a máxima saída elétrica. No caso apresentado, a amplitude aumenta até  $R_1 = 100\text{K}\Omega$  e volta a diminuir para  $R_1 = 470\text{K}\Omega$ .



**Figura 4 – FRFs de potência elétrica para oito valores de cargas resistivas (a) e FRFs mecânicas (velocidade) para oito valores de cargas resistivas (b).**

Na Fig. (4b) são apresentadas as FRFs mecânicas para o gerador. Estas FRFs são aqui definidas como a relação da velocidade relativa na extremidade livre (em relação à velocidade da base engastada). Esta modificação é obtida da Eq. (49) utilizando  $-jg/\omega(1+w_{\text{rel}}(L,t)/Y_0)$ . A frequência de ressonância do sistema varia novamente desde a frequência de curto circuito até a frequência de circuito aberto. Verifica-se aqui, porém, que a amplitude mecânica varia com a variação da carga resistiva. A amplitude diminui desde  $R_1 = 1\text{K}\Omega$  até  $R_1 = 22\text{K}\Omega$  (onde apresenta o seu valor mínimo) devido ao efeito shunt damping resistivo da geração piezelétrica de energia. A amplitude volta a aumentar com o aumento da carga resistiva acima  $R_1 = 22\text{K}\Omega$ , oscilando na frequência de ressonância de circuito aberto.

#### 4. CONCLUSÕES

Um modelo por elementos finito eletromecanicamente acoplado, baseado nas hipóteses de Kirchhoff, é apresentado para a representação de um gerador piezelétrico de energia. Uma carga resistiva é considerada no domínio elétrico do problema. Vale ressaltar, porém, que qualquer circuito externo com componentes lineares pode ser representado utilizando-se sua admitância equivalente no lugar da admitância do circuito resistivo aqui considerado. Este modelo havia sido verificado com sucesso anteriormente contra soluções analíticas e experimentais apresentadas na literatura para um gerador unimorph e bimorph em série. O comportamento eletromecânico de um gerador bimorph em paralelo foi investigado neste artigo. A conexão em paralelo dos pares de eletrodos cobrindo as camadas piezocerâmicas à carga resistiva favorece a maior saída de corrente elétrica, o que pode ser vantajoso para se obter maior potência elétrica, já

que geralmente a geração piezelétrica de energia fornece alta voltagem e baixa corrente. O comportamento eletromecânico do sistema (das saídas elétricas e mecânicas) foi analisado no domínio da frequência para o modo fundamental. Este modo de vibrar fornece a maior saída elétrica devido à maior amplitude de vibração e distribuição de deformação a ele associada.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e à FAPEMIG pelo financiamento parcial deste trabalho através do INCT-EIE.

## 6. REFERÊNCIAS

- Anton, S. R., and Inman, D. J., 2008, "Vibration Energy Harvesting for Unmanned Air Vehicles", Smart Structures and Materials 2008: Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems II, March 10-13, San Diego, CA.
- Anton, S. R., and Sodano, H. A., 2007, "A Review of Power Harvesting Using Piezoelectric Materials (2003–2006)", Smart Mater. Struct., 16, pp. R1–R21.
- Bent, A. A., 1994, "Piezoelectric Fiber Composites for Structural Actuation", PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- De Marqui Junior, C., Erturk, A. and Inman, D.J., 2009, "An Electromechanical Finite Element Model for Piezoelectric Energy Harvester Plates, Journal of Sound and Vibration, V. 327, pp 9-25.
- De Marqui, Jr., C., Erturk, A., and Inman, D.J., 2010, "Piezo-aero-elastic Modeling and Analysis of a Generator wingwith Continuous and Segmented Electrodes", Journal of Intelligent Material Systems and Structures (accepted).
- Dodemant, L. R., 2007, " Multifunctional Structures for Spacecraft: Embedded Lithium-ion Batteries". MSc Thesis Cranfield University.
- Erturk, A.; Inman, D. J., 2009a, "An Experimentally Validated Bimorph Cantilever Model for Piezoelectric Energy Harvesting from Base Excitations", Smart Materials and Structures 18 025009.
- Erturk, A., Renno, J. R. and Inman, D. J., 2009, "Modeling of Piezoelectric Energy Harvesting from an L-shaped Beam-Mass Structure with an Application to UAVs", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 20 529-544.
- Magotiaux, K. C., Sanders, B., and Sodano, H. A., 2008, Investigation of Energy Harvesting Small Unmanned Air Vehicle", Smart Structures and Materials 2008: Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems II", March 10-13, San Diego, CA.
- Pines, D.J. and Bohorquez, F., 2006, "Challenges Facing Future Micro-Air-Vehicle Development", Journal of Aircraft, 43, pp. 290-305.
- Priya, S., 2007, "Advances in Energy Harvesting using Low Profile Piezoelectric Transducers", Journal of Electroceramics, 19 167–184.
- Sodano, H. A., Park, G., and Inman, D. J., 2004, "Estimation of Electric Charge Output for Piezoelectric Energy Harvesting", Strain, 40, pp. 49–58.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluídos no seu trabalho.

# Finite Element Modeling and Analysis of a Piezoelectric Energy Harvester

Reinaldo Cesar, rcesar@sc.usp.br<sup>1</sup>

Carlos de Marqui Junior, demarqui@sc.usp.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup> University of Sao Paulo, Engineering School of Sao Carlos

**Abstract:** The goal in vibratoin based energy harvesting is to convert waste vibraton energy into electrical energy. Although other transduction mechanisms exist, piezoelectric transduction has received the most attention for vibration-based energy harvesting due to the large power densities and ease of applications of piezoelectric materials. An electromechanically coupled finite element model based on Kirchhoff assumptions is presented for energy harvesting. A bimorph in parallel harvester (plates with two piezoceramic layers bracketing a substructure layer) is investigated. A resistive electrical load is considered in the electrical domain. The excitation of the harvester is assumed to be due to the harmonica motion of its base in transverse direction. Electromechanically coupled frequency response functions are presented and the electromechanical behavior of the harvester is discussed.

**Palavras-chave:** Vibration; Piezoelectricity; Finite Element; Energy Harvesting