Dr. José Barros Neto

SOLUÇÕES LOCAIS DO PROBLEMA ELÍTICO

Tese apresentada ao concurso de Livre Docência da Cadeira de Análise Superior da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo

Rochester, New York - 1966

ÍNDICE

Introdução

Seja A um operador diferencial parcial de ordem $2m$, cujos coeficientes sejam funções infinitamente deriváveis e limitadas em R^n_+ e sejam $(B_j)_{0 \leq j \leq m-1}$ operadores-fronteira de ordem $m_j < 2m$, cujos coeficientes sejam funções infinitamente deriváveis e limitadas em R^{n-1}. Nessas condições, $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$ define um operador linear e contínuo do espaço $W^{2m,p}(R^n_+)$ em

$$L^p(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m - m_j - \frac{1}{p}, p}(R^{n-1})$$

(V. definições e notações no no. 1).

É natural procurar determinar sob que condições o operador $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$ possui um inverso à direita, limitado, pois a existência de tal inverso, determinaria a existência de soluções do problema ao limite

$$(1) \quad \begin{cases} A\,u = f \\ B_j u = g_j, \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

No caso $p = 2$, a transformação de Fourier é o instrumento apropriado para se abordar o problema acima (V. [12]). No caso $p \neq 2$, porém, tal método é, como se sabe, inadequado. Devemos utilizar técnicas mais elaboradas como a teoria dos operadores singulares integrais de Calderón e Zygmund.

No presente trabalho, demonstraremos que, se $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$ é um sistema elítico regular (V. definicão 1) então existe um inverso à direita local (V. teoremas 3 e 4). Tal fato acarretará que, se f é dada em $L^p(B_1^+)$ com suporte compacto contido na semi-bola unitária B_1^+ e se g_j é dada em $W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\sum_1)$, $0 \leq j \leq m-1$, com suporte compacto contido na bola unitária $\sum_1$ de R^{n-1}, existe uma solução u do problema (1), pertencente a $W^{2m,p}(B_1^+)$. Na realidade, demonstraremos mais do que isto, a saber, que a solução u pertence a $W^{2m,p}(B^+)$ onde B^+ é uma semi-bola qualquer em R^n_+ com centro na origem.

A existência local de soluções é um primeiro passo para se obter soluções globais do problema (1) num aberto de R^n com fronteira regular.

Como aplicações de nossos resultados, mencionaremos que êles podem ser utilizados em questões ligadas ao estudo de problemas elíticos não homogêneos, na linha dos trabalhos de Lions e Magenes [9], bem como ao estudo das realizações, com condições de contôrno gerais, no sentido de Browder [3], do problema $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$.

Apresentaremos, nêste trabalho, uma aplicação à chamada desigualdade a priori para soluções do problema elítico (V. no. 4). A desigualdade a priori, demonstrada por vários autôres, entre os quais citaremos Agmon, Douglis e Nirenberg [1] e Browder [5], constitui-se num instrumento fundamental para a determinação de soluções do problema elítico num aberto de R^n com fronteira regular.

Em [5], Browder formulou a desigualdade a priori da maneira a mais geral, demonstrando-a, porém, num caso mais particular, suficiente em muitas das aplicações. No entanto, é a formulação a mais geral da desigualdade a priori que deve ser utilizada na demonstração da existência de soluções do problema global num aberto de R^n com fronteira regular (V. [6]).

Demonstraremos, utilizando o teorema 3, como é possível reduzir o caso mais geral da desigualdade a priori, ao caso particular:

O plano dêste trabalho é o seguinte. No no. 1 apresentamos as notações a serem usadas, a definição dos espaços de Sobolev, os enunciados do teorema de imersão de Sobolev e do teorema de traço.

No no. 2, demonstramos o teorema 1 e seu corolário que estabelecem propriedades do produto de composição de um núcleo homogêneo, com uma função de L^p ou de $W^{k,p}$. O teorema 1 e seu corolário, demonstrados, essencialmente, no trabalho de Browder [3], página 137, constituem-se nos resultados básicos que empregaremos no no. 3 para demonstrar a existência local de soluções do problema ao limite não homogêneo.

O número 4 contém a aplicação à desigualdade a priori acima referida.

No número 5, generalizamos para o caso de operadores com coeficientes variáveis, os teoremas demonstrados nos números precedentes para operadores com coeficientes constantes.

Agadecemos ao Prof. F. E. Browder por várias sugestões e críticas. Nossos agradecimentos ao Prof. Leonard Gillman, Diretor do Departamento de Matemática da Universidade de Rochester que colocou à nossa disposição os recursos materiais necessários para a publicação dêsta tese.[1]

Finalmente, nossos agradecimentos ao Prof. Edson Farah por ter acolhido com simpatia a idéia de apresentarmos a presente tese ao concurso de Livre Docência da Cadeira de Analise Superior da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

Rochester, março de 1966.

[1] This work was supported, in part, by NSF Grant GP 5667.

1. Notações e preliminares

Seja R^n o espaço euclideano de dimensão n. Indicaremos por $x = (x_1,---,x_n)$ um elemento variável de R^n e por

$$|x| = \sqrt{x_1^2+---+x_n^2}$$

a distância de x à origem.

Por R_+^n indicaremos o semi-espaço

$$\{ x \in R^n : x_n > o \}$$

e por $\overline{R_+^n}$ indicaremos o fecho de R_+^n em R^n.

Em várias ocasiões usaremos a notação

$$x' = (x_1,---,x_{n-1})$$

para representar um elemento de R^{n-1} e a letra t para representar a variável x_n.

Seja $\rho > o$. A bola aberta de centro na origem e raio ρ é o conjunto

$$B_\rho = \{ x \in R^n : |x| < \rho \}$$

Por B_ρ^+ representaremos a semi-bola aberta

$$B_\rho^+ = \{ x \in R^n : |x| < \rho \quad e \quad x_n \geq o \} .$$

Representaremos por $\sum_\rho$ a intersecção de B_ρ com R^{n-1}.

Seja $p = (p_1,---,p_n)$ uma n-tupla de inteiros $\geq o$ e seja

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} = \frac{\partial^{p_1+---+p_n}}{\partial x_1^{p_1}---\partial x_n^{p_n}}$$

uma derivacão parcial de ordem $|p| = p_1+---+p_n$. Poremos, também,

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $D^p = D_1^{p_1}---D_n^{p_n}$.

Seja Ω um aberto de R^n. Seja $\mathcal{E}(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente deriváveis definidas em Ω e munido da sua topologia usual de espaço de Frechet. Seu dual, espaço das distribuições com suporte compacto em Ω é indicado por $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente deriváveis e com suporte compacto em Ω munido de sua topologia usual. Seu dual, espaço das distribuições em Ω é indicado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Espaços de Sobolev Seja $1 < p < +\infty$ e seja Ω um aberto em R^n. Representaremos por $W^{m,p}(\Omega)$, o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que as derivadas

$$D^\alpha u \quad , \quad |\alpha| \leq m$$

consideradas no sentido das distribuições pertencem a $L^p(\Omega)$. Munido da norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)} \quad ,$$

o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é de Banach e reflexivo.

Seja σ um número real tal que $0 < \sigma < 1$. Por definição, $W^{\sigma,p}(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n + p\sigma}} \, dx \, dy < +\infty \, .$$

Munido da norma

$$||u||_{W^{\sigma,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n + p\sigma}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

o espaço $W^{\sigma,p}(\Omega)$ é de Banach reflexivo.

Seja, agora, s um número real ≥ 0 e ponhamos

$$s = [s] + \sigma$$

onde $[s]$ indica o maior inteiro contido em s. Definiremos $W^{s,p}(\Omega)$ como sendo o espaço das funções $u \in W^{[s],p}(\Omega)$ tais que

$$D^{\alpha} u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \quad ,$$

qualquer que seja o indice de derivação α com $|\alpha| = [s]$. Em $W^{s,p}(\Omega)$ definiremos a norma

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = [s]} ||D^{\alpha} u||_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Com esta norma, $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.

Como os elementos de $W^{m,p}(\Omega)$ são funções de $L^p(\Omega)$, não é possivel, em geral, definir as restrições dessas funções e de suas derivadas à fronteira Γ de Ω. Nos casos em que Ω é um aberto com fronteira "regular" (por exemplo, Γ é variedade infinitamente derivável, de dimensão $n-1$ e tal que Ω esteja de um mesmo lado de Γ) é possivel definir tais restrições. Obtemos assim os chamados <u>teoremas de traço</u>.

Enunciaremos, a seguir, um dos teoremas de traço que utilizaremos mais abaixo. Sejam $\Omega = R_+^n$ e $\Gamma = R^{n-1}$. Indiquemos por $\mathcal{D}(\overline{R_+^n})$ o espaço das funções que sejam restricões ao semi-espaco $\overline{R_+^n}$ de funções de $\mathcal{D}(R^n)$. Pode-se demonstrar que $\mathcal{D}(\overline{R_+^n})$ é <u>denso</u> em $W^{m,p}(R_+^n)$ (V, [9], III). Ponhamos

$$\gamma_j = \frac{\partial^j}{\partial x_n^j} \quad , \qquad o \leq j \leq m-1 .$$

Indiquemos por $W_o^{m,p}(R_+^n)$ a aderência em $W^{m,p}(R_+^n)$ do espaço $\mathcal{D}(R_+^n)$. Temos, então, o seguinte teorema de traço.

<u>Existe uma aplicacão $\gamma = (\gamma_o, --- \gamma_{m-1})$ de $W^{m,p}(R_+^n) \longrightarrow \prod_{j=o}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$, com as seguintes propriedades:</u>

i) <u>$\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right|_{R^{n-1}}$, qualquer que seja $u \in \mathcal{D}(\overline{R_+^n})$, $o \leq j \leq m-1$;</u>

ii) <u>γ é uma aplicacão sôbre;</u>

iii) $\gamma^{-1}(o) = W_o^{m,p}(R_+^n)$.

Teorema de imersão de Sobolev. (V. [4]) Enunciaremos aqui o chamado teorema de Sobolev que utilizaremos nas secções 2 e seguintes.

Seja Ω um aberto de fronteira regular. Então,

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{j,r}(\Omega)$$

se

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} - \frac{m-j}{n}$$

Se

$$\frac{1}{p} - \frac{m-j}{n} < o, \text{ então}$$

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^j(\overline{\Omega}).$$

As imersões acima são continuas. Além disso, se Ω é limitado, a última imersão é compacta.

Seja

$$A = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$$

um operador diferencial parcial com coeficientes constantes $a_p \in \mathbb{C}$, homogêne e de gráu 2 m.

Diremos que A é elitico se existir uma constante C_o, dita constante de eliticidade, tal que

1) $\quad |a(\xi)| \geq C_o |\xi|^{2m}$

qualquer que seja $\xi = (\xi_1, ---- \xi_n) \in R^n$ com $\xi \neq 0$.

O polinômio homogêneo de gráu 2m

$$a(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \xi^\alpha$$

se chama polinômio caracteristico de A.

Suponhamos dados m operadores diferenciais

$$B_j = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta} D^\beta \quad , \quad o \leq j \leq m-1,$$

com coeficientes constantes e homogêneo de gráu $m_j < 2m$. Seja

$$b_j(\xi) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_{j,\alpha}\, \xi^{\alpha}$$

o polinômio caracteristico associado.

Definição 1. Diremos que o sistema $(A, (B_j)_{o \leq j \leq m-1})$ define um problema ao limite elitico e regular no semi-espaço R_+^n se as condições seguintes estiverem verificadas:

1) A é um operador elitico;

2) se $\xi' = (\xi_1, ---, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$ e se λ é uma variável complexa, a equação

$$a(\xi', \lambda) = 0$$

tem exatamente m raizes (contando-se as multiplicidades) com parte imaginária positiva[1];

3) seja C_o uma curva de Jordan, orientada e retificável, contendo tôdas as raizes de $a(\xi', \lambda) = 0$, para todo $|\xi'| = 1$; seja

$$p_{j,k}(\xi) = \int_{C_o} \frac{\lambda^j\, b_k(\xi', \lambda)}{a(\xi', \lambda)}\, d\lambda$$

com $o \leq j \leq m-1$ e $o \leq k \leq m-1$. Então a matriz

$$||p_{j,k}(\xi)||$$

---

(1) Se $n > 2$, a condição 2) é consequência da eliticidade de A.

é não singular.

2. O teorema básico

Seja $r \geq 1$ e suponhamos

H1) que $H(x_1,---x_n)$ e que $G(x_1,---,x_n)$ sejam funções homogêneas de gráu $r - n$, infinitamente deriváveis quando $x \neq o$

E que $P(x_1,---,x_n)$ seja um polinômio homogêneo de gráu $r - n$.

Ponhamos:

$$(2)\quad K(x) = \begin{cases} H(x) + \log |x|\, P(x) & \text{se } r \geq n \\ G(x) & \text{se } r < n\,. \end{cases}$$

Podemos escrever.

$$K(x) = \begin{cases} |x|^{r-n}\, S(x) + \log |x|\, P(x) & \text{se } r \geq n \\ |x|^{r-n}\, T(x) & \text{se } r < n\,, \end{cases}$$

onde $S(x)$ e $T(x)$ são funções homogêneas de gráu zero.

Se $x \neq 0$, um cálculo fácil nos mostra que:

$$D^{\alpha} K(x) = \begin{cases} |x|^{r-n-|\alpha|}\, S_{\alpha}(x) + \log |x|\, P_{\alpha}(x) & \text{se } r \geq n \\ |x|^{r-n-|\alpha|}\, T_{\alpha}(x) & \text{se } r < n \end{cases}$$

onde $S_{\alpha}(x)$ e $T_{\alpha}(x)$ são funções homogêneas de gráu o e $P_{\alpha}(x)$ é um polinômio homogêneo de gráu $r - n - |\alpha|$ se $|\alpha| \leq r - n$, indênticamente zero se $|\alpha| > r - n$.

Além disso, se $|\alpha| = r - n + 1$, o termo contendo o logaritmo é absorvido pelo primeiro termo.

Observemos aínda que, se $|\alpha| < r$, $D^{\alpha}K$ é, em ambos os casos, uma funcão localmente integrável.

Suponhamos que

H2) se $|\alpha| = r - 1$, então $D^{\alpha}K$ é uma função homogênea de gráu $1 - n$.

Decorre das observações feitas acima que, se a hipótese se H1) estiver verificada e se $n > 1$, então a hipótese H2) também estará verificada. Se, porém, $n=1$, tál fato não é necessariàmente verdadeiro.

Como consequência das observações precedentes, demonstremos que, se $|\alpha| = r$,

$$D^{\alpha} K = |x|^{-n} \; S_{\alpha}(x)$$

e

$$\int_{S_1} S_{\alpha}(x)\, d\, w\, (x) = 0$$

onde S_1 representa a esfera unitária de centro na origem e raio 1 e $d\,w$ o elemento de área.

De fato, é suficiente verificar que a integral é nula. Ponhamos,

$x = r\,\xi$, $o < r < +\infty$, $|\xi| = 1$ e

$$d\,x = r^{n-1}\, dr\, dw\,(\xi).$$

Sejam $\epsilon, R > 0$ com $\epsilon < R$ e escrevamos

$$\int_{\epsilon<|x|<R} D^{\alpha}K\,(x)\, dx = \left(\int_{\epsilon}^{R} r^{n-1}\, d\,r\right) \cdot \left(\int_{S_1} S_{\alpha}\,(\xi)\, dw\,(\xi)\right)$$

A seguir, ponhamos $D^{\alpha}=D_j\, D^{\beta}$ com $|\beta| = r - 1$.

A integral do primeiro membro é igual a

$$\int_{\epsilon<|x|<R} D_j D^\beta K \, dx = \int_\epsilon^R \int_{S_1} D_j D^\beta K \cdot r^{n-1} \, dr \, dw(\xi) =$$

$$= \int_\epsilon^R \int_{S_1} \frac{\partial}{\partial r} (D^\beta K) \, \xi_j \, r^{n-1} \, dr \, dw(\xi) =$$

$$= \int_{S_1} [R^{n-1}(D^\beta K)(R\xi) - \epsilon^{n-1}(D^\beta K)(\epsilon\xi)] \, \xi_j \, dw(\xi) = 0$$

pois, por hipótese, $D^\beta K$ é homogênea de gráu $1 - n$.

Podemos, agora, enunciar o seguinte.

Teorema 1. Suponhamos $K(x)$ definido pela relação (2) com $G(x)$, $H(x)$ e $P(x)$ verificando as hipóteses H1) e H2). Nessas condições, se $f \in L^p(R^n)$ e tem suporte contido na bola unitária, então

$$u(x) = (K * f)(x) = \int K(x-y) \, f(y) \, dy$$

pertence a $W^{r,p}(B)$, qualquer que seja a bola aberta $B \subset R^n$ e,

(3) $$\|u\|_{W^{r,p}(B)} \leq C_p \|f\|_{L^p(B_1)}$$

onde C_p depende apenas de n, p, K, B e B_1.

Demonstração. Se $|\alpha| < r$, já observamos que $D^\alpha K$ é localmente integrável de modo que temos

$$D^\alpha u = (D^\alpha K * f)(x) = \int D^\alpha K(x-y) \, f(y) \, dy.$$

Utilizando-se a desigualdade integral de Minkowsky, obtemos majorações da norma de $D^\alpha u$ em $L^p(B)$ em termos da norma de f em $L^p(B_1)$.

Se $|\alpha| = r$, não podemos derivar dentro do símbolo de integral, pois

$$D^{\alpha} K = |x|^{-n} S_{\alpha}(x)$$

não é localmente integrável. A demonstração de que, ainda nêste caso,

$$D^{\alpha} u \in L^{p}(B),$$

com norma em $L^p(B)$ majorada pela norma de f em $L^p(B_1)$, utiliza a teoria dos operadores singulares integrais de Calderón e Zygmund (V. [7]).

Como já observamos, anteriormente, $D^{\alpha}K = |x|^{-n} S_{\alpha}(x)$ é uma função homogênca de gráu - n, $S_{\alpha}(x)$ é homogênea de gráu zero, infinitamente derivável na esfera unitária e sua integral nessa esfera é igual a zero.

Nessas hipóteses, consideremos o operador integral

$$(T_{\epsilon,\alpha} f)(x) = \int_{|y| \geq \epsilon} (D^{\alpha} K)(y) \; f(x - y) \; dy .$$

De acôrdo com os resultados de Calderón e Zygmund (V. referência acima) pode-se demonstrar que

1) $T_{\epsilon,\alpha} : L^{p}(R^{n}) \longrightarrow L^{p}(R^{n})$

e

2) $T_{\epsilon,\alpha}$ converge para um operador $T_{\alpha} \in \mathcal{L}(L^{p}(R^{n}), L^{p}(R^{n}))$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Temos então que

$$T_{\alpha} f = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} T_{\epsilon,\alpha} f \in L^{p}(R^{n}).$$

A seguir, demonstremos que

$$D^{\alpha} u = T_{\alpha} f + c_{\alpha} f$$

onde c_{α} é uma constante.

Desta última relação e de 1) e 2) obteremos que $D^{\alpha} u \in L^p(B)$ e que

$$||D^{\alpha} u||_{L^p(B)} \leq C \; ||f||_{L^p(B_1)} .$$

Basta, pois, demonstrarmos a relação acima (V. [3], pg. 140). Pondo $D^{\alpha} = D_j \, D^{\beta}$, onde $|\beta| = r - 1$, é suficiente demonstrarmos que

$$(D^{\beta} u, \; D_j \, \varphi) = (T_{\alpha} \, f, \; \varphi) + c_{\alpha}(f, \; \varphi)$$

qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$.

Como $|\beta| = r - 1$, temos:

$$(D^{\beta} \; u, \; D_j \; \varphi) = \int\int D^{\beta} K \; (x-y) \; f(y) \, \overline{D_j \varphi} \; (x) \; dx \; dy =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int \left\{ \int_{|x-y| \geq \epsilon} D^{\beta} K \; (x-y) \; f(y) \; dy \right\} \overline{D_j \; \varphi} \; (x) \; dx \; .$$

Pelo teorema de Fubini, temos que:

$$(D^{\beta} u, D_j \varphi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int \left\{ \int_{|x-y| \geq \epsilon} D^{\beta} K(x-y) \; \overline{D_j \varphi} \; (x) \; dx \right\} f(y) \; dy \; .$$

Integrando por partes vem:

$$\int_{|x-y| \geq \epsilon} D^{\beta} K(x-y) \; \overline{D_j \varphi} \; (x) \; dx = \int_{|x-y| \geq \epsilon} D^{\alpha} K(x-y) \; \overline{\varphi}(x) \; dx \; +$$

$$+ \epsilon^{n-1} \int_{S_1} D^\beta K(\epsilon\xi)\, \overline{\varphi}(y+\epsilon\xi)\, \xi_j \, dw(\xi)$$

Como $D^\beta K$ é homogênea de gráu $1-n$, é fácil verificar, por passagem ao limite, que a última integral tende para

$$\overline{\varphi}(y) \int_{S_1} D^\beta K(\xi)\, \xi_j \, dw(\xi) = c_\alpha \cdot \overline{\varphi}(y)$$

quando $\epsilon \to 0$.

Por outro lado, utilizando-se o teorema de Fubini, temos

$$\int \left\{ \int_{|x-y|\geq\epsilon} D^\alpha K(x-y)\, \overline{\varphi}(x)\, dx \right\} f(y)\, dy =$$

$$= \int \left\{ \int_{|x-y|\geq\epsilon} D^\alpha K(x-y)\, f(y)\, dy \right\} \overline{\varphi}(x)\, dx$$

e esta última integral converge para

$$(T_\alpha f, \varphi)$$

quando $\epsilon \to 0$.

Concluimos dos dois últimos resultados que

$$(D^\alpha u, \varphi) = (D^\beta u, D_j \varphi) =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int \left\{ \int_{|x-y|\geq\epsilon} D^\beta K(x-y)\, \overline{D_j\varphi}(x)\, dx \right\} f(y)\, dy =$$

$$= (T_\alpha f, \varphi) + (c_\alpha f, \varphi)$$

o que completa a demonstração do teorema.

Corolário. Mesmas hipóteses que no teorema 1. Se $f \in W^{k,p}(R^n)$ e tem suporte contido na bola unitária, então

$$u(x) = (K * f)(x)$$

pertence a $W^{r+k,p}(B)$, qualquer que seja a bola aberta B. Além disso,

$$||u||_{W^{r+k,p}(B)} \leq c_p \, ||f||_{W^{k,p}(B_1)}$$

onde c_p depende apenas de n, k, p, K, B e B_1.

A demonstração do corolário é essentialmente a mesma que a do teorema. Notemos que, nêste caso, a função f é mais regular no sentido de que suas derivadas de ordem $\leq k$ pertencem a L^p. Tal fato acarreta um "ganho" de k derivadas na regularidade da função u.

A teoria das equações diferenciais parciais elíticas nos conduz, em várias ocasiões, a situações onde podemos utilizar o teorema 1 e seu corolário.

Uma delas está ligada à determinação de soluções fundamentais de operadores elíticos homogêneos, com coeficientes constantes, e ao estudo de propriedades das mesmas.

Definição 2. Diremos que uma distribuição E é solução fundamental de A operador elítico homogêneo de gráu $2m$ com coeficientes constantes se

$$A\,E = \delta \,.$$

É sabido que todo operador diferencial com coeficientes constantes (não necessàriamente homogêneo nem tampouco elítico) possui solução fundamental. Teoremas de existência foram estabelecidos por diversos autores, entre outros Hormander [8], Malgrange [10], Trèves [14], etc.

No caso em que A é elítico, temos o seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em Browder [3].

Proposição 1. Seja A elítico, com coeficientes constantes e homogêneo de gráu $2m$. Existe uma solução fundamental $E(x)$, função localmente somável em R^n e tal que:

i) se $2m < n$, $E(x)$ é homogênea de gráu $2m-n$ e função infinitamente derivável em $R^n - \{0\}$;

ii) se $2m \geq n$, $E(x) = F(x) + \log |x| \, P(x)$, onde $F(x)$ é uma função homogênea de gráu $2m - n$, infinitamente derivável em $R^n - \{0\}$ e $P(x)$ um polinômio homogêneo de gráu $2m - n$.

iii) as derivadas, na esfera unitária, de $E(x)$ em i), de $F(x)$ em ii) e os coeficientes de $P(x)$ são limitados uniformemente e tal limitação depende apenas dos coeficientes de A, de n e do recíproco c_o^{-1} da constante de eliticidade.

Tal resultado, juntamente com o teorema 1, é usado para se obter soluções em $W^{2m,p}$ de

$$A\,u = f$$

onde f é dada em $L^p_c(R^n)$.

Outra situação em que utilisamos o teorema está ligada à determinação de soluções do problema ao limite

$$(4) \quad \begin{cases} A\,u = 0 \\ B_j\,u = g_j\,, \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

onde supomos que o sistema $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$ define um problema ao limite elítico e regular no semi-espaço R_+^n, no sentido da definição 1.

No caso em que as funções $g_j \in \mathcal{D}(R^{n-1})$ a existência de solução local do problema (4) se encontra demonstrada em Agmon, Douglis e Nirenberg [1] e em Browder [5]. No primeiro trabalho, os autores se utilisam dos núcleos de Poisson para construir a solução local. Em [5], utilisando a transformação de Fourier com relação às variáveis $x' = (x_1, ---, x_{n-1})$, Browder reduz o problema (4) à solução de um problema ao limite de equações diferenciais ordinárias. A seguir, a transformação inversa de Fourier com relação a x' nos dá não sòmente uma solução do problema, mas também uma representação dessa solução como soma de produtos de composição de núcleos appropriados com as funções $g_j, 0 \leq j \leq m-1$.

Em ambos os trabalhos é fácil verificar que, os núcleos obtidos, podem ser representados na forma (2) o que permite a utilisação do teorema 1.

No número seguinte, iremos aprofundar os resultados de Agmon-Douglis-Nirenberg e Browder, determinando, inicialmente, soluções locais em $W^{2m,p}$ do problema (4) supondo as funções g_j, $0 \leq j \leq m-1$, dadas em $W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$ e com suporte compacto.

Estabeleceremos majorações de u na norma $W^{2m,p}$ em termos das normas $W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}$ das funções g_j, $0 \leq j \leq m-1$. A seguir, determinaremos soluções locais do problema não homogêneo

$$(5) \quad \begin{cases} A\,u = f \\ \\ B_j u = g_j \quad , \qquad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

onde $f \in L^p(R^n_+)$ e tem suporte compacto em $\overline{R^n_+}$ e $g_j \in W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$, $0 \leq j \leq m-1$, com suporte compacto em R^{n-1}. Estabeleceremos também a continuidade de u em função de f e $(g_j)_{0\leq j\leq m-1}$. Utilisaremos, além da proposição 1 e do teorema 1, o teorema de traço nos espaços de Sobolev (V. § 1).

3. A existência local de soluções nos espaços de Sobolev.

Suponhamos que $(A, (B_j)_{0\leq j\leq m-1})$ define um problema ao limite elítico a regular no semi-espaço R^n_+.

Dos trabalhos [1] e [5] acima citados, resulta que existem núcleos $K_j(x)$ com as seguintes propriedades:

i) <u>$K_j(x)$ pode ser posto na forma (2) com $G_j(x)$ e $H_j(x)$</u>

funções homogêneas de gráu $m_j - n + 1$, $P_j(x)$ polinômio homogêneo de mesmo gráu e verificando as hipóteses H1) e H2).

ii) se $g_j(x') \in \mathcal{D}(R^{n-1})$, então

$$u(x',t) = \sum_j \int K_j(x' - y', t)\, g_j(y')\, dy'$$

é uma solução (infinitamente derivável) do problema (4).

Suponhamos, agora, que $g_j \in W^{2m-m_j-\frac{1}{p},\,p}(R^{n-1})$ e tenham suporte compacto na bola unitária de R^{n-1}. As integrais acima estão bem definidas e queremos demonstrar que, qualquer que seja B semi-bola aberta em R^n_+ de centro na origem, $u \in W^{2m,p}(B)$.

De fato, indicando por $u_j(x',t)$ a integral acima, basta demonstrar que $u_j \in W^{2m,p}(B)$. Como $g_j \in W^{2m-m_j-\frac{1}{p},\,p}(R^{n-1})$ resulta dos teoremas de traço nos espaços de Sobolev que existe uma função $h_j(x',t) \in W^{2m-m_j,p}(R^n_+)$ com suporte contido na semi-bola unitária, tal que

$$h_j(x',0) = g_j(x)$$

e

$$||h_j||_{W^{2m-m_j,p}(R^n_+)} \leq c.||g_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})} .$$

Escrevamos

$$K_j(x' - y', t)\, g_j(y') = K_j(x' - y',t)\, h_j(y', 0) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left\{K_j(x' - y', t - s)\, h_j(y', s)\right\} ds =$$

$$= -\int_0^\infty D_n K_j(x'-y',t-s)\, h_j(y',s)ds + \int_0^\infty K_j(x'-y',t-s)D_n h_j(y',s)ds.$$

Donde,

$$u_j(x',t) = \int_0^\infty \int_{R^{n-1}} K_j(x'-y',t-s)D_n h_j(y',s)\, dy'\, ds \;-$$

$$- \int_0^\infty \int_{R^{n-1}} D_n K_j(x' - y', t - s)\, h_j\, (y',s)\, dy'\, ds =$$

$$= K_j * D_n h_j - D_n K_j * h_j$$

Pelo corolário do teorema 1 resulta que estas duas últimas funções pertencem a $W^{2m,p}(B)$ e que

$$||u_j||_{W^{2m,p}(B)} \leq C.\, ||h_j||_{W^{2m-m_j,p}(R^n_+)} \leq C||g_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})}$$

Observemos, para finalizar, que $u = \sum_{j=o}^{m-1} u_j$ é solução (no sentido das distribuições) de (4). Isto se verifica aproximando-se cada g_j por funções de $\mathcal{D}(R^{n-1})$ e utilisando-se ii).

Podemos, pois, resumir os resultados acima no seguinte

Teorema 2. Se $(A;(B_j)_{o\leq j\leq m-1})$ define um problema ao limite elítico e regular em R^n_+, existem núcleos $K_j(x)$, $o \leq j \leq m - 1$, do tipo (2) e verificando as hipóteses H1) e H2). Se $g_j(x')$ é um dado elemento de $W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}\,(R^{n-1})$ com suporte compacto na bola unitária de R^{n-1}, então

$$u(x',t) = \sum_{j=o}^{m-1} \int K_j(x'-y',t)\, g_j\, (y')\, dy'$$

pertence a $W^{2m,p}(B^+)$ qualquer que seja a semi-bola aberta B^+ de R^n_+, é solução de (4) e

$$||u||_{W^{2m,p}(B^+)} \leq C. \sum_{j=o}^{m-1} ||g_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})},$$

com C uma constante dependendo apenas de n, p, K_j, B^+ e Σ_1.

O caso não homogêneo

Seja B^+_1 a semi-bola unitária de R^n_+ e Σ_1 a bola unitária em R^{n-1}. Seja $f \in L^p(R^n_+)$ com suporte contido em B^+_1 e seja $g_j \in$

$\in W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$ com suporte contido em $\sum_1$.

Como já observamos, a função

$$v = E * f$$

onde E é solução fundamental de A, é solução de $A v = f$.

A seguir, seja $\alpha \in \mathcal{D}(R^n)$ tal que $\alpha = 1$ na bola unitária B_1 e $\alpha = 0$ no complemento da bola B_2. Ponhamos

$$h_j = B_j(\alpha v) \Big|_{R^{n-1}} .$$

Como $v \in W^{2m,p}(R^n)$, decorre do teorema de traço que $h_j \in W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$. Além disso, em virtude da escolha de α, as funções h_j têm suporte contido na bola $\sum_2$.

Pelo teorema 2, existe uma solução w do problema

$$\begin{cases} A w = 0 \\ B_j w = g_j - h_j , \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Temos aínda que:

$$||w||_{W^{2m,p}(B^+)} \leq C. \sum_{j=0}^{m-1} ||g_j - h_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})} .$$

Ponhamos $u = v + w$. É claro, em virtude da escolha de α, que u é solução de

$$\begin{cases} A u = f \\ B_j u = g_j , \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

na <u>semi bola</u> B_1^+.

Alem disso, temos:

$$||u||_{W^{2m,p}(B_1^+)} \leq ||v||_{W^{2m,p}(B_2^+)} + ||w||_{W^{2m,p}(B_2^+)} \leq$$

$$\leq C \{ ||f||_{L^p(B_1^+)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||g_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma_1)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||h_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma_2)} \}$$

Da definição de h_j resulta, usando-se uma vez mais o teorema de traço que

$$||h_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma_2)} \leq C||\alpha v||_{W^{2m,p}(B_2^+)} \leq C'||v||_{W^{2m,p}(B_2^+)} \leq C''||f||_{L^p(B_1^+)}$$

Finalmente, obtemos

$$||u||_{W^{2m,p}(B_1^+)} \leq C\{||f||_{L^p(B_1^+)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||g_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma_1)}\}$$

onde C independe de f e de $(g_j)_{0 \leq j \leq m-1}$.

Podemos resumir os resultados acima no

<u>Teorema 3. Mesmas hipóteses que no teorema 2 . Se $f \in L^p(R_+^n)$ e tem suporte contido na semi-bola B_1^+, se $g_j \in W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$, $0 \leq j \leq m-1$, e tem suporte contido em Σ_1, existe uma função u pertencente a $W^{2m,p}(B^+)$ qualquer que seja a semi-bola B^+ de R_+^n, tal que u é solução de (5) em B_1^+ e tal que</u>

$$\underline{||u||_{W^{2m,p}(B_1^+)} \leq C\{||f||_{L^p(B_1^+)} + \sum_{j=0}^{m-1} ||g_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma_1)}\}}$$

onde C independe de f e de $(g_j)_{0 \leq j \leq m-1}$.

Em outras palavras, o teorema precedente estabelece que $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$ considerado como operador linear e contínuo de

$$W^{2m,p}(B_1^+) \longrightarrow L^p(B_1^+) \times \prod_{j=0}^{m-1} W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma_1)$$

possui um inverso à direita limitado.

4. Uma aplicação.

No estudo de problemas ao limite elíticos, um dos métodos usados com grande sucesso na determinação da existência e regularidade de soluções é o que faz uso da chamada desigualdade a priori.

É sabido que se $(A, (B_j)_{0\leq j\leq m-1})$ define um problema elítico regular em R^n_+ (V. definição 1) então a condição seguinte (desigualdade a priori) esta verificada

A_p) seja $p_1 > 1$ e seja u uma função pertencente a $W^{2m,p_1}(B_2^+)$, tal que

$$B_j\, u \Big|_{R^{n-1}} = 0 \quad , \quad 0 \leq j \leq m-1$$

e que $Au \in L^p(B_2^+)$ onde $1 < p < +\infty$. Então, u pertence a $W^{2m,p}(B_1^+)$ e existe uma constante c_p independente de p_1 e de u, tal que

$$||u||_{W^{2m,p}(B_1^+)} \leq c_p \{||Au||_{L^p(B_2^+)} + ||u||_{L^p(B_2^+)}\} .$$

Tal fato foi demonstrado por vários autores, entre ontros Browder, no trabalho [5], no qual considera o caso mais geral de um operador elitico A, não necessàriamente homogêneo, com coeficientes variáveis suficientemente deriváveis, definidos num aberto Ω de R^n com fronteira regular Γ e operadores-fronteira B_j, $0 \leq j \leq m-1$, com coeficientes variáveis suficientemente deriváveis e definidos numa vizinhança de Γ.

A demonstração do caso geral se faz reduzindo-se ao caso de operadores homogêneos com coeficientes constantes considerados em semi-bolas de R^n_+. Tal método de redução é bem conhecido na teoria das equações diferenciais parcais e, por isso mesmo, não será abordado nêste trabalho. Contudo, exporemos parte dêsse método quando, no número seguinte, generalizaremos o teorema 3, ao caso de operadores homogêneos eliticos e com coeficientes variáveis.

Queremos, porém, ressaltar que, no trabalho citado, Browder estabelece a desigualdade a priori, no caso mais simples em que $p = p_1$, o que é suficiente em muitas aplicações. Mas, em certos casos, como na demonstração da existência de solução do problema

$$\begin{cases} Au = f \\ B_j u = 0 \quad , \quad 0 \leq j \leq m - 1 \end{cases}$$

num aberto limitado Ω com fronteira regular, o fato de podermos utilizar a desigualdade a priori na sua formulação mais geral acima, simplifica consideràvelmente as demontrações (V. [2] e [6]).

Nosso objetivo é demonstrar como, utilizando-se o teorema 3 e resultados conhecidos sôbre a regularização de soluções do problema ao limite elítico, podemos reduzir o caso $p \neq p_1$, ao caso $p = p_1$, no enunciado de A_p) acima.

De fato, é bastante considerar $p_1 < p$ pois, se $p_1 \geq p$, não há nada a demostrar, tendo em vista que a função considerada está definida num domínio limitado.

Suponhamos, então, que $u \in W^{2m,p_1}(B_2^+)$ seja tal que $B_j u = 0$ em R^{n-1}, $0 \leq j \leq m - 1$, e que $Au \in L^p(B_2^+)$.

1. Se $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{n} > 0$, então pelo teorema de imersão de Sobolev, temos que

$$u \in W^{2m,p_1}(B_2^+) \subset W^{2m-1,\, p_1'}(B_2^+)$$

onde

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{n}$$

Temos dois casos a considerar:

a) $p'_1 < p$ ou b) $p'_1 \geq p$

Suponhamos $p'_1 < p$ e seja $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ tal que $\varphi = 1$ em B_1 e $\varphi = 0$ no complemento de B_2. Ponhamos $w = \varphi\, u$. É facil ver que $w \in W^{2m-1,\, p'_1}(B_2^+)$. Como

$$B_j(w) = \varphi \cdot B_j(u) + \sum_{|\beta| \leq m_j - 1} c_{\alpha\beta}\, D^{\alpha}\varphi \cdot D^{\beta} u,$$

$B_j(u) = 0$ em R^{n-1} e $u \in W^{2m-1, p'_1}(B_2^+)$, segue-se pelo teorema do traço que

$$g_j = B_j\, w\Big|_{R^{n-1}} \in W^{2m-m_j-\frac{1}{p'_1},\, p'_1}(\Sigma_2).$$

Por outro lado,

$$Aw = \varphi\ Au + \sum_{|\beta| \leq 2m-1} C_{\alpha\beta}\, D^{\alpha}\varphi\ D^{\beta}u\ .$$

Como, em virtude das hipóteses acima,

$$Au \in L^{p}(B_2^+) \subset L^{p'_1}(B_2^+)$$

e

$$D^{\beta} u \in L^{p'_1}(B_2^+),\quad |\beta| \leq 2m - 1$$

segue-se que $f = A\, w \in L^{p'_1}(B_2^+)$.

Pelo teorema 3, existe $u_o \in W^{2m, p'_1}(B_2^+)$, solução de

$$\begin{cases} A\,u_o = f \\ B_j u_o = g_j \end{cases}, \qquad 0 \leq j \leq m-1 ,$$

em B_2^+. E, podemos supor que u_o seja nula numa vizinhança do complemento de Σ_2, na fronteira de B_2^+, pois f se anula numa tal vizinhança e as funções g_j tem suporte compacto contido em Σ_2. Temos a seguir que

$$\begin{cases} A(w - u_o) = 0 \\ B_j(w - u_o) = 0 \end{cases}, \qquad 0 \leq j \leq m-1$$

e podemos aplicar aqui os teoremas de regularidade para soluções de um problema ao limite elítico (V. [1] e [11]). Resulta que $w - u_o$ solução do problema homogêneo acima, é função infinitamente derivável em $\overline{B_2^+}$, isto é, $w - u_o \in \varepsilon(\overline{B_2^+})$. Em particular,

$$w - u_o \in W^{2m,p_1'}(B_2^+),$$

donde obtemos $w \in W^{2m,p_1'}(B_2^+)$ e, por conseguinte,

$$u \in W^{2m,p_1'}(B_1^+) .$$

No segundo caso, se $p_1' \geq p$ basta substituir na demonstração acima, p_1' por p e obteremos

$$u \in W^{2m,p}(B_1^+) .$$

Em ambos os casos, repetindo-se, eventualmente, o argumento acima exposto um número finito de vêzes e reduzindo-se a vizinhança da origem, concluiremos que u pertencerá a $W^{2m,p_1^*}(B^+_\rho)$ com $\rho \leq 1$ e $p_1^* \geq p$.

2. Se $\frac{1}{p'} - \frac{1}{n} \leq 0$, utilizando-se o teorema de imersão de Sobolev, é fácil ver que podemos escolher $p_1' = p$ e aplicar o mesmo argumento exposto no número 1, o que completará a demonstração.

5. <u>Operadores com coeficientes variáveis.</u>

Até o presente, temos considerado ùnicamente o caso de operadores diferenciais homogêneos e com coeficientes constantes. Se por um lado a estrutura dos operadores é mais simples, por outro lado é nêste caso que os teoremas fundamentais de existência e representação de soluções devem ser estabelecidos.

O caso geral é obtido dêste pelo chamado <u>método de perturbação</u> que consiste em decompor o operador com coeficientes variáveis, na soma de um operador com coeficientes constantes, mais um termo de perturbação que, em virtude da regularidade dos coeficientes, poderá ser considerado suficientemente pequeno, desde que nos situemos numa vizinhança pequena da origem.

Suponhamos que

$$A = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \; D^\alpha$$

seja um operador diferencial, com coeficientes $a_p(x)$ definidos, limitados e suficientemente deriváveis em B^+. Suponhamos que A é <u>uniformemente elítico</u> em B^+, isto é que tenhamos

$$\underline{|a(x,\xi)| \geq c_o \; |\xi|^{2m}} \quad ,$$

<u>para todo $\xi = (\xi_1, ---, \xi_n) \in R^n, \xi \neq 0$.</u>

Sejam dados m operadores diferenciais $(B_j)_{0 \leq j \leq m-1}$ tais que

$$B_j = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta}(x) \; D^\beta \quad ,$$

$m_j < 2m$, os coeficientes $b_{j,\beta}(x)$ estão definidos e são suficientemente deriváveis e limitados numa vizinhança de $\Sigma = B^+ \cap R^{n-1}$.

Supomos aínda que $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$ define um problema ao limite elitico e regular.

Ponhamos

$$A_o = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(0)\ D^\alpha$$

e

$$B_{j,o} = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta}(0)\ D^\beta, \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad .$$

Queremos determinar uma solução do problema

$$(6) \quad \begin{aligned} Au &= A_o u + (A - A_o)u = f \\ B_j u &= B_{j,o} u + (B_j - B_{j,o})u = g_j \quad , \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{aligned}$$

onde $f \in L^p(R^n_+)$ com suporte contido em B^+ e $g_j \in W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$ com suporte contido em Σ .

Indiquemos por R o inverso à direita de $(A_o, (B_{j,o})_{0 \leq j \leq m-1})$ como operador de

$$W^{2m,p}(B^+) \longrightarrow L^p(B^+) \times \prod_{j=o}^{m-1} W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}\ (\Sigma)\ .$$

Como já observamos (V. teorema 2), R existe e é limitado.

Consideremos, agora, o sistema de equações

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi + (A-A_o)\, R\, (\varphi, (\psi_j)) = f \\ \psi_j + (B_j - B_{j,o})\, R\, (\varphi, (\psi_j)) = g_j \quad , \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad . \end{cases}$$

É claro que

$$S = \begin{pmatrix} A - A_o \\ B_1 - B_{1,o} \\ \vdots \\ B_{m-1} - B_{m-1,o} \end{pmatrix} \circ R$$

é um operador limitado de

$$X = L^p(B^+) \times \prod_{j=o}^{m-1} W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma)$$

em si mesmo.

É fácil ver que, existe uma constante $\underline{C} > 0$ tal que se supusermos que

(8) $$\sup_{x,\alpha} |a_\alpha(x) - a_\alpha(0)| \leq \underline{C}$$

e

(9) $$\sup_{x,\beta} |b_{j,\beta}(x) - b_{j,\beta}(0)| \leq \underline{C} \quad ,$$

então, $||S|| < 1$ e, por conseguinte,

$$I + S$$

é inversível em X o que nos permite resolver (7) em X. Utilizando-se a seguir o teorema 3, obtemos

$$u \in W^{2m,p}(B^+)$$

solução de

$$\begin{cases} A_o u = \varphi \\ B_{j,o} u = \psi_j \quad , \quad 0 \leq j \leq m-1 \ . \end{cases}$$

Claro está que u é solução de (6) e que sua norma em $W^{2m,p}(B^+)$ é limitada pelas normas de f em $L^p(B^+)$ e de g_j em $W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma)$, $0 \leq j \leq m-1$.

Podemos, pois, enunciar o seguinte.

Teorema 4. Suponhamos que o sistema $(A, (B_j)_{0 \leq j \leq m-1})$ com coeficientes funções infinitamente deriváveis e limitadas em B^+ defina um problema elítico regular. Existe uma constante $\underline{C} > 0$ tal que se as condições (8) e (9) estiverem verificadas, então dadas f com suporte compacto em $L^p(B^+)$ e

g_j com suporte compacto em $W^{2m-m_j,\frac{1}{p},p}(\Sigma)$, $o \leq j \leq m-1$, existe $u \in W^{2m,p}(B^+)$ solução de (6). Além disso,

$$||u||_{W^{2m,p}(B^+)} \leq C \left\{ ||f||_{L^p(B^+)} + \sum_{j=o}^{m-1} ||g_j||_{W^{2m-m_j-\frac{1}{p},p}(\Sigma)} \right\}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg - "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions", I. Comm. Pure App. Math. 12, 623-727 (1959). II, Comm. Pure Appl. Math. vol. XVII, 35-92 (1964).

[2] J. Barros Neto, "Problèmes aux limites non-homogènes", Les Presses de l'Université de Montréal, à aparecer.

[3] F. E. Browder, "Functional Analysis and Partial Differential Equations", Math. Ann. 145, 81 - 226 (1962).

[4] ________, "On the spectral theory of elliptic differential operators", Math. Ann. 142, 22 - 130 (1961).

[5] ________, "A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems", I, II; Indag. Math., 22, no. 2, 145 - 169 (1960); III, Indag. Math. 23, no. 4, 404 - 410 (1961).

[6] ________, "Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems" Proceedings of the Nat. Ac. of Sc., vol. 45, no.3, 365 - 372 (1959).

[7] A.P. Calderon, A. Zygmund, "On singular integrals", Amer. Journal of Math. volume LXXVIII, number 2, 289 - 309, (1956).

[8] L. Hörmander, "Linear Partial Differential Operators" Academic Press, 1963.

[9] J.-L. Lions, E. Magenes, "Problèmes aux limites non-homogènes", (I) Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa, XIV, 259 - 308, (1960); (III) id. XV, 39 - 101, (1961); (IV) id. 311 - 326 (1961); (V) 1 - 44, (1962); (II) Ann. Inst. Fourier, XI, 137 - 178 (1961), (VI) Journ. d'An. Math., 165 - 188 (1963); (VII) Ann. di Matem. Pura ed Appl., serie IV, tomo LXIII, 201 - 224 (1963).

[10] B. Malgrange, "Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution". Ann. Inst. Fourier 6, 271 - 355 (1956).

[11] L. Nirenberg, "Remarks on strongly elliptic partial differential equations", Comm. Pure App. Math., 8, 649 - 675 (1955).

[12] J. Peetre, "Another approach to elliptic boundary problems", Comm. Pure App. Math, vol. XIV, 771 - 731 (1961).

[13] L. Schwartz, "Théorie des Distributions" I et II, Herman et Cie. Paris (1950).

[14] F. Trèves, "Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients", Notas de Matemática no. 27, Rio de Janeiro (1961).