

Contribuição ao Estudo dos Fluidos Incompressíveis,
Pesados, em Movimento Plano, Permanente, Irrotacional
e apresentando Superfície Livre, pelo Método das
Analogias Rheoelétricas

Tese apresentada à douta Congregação da
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo pelo candidato Engenheiro Civil
TUFİ MAMED ASSY ao provimento
efetivo da Cátedra de Mecânica dos Fluidos

SÃO PAULO
1967

ÍNDICE

Principais notações e convenções	pag. 1
Introdução	3

CAPÍTULO I

ELEMENTOS DA TEORIA DOS MOVIMENTOS PLANOS IRROTACIONAIS - DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL.

1.1 - Considerações preliminares	9
1.2 - Função potencial e função de corrente	10
1.3 - Relação fundamental	10
1.4 - Potencial complexo. Velocidade complexa	11
1.5 - Potencial logarítmico e função argumento	12
1.6 - Soluções da equação de Laplace	14
1.7 - Fórmulas de interpolação e de diferenciação	15
1.8 - Pontos singulares	17

CAPÍTULO II

GENERALIDADES SOBRE A TEORIA DAS ANALOGIAS RHEOELÉTRICAS.

2.1 - Princípio	21
2.2 - Analogia direta e analogia inversa	22
2.3 - Escolha do meio condutor	23
2.4 - Características do papel teledeltos	25
2.5 - Execução dos modelos	27
2.6 - A aparelhagem. Materialização das condições de - contorno	28
2.7 - Técnica das injeções por grandes resistências ..	32

CAPÍTULO III

ESTUDO DE UM VERTEDOR CILINDRICO DE PERFIL CIRCULAR.

3.1 - Considerações preliminares e apresentação do -- problema	38
3.2 - Hipóteses e equações que regem o escoamento	40

	pag.
3.3 - Equações características da superfície livre ...	42
3.4 - Condições de contorno para a função μ	45
3.5 - Analogia direta	47
3.6 - Condições suplementares. Pesquisa da superfície livre	53
3.7 - Traçado das isovelocidades	56
3.8 - Analogia inversa	57
3.9 - Resultados experimentais	58

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES DIVERSAS

4.1 - Considerações preliminares	69
4.2 - Critérios de convergência	70
4.3 - Condições de contorno para a função μ	75
4.4 - Analogia direta e resultados experimentais	76
4.5 - Analogia inversa	82
Conclusão	84

PRINCIPAIS NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

- x - abscissa no sistema cartesiano.
- y - designa nos Cap. I e II a ordenada no sistema cartesiano e nos Cap. III e IV a carga hidráulica, i.é, a distância segundo a vertical contada do plano de energia - a um ponto da superfície livre.
- z - designa no Cap. I a variável complexa ($= x + i y$) e nos capítulos seguintes a cota positiva segundo a vertical ascendente.
- \lg - logarítmo neperiano.
- \log - logarítmo decimal.
- \vec{v} - vetor da velocidade
- v - módulo do vetor da velocidade ($= \text{mod } \vec{v}$)
- θ - ângulo que o vetor da velocidade forma com a direção - de referência Ox .
- φ - função potencial de velocidade.
- ψ - função de corrente.
- s, n - coordenadas curvilíneas segundo duas direções ortogonais.
- μ - função potencial logarítmica ($= \lg v$).
- Ω - função argumento ($= -\theta$).
- \vec{j} - vetor densidade da corrente.
- ρ - resistividade elétrica.
- U - potencial elétrico.
- i - corrente elétrica.
- \bar{U} - potencial elétrico no borne da fonte de corrente.
- R - resistência elétrica.
- Γ - fronteira da região de escoamento.
- D - domínio plano materializado pela região de escoamento de fronteira Γ .
- a, b - constantes.
- α, β - ângulos
- γ - peso específico do fluido.

- p - pressão.
- y_p - altura de pressão ($=p/\gamma$).
- y_v - altura cinética ($=v^2/2g$).
- r - raio de curvatura.

- As citações bibliográficas são indicadas, no texto , entre parentesis por um número -- que representa a -- ordem da citação -- precedido da abreviação ref. e -- são em seguida explicitadas no rodapé da página cor-- respondente.
- O número entre parentesis que se encontra ao lado de - uma fórmula significa uma referência a esta fórmula -- quando citado no texto.

INTRODUÇÃO

Um dos problemas que se apresentam particularmente delicados nas instalações de quedas hidráulicas comportando grandes vazões, reside principalmente no esgotamento das enchentes excepcionais.

As estruturas projetadas para esse fim — designadas genericamente por vertedores — localizam-se, via de regra, no local da obra de retenção e se constituem, quanto ao escoamento, nos mais delicados e quanto ao aspecto econômico nos mais onerosos de toda a instalação. Os vertedores podem ser precedidos por canais ou podem ter início logo no paramento de montante da barragem. Compreendem quase sempre uma soleira vertente, acopladas ou não a comportas móveis. Os perfis adotados devem se caracterizar por coeficientes de vazão os mais elevados possível quando em escoamento livre, afim de conduzir à realização mais econômica da obra; devem permitir grande estabilidade, regularidade e aderência da veia líquida ao longo da soleira vertente; devem, ainda, sobretudo nas aberturas parciais das comportas, não sofrer depressões abaixo de limites específicos. Daí a conveniência de se atribuir uma importância toda particular ao estudo dos escoamentos por vertedores.

O equacionamento matemático de tais escoamentos — supostos regulares repousa, basicamente, sobre a hipótese simples de irrotacionalidade — evidenciada, ao que sabemos, pela primeira vez, por Escande (Ref.1, pag.III-42 e seguintes).

Esta hipótese que implica na existência de um potencial de velocidade permite considerar o líquido se com--

portando como perfeitos praticamente em t \hat{o} da a regi \tilde{a} o do escoamento, inclusive nas vizinhan \tilde{c} as imediatas dos cont \hat{o} rnos s \acute{o} lidos. Com efeito, a menos que os vertedores sejam precedidos por canais longos, com l \acute{a} minas de \acute{a} gua relativamente pequenas e velocidades relativamente grandes, a espessura da camada limite pode ser considerada desprez \acute{i} vel em geral nos pontos da soleira vertente. O movimento ao longo dos vertedores pode ent \tilde{a} o ser considerado regido pelas equa \tilde{c} oes dos fluidos perfeitos. Sendo dado, por \acute{e} m, a enorme diversidade de formas que possuem as regi \tilde{e} es de escoamento, o feito que as superf \acute{i} cies livres s \tilde{a} o a priori inc \acute{o} gnitas, o car \acute{a} ter n \tilde{a} o linear das condi \tilde{c} oes de equil \acute{i} brio dessas superf \acute{i} cies, a ocorr \tilde{e} ncia quase sempre de singularidades matem \acute{a} ticas em pontos do cont \hat{o} rno, o desconhecimento antecipado da carga total (energia total referida \grave{a} unidade de p \acute{e} so) em pelo menos uma sec \tilde{c} ao de escoamento e o desconhecimento das dimens \tilde{e} es e formas dessa sec \tilde{c} oes, a possibilidade dos m \acute{e} todos anal \acute{i} ticos tem sido, pelo menos a t \acute{e} agora, extremamente limitados.

S \acute{o} em alguns casos particulares, onde os dom \acute{i} nios tem formas geom \acute{e} tricas relativamente simples, regidos por condi \tilde{c} oes de cont \hat{o} rno que n \tilde{a} o refletem os casos gerais, \acute{e} que -- houve \acute{e} xito completo por via anal \acute{i} tica.

Referimo-nos em especial ao excelente trabalho de Watters e Street (Ref.2) dedicado \grave{a} solu \tilde{c} ao dos escoamentos a trav \acute{e} s de singularidades (obst \acute{a} culos) precedidas e sucedidas por canais longos em regime uniforme \grave{a} montante e \grave{a} juzante.. Estes autores equacionam e resolvem com rara eleg \acute{a} ncia os referidos problemas por \acute{e} m \grave{a} custa de m \acute{e} todos extremamente lon-

Ref.2: GARY Z. WATTERS e ROBERT L. STREET. Two-dimensional flow over sills in open channels. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, vol.90,n-HY4,julho 1964

gos (transformação conforme, desenvolvimento em série, etc..) e sem dispensar evidentemente o concurso dos computadores eletrônicos.

Os métodos de cálculo numérico, por sua vez, só lograram êxito em alguns casos especiais. Southwell e Vaisey fazendo uso do método da relaxação, resolveram o problema do escoamento em queda livre a partir de um canal de fundo horizontal pressupondo conhecida a profundidade da lâmina de água correspondente a um plano de energia previamente fixado (Ref.3) e McNowen, Hsu e Yih, empregando o mesmo método da relaxação, estudaram o problema do escoamento em queda livre supondo profundidade infinita à montante da soleira (Ref.4).

Fora destes dois casos, quando então a profundidade da lâmina de água à montante é finita, não se conhecem soluções por via numérica.

Justificam-se, portanto, as pesquisas de métodos-- que, dotados de uma precisão suficiente para as necessidades da prática, possibilitem de uma maneira simples e rápida a solução dos problemas matemáticos postos pelos escoamentos ao longo do vertedores e estruturas similares. É o objetivo desta tese, em que, para a solução dos referidos problemas, se recorre ao método das analogias rheoelétricas.

Este método parece ter surgido praticamente em --- 1930 com o trabalho de tese do Professor Lucien Malavard, executada sob a direção do Professor Pérès. Desde então, todas as disciplinas científicas e, em particular, a Mecânica dos -- Fluidos, nos seus múltiplos campos de aplicação (Termo-

Ref.3: R.V.SOUTHWELL, Relaxation Methods in Theoretical Physics. Oxford.1946

Ref.4: JOHN S.MCNOWEN, EN-YUN e YIH CHIA-SHUN. Applications of the Relaxation Technique in Fluid Mechanics, Proceedings American Society of Civil Engineers, Vol.79-julho 1953.

dinâmica, Aerodinâmica, Hidráulica, etc...) dêle vem se beneficiando para a solução dos campos harmônicos planos que lhes são peculiares.

Mas, a solução era sempre procurada, quase que tradicionalmente, através das funções auxiliares, a função potencial da qual deriva o vetor campo e a função que lhe é conjugada. Recentemente, porém, Gui Renard (Ref.5) demonstrou a possibilidade de identificar diretamente o potencial elétrico do modelo analógico, à função potencial logarítmica do gradiente -- bem como à função argumento (a saber, o ângulo, a menos do sinal, que o gradiente forma com a direção de referência).

Com base nesta idéia é que desenvolvemos o presente trabalho. Este foi estruturado em quatro capítulos. Nos dois primeiros, desenvolvemos respectivamente os tópicos pertinentes aos movimentos planos irrotacionais dos fluidos incompressíveis e à técnica das analogias rheoelétricas que interessam diretamente aos problemas que temos em vista. Estes dois capítulos são também importantes porque permitem dar ao leitor desejoso em se inteirar da técnica rheoelétrica e de seus fundamentos, pouco divulgados entre nós, uma idéia relativamente ampla quer para fins de pesquisa como também sob o aspecto das aplicações.

Nos capítulos seguintes abordamos em relação a cada problema proposto o estabelecimento adequado das condições de contorno, a representação rheoelétrica dessas condições, a técnica de obtenção da superfície livre por aproximações sucessivas, tudo isso mediante o concurso de uma apa----

Ref.5: GUY RENARD. Representation directe, par analogie rheo--
életrique, des Gradients de Fonctions harmo--
niques en domaine plan limité ou illimité. Te--
se apresentada à Faculdade de Ciências de
Paris, 1958

relhagem extremamente simples, especialmente projetada e executada para êsse fim.*

x

x

x

O assunto abordado neste trabalho é extremamen-te vasto se levarmos em conta as múltiplas variedades de tipos de escoamentos de fluidos incompressíveis pesados, apresentando superfície livre - que constituem aplicações diretas da Mecânica dos Fluidos. Dispondo, entretanto, de um --prazo de tempo relativamente curto e de um orçamento limitado, pudemos concretizar apenas uma parte do plano inicial--mente traçado para o fim da pesquisa completa. A concretização desta parte foi possível também graças à colaboração --com que se houveram várias entidades e pessoas.

É pois com a maior satisfação que externamos aqui os nossos sinceros agradecimentos a tôdos que de algum modo contribuíram para a realização desta tése:

- Ao Prof. Tharcísio Damy de Souza Santos, DD. Diretor da - Escola Politécnica de S.Paulo, pelas facilidades que nos proporcionou durante a realização deste trabalho.
- Ao Instituto de Eletrotécnica, muito especialmente ao Eng, J.L. da Cruz Passos, DD. Diretor do Instituto, pela execução da parte da aparelhagem utilizado e ao Eng. A. Casella pelo empréstimo de alguns aparelhos de medida.
- Ao Eng. Antonio Zanella Jr. pelo projeto dos potenciome--tros de medida e demais aparelhos, pelas medições efetua-

* O projeto e execução da aparelhagem se devem principalmente ao Eng. Antonio Zanella Jr. . A execução teve lugar no Instituto de Eletrotécnica por permissão especial de seu ilustre Diretor Eng. José Luiz da Cruz Passos

- das com o conjunto da instalação e pela colaboração prestada durante a elaboração dos resultados.
- Ao "Centre de Calcul Analogique" (França) pela doação de papel teledeltos e muito especialmente ao Dr. Eng.D.Frumman pelos abalizados comentários que nos foram úteis durante a realização deste trabalho.
- Aos Profs. Rolando Sonsino e Octacilio Alves Caldeira, da Faculdade de Engenharia Industrial da Pontificie Universidade Católica de S.Paulo, que propiciaram a vinda de papel teledeltos.
- Aos Departamentos de Física da E.P.U.S.P e da F.F.C.S.P. pelo empréstimo de aparelhos de medida.
- Ao corpo Docente da Cátedra de Mecânica dos Fluidos e -- muito especialmente ao Instrutor Eng.Adalberto B.T. do Amaral pela colaboração prestada na tomada de fotografias.
- Aos funcionários D.Neide J.Lima pelo serviço de datilografia, Sr. Antonio Rita pela execução dos modelos e Srs. Haroldo Rosa Arruda e Armando Garcia pelo serviço de impressão.
- Ao D.L.P. do Grêmio Politécnico e muito especialmente a D.Norma Romano pelo serviço de desenho e impressão das fotografias.
- À firma "Resistências Brasileiras S.A." pela doação de resistências elétricas necessárias à realização deste -- trabalho.

CAPÍTULO I

ELEMENTOS DA TEORIA DOS MOVIMENTOS PLANOS IRROTACIONAIS DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

1.1.- CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Este capítulo encerra as idéias centrais tôdas - elas quase pertinentes à teoria dos movimentos planos irrotacionais de um fluido incompressível — devidamente estruturadas e vinculadas ao escôpo do presente trabalho.

Achamos que a apresentação da parte matemática - não podia ser menos descritiva nem mais lógica já que o fim principal que temos em vista é um ensaio em tôrno de um problema fundamentalmente técnico, básicamente ligado à Mecânica dos Fluidos.

Os movimentos planos irrotacionais aos quais queremos nos referir nos capítulos seguintes concernem exclusivamente os líquidos em regime permanente.

Permitimo-nos entretanto, neste capítulo, poder abordar os diversos tópicos mencionando, sempre que se julgar necessário, a hipótese do regime variável.

O movimento plano se caracteriza, como o sabemos, pelo feito que a terceira componente v_z do vetor de velocidade \vec{v} é identicamente nula, as outras duas v_x e v_y sendo - independentes da variável z e funções unicamente de x , y e eventualmente do tempo t se o movimento não é permanente.

Seu estudo pode então ser feito sem sair do plano Oxy ou de uma certa região dêste — domínio D de contorno Γ — particularizando simplesmente as equações estabelecidas para um movimento fluido tri-dimensional. Seguindo esta orientação o eixo Oz deixa de ter algum interêsse particular, o que nos permite utilizar a letra z para represen--

tar daqui por diante, neste capítulo, o imaginário $x + i y$.

1.2.- FUNÇÃO POTENCIAL E FUNÇÃO DE CORRENTE.

O fluido suposto incompressível, a equação da -
continuidade na forma diferencial se reduz a

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

que acarreta a existência de uma função $\psi(x, y, t)$, chamada,
por razões já conhecidas, função de corrente, tal que:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

enquanto que o caráter irrotacional do movimento

$$\operatorname{Rot} \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

implica na existência da função potencial de velocidade ---
 $\varphi(x, y, t)$ tal que

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Identificando as expressões acima obtidas para -
as componentes do vetor \vec{v} , resultam, entre φ e ψ , as rela--
ções

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.2)$$

e, então, φ e ψ são harmônicas conjugadas de duas variáveis
 x e y :

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (1.3)$$

com

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

1.3.- RELAÇÃO FUNDAMENTAL.

As Eqs.(1.2) são as conhecidas condições de Cau-
chy-Riemann. Elas admitem uma generalização que será particu-
larmente importante no desenvolvimento deste trabalho. Se--
jam Ms , Ms' duas direções quaisquer porém tais que o ângulo

sMs' tenha o valor $+\pi/2$, ou o que é o mesmo, tenha a mesma disposição geométrica do ângulo xOy . $\frac{d}{ds}$ e $\frac{d}{ds'}$, designando as derivadas no ponto M não singular segundo as direções de s e s' , respectivamente, as relações (1.2) podem ser substituídas pelas equivalentes seguintes:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\psi}{ds}, \quad \frac{d\varphi}{ds'} = - \frac{d\psi}{ds} \quad (1.4)$$

Com efeito, é suficiente observar que as relações (1.2) não se alteram quando se faz girar os eixos O_x e O_y de um ângulo qualquer. Ao fazê-los girar de um ângulo -- que permita a sua coincidência com as direções de Ms e Ms' , respectivamente, as relações (1.2) tomam então a forma (1.4).

Consideremos, agora, o contorno Γ de um domínio plano simplesmente conexo D . Se o ponto M descreve Γ no sentido habitual, i.é, a normal interna Mn a D faz com a tangente Ms um ângulo $+\pi/2$, as relações (1.4) tornam-se:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\psi}{dn}, \quad \frac{d\varphi}{dn} = - \frac{d\psi}{ds} \quad (1.5)$$

onde $\frac{d}{ds}$ e $\frac{d}{dn}$ simbolizam as derivadas segundo essas direções.

1.4.- POTENCIAL COMPLEXO. VELOCIDADE COMPLEXA.

Seja D um domínio do plano Oxy tomado para a representação da variável complexa $z=x+iy$. As Eqs.(1.2) constituem justamente as condições necessária e suficiente para que a função complexa $f(z) = \varphi + i\psi$, uniforme e contínua da variável z em D , admita em z_0 , afixo de $P_0 = P(x_0, y_0)$, a derivada única.

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0}$$

independentemente da maneira pela qual z tende a z_0 , tendo ainda como o mostra um cálculo simples, em um ponto genérico $P(x,y)$, imagem de z , o valor:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= \varphi'_x(x,y,t) - i \varphi'_y(x,y,t) = \\ &= v_x(x,y,t) - i v_y(x,y,t)\end{aligned}$$

Vemos então que o potencial φ e a função associada ψ , que, conjuntamente, caracterizam um determinado movimento plano solenoidal e irrotacional, (mais simplesmente, movimento plano harmônico) formam sempre a parte real e a parte imaginária de uma função complexa $f(z)$ da variável complexa z , chamada potencial complexo do movimento.

E, reciprocamente, qualquer função complexa --- $f(z)$, uniforme e contínua e admitindo derivada única (tais funções são ditas holomorfas ou regulares), eventualmente, função do tempo se o movimento não é permanente, poderá ser considerada como o potencial complexo de um movimento plano harmônico.

Sua derivada

$$\frac{df}{dz} = v_x - i v_y \quad (1.6)$$

(que é também uma função holomorfa de z) é o afixo conjugado do vetor \vec{v} (chamado velocidade complexa) pois um deles se deduz do outro por uma simetria em torno do eixo Ox .

1.5.- POTENCIAL LOGARÍTMICO E FUNÇÃO ARGUMENTO.

Sejam $v = \text{mod } \vec{v}$ e θ o argumento do vetor \vec{v} ou o ângulo que faz a tangente à linha de corrente passando pelo ponto de aplicação de \vec{v} com a direção de referência Ox . A relação anterior (1.6) se escreve:

$$\frac{df}{dz} = v \cdot e^{-i\theta}$$

O logaritmo neperiano desta derivada é uma nova função holomorfa de z , donde

$$\lg \frac{df}{dz} = \lg v - i \theta$$

que possui como parte real a função potencial logarítmica:

$$\mu = \lg v \quad (1.7)$$

e como parte imaginária a função argumento

$$\Omega = - \theta$$

ambas funções harmônicas das duas variáveis x e y (eventualmente do tempo)

$$\nabla^2 \mu = 0 \text{ e } \nabla^2 \Omega = 0 \quad (1.9)$$

como decorre do n.º 1.2, às quais se aplicam também em um -- ponto M não singular as considerações do n.º 1.3:

$$\frac{d\mu}{dX} = - \frac{d\Omega}{dY}$$

sendo MX e MY duas direções ortogonais quaisquer.

Convém ponderar desde já sobre a importância -- destas duas funções μ e Ω .

É muito frequente encontrar-se, por exemplo, um problema físico em que o objetivo final da solução não é -- propriamente o potencial e sim o seu gradiente e em particular na hidrodinâmica dos fluidos incompressíveis ideais não é o potencial de velocidade que interessa em primeiro lugar (que se comporta quase sempre como função auxiliar) o sim o gradiente desta função, a saber, o próprio vetor da velocidade \vec{v} em módulo, direção e sentido. Se, então, no plano físico, pudermos representar, não as funções φ e ψ , mas diretamente as funções μ e Ω , teremos, em cada ponto, de um lado, o módulo da velocidade através de μ e por outro lado a direção dessa velocidade através de Ω .

A representação direta de μ e Ω no plano físico foi talvez utilizada pela primeira vez por ----- (Ref.6).

mas, no campo rheoelétrico, com aplicação à aerodinâmica e problemas de eletromagnetismo, fê-lo recentemente G. Renard (Ref.5) ao qual já nos referimos na introdução deste trabalho.

1.6.- SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LAPLACE.

Sendo ou não única, a solução da equação de Laplace no plano (Cf. Eqs. 1.3 ou 1.9) depende das condições de contorno a serem impostas.

Entre estas mencionaremos apenas as que admitem representação analógica simples habitualmente reproduzidas nas cubas rheoelétricas ou nos modelos de papel condutor -- (Cf. Cap. II):

Problema de Dirichlet: Consiste em determinar -- uma função ϕ , harmônica em um domínio plano D , de contorno Γ , e satisfazendo sobre os pontos de Γ a condição:

$$\phi = f(P)$$

$f(P)$ sendo uma função dada em todos os pontos $P(x,y) \in \Gamma$.

Problema de Neumann: Consiste em determinar uma função ϕ , harmônica em um domínio D , de contorno Γ , e conhecendo sobre os pontos de Γ a derivada segundo a normal

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = g(P)$$

$g(P)$ sendo uma função dada em todos os pontos $P(x,y) \in \Gamma$

Problema mixto (dito também problema de Dirichlet - Neumann): Consiste em procurar uma função ϕ , harmônica em D , e satisfazendo sobre o contorno Γ de D a condição

$$\phi = f(P_1) \quad P_1(x,y) \in \Gamma_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = g(P_2) \quad P_2(x,y) \in \Gamma_2$$

onde Γ_1 e Γ_2 , conjuntamente, constituem Γ .

1.7.- FÓRMULAS DE INTERPOLAÇÃO E DE DIFERENCIAÇÃO

As condições de contorno apresentadas no n^o anterior dão em relação às funções conjugadas μ e Ω , num ponto regular M do contorno Γ , suposto orientado no sentido -- descrito no n^o 1.3 as relações diferenciais seguintes:

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = - \frac{\partial \Omega}{\partial s} = + \frac{\partial \Theta}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial \Omega}{\partial n} = - \frac{\partial \Theta}{\partial n}$$

Quando, por exemplo o problema matemático é do tipo Neumann, a representação rheoelétrica da função μ em um domínio D requer sobre Γ o conhecimento da variação --

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} ds = \frac{\partial \Theta}{\partial s} ds = d\Theta(s)$$

onde $d\Theta(s)$ pode ser feito igual a $\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$, sendo estes últimos os argumentos do vetor da velocidade em dois pontos próximos M_2 e M_1 da vizinhanças de M.

Vemos então que a integrabilidade de μ segundo Neumann pressupõe o conhecimento sobre Γ da distribuição de $\Theta(s)$. Se o contorno Γ , (ou parte dêle) é dado por uma expressão analítica o cálculo de $\Theta(s)$ não oferece nenhuma dificuldade pelo simples fato de poder calcular imediatamente o -- coeficiente angular da reta tangente à curva em cada um de seus pontos. Este é o caso quando a parte de Γ diz respeito ao perfil longitudinal do vertedor que é dado, em geral, analiticamente. Mas, quando o contorno Γ é dado em parte por pontos ou simplesmente por meio de uma curva sem expressão analítica (caso da superfície livre) torna-se necessário recorrer a métodos do cálculo numérico. Estabeleceremos em seguida as fórmulas que julgamos úteis no processamento deste -- trabalho.

Sejam γ_0 , γ_A e γ_B os valores de uma função --

qualquer $y(x)$ obtidos em três pontos O, A, B de abscissas respectivamente iguais a 0 (zero), a, -b, sendo \underline{a} e \underline{b} números positivos. Sob as hipóteses adstritas aos desenvolvimentos limitados (função $y(x)$ contínua, restrita, bem como as derivadas, etc...) a função $y(x)$ assume a forma polinomial seguinte

$$y(x) = y_0 + A_1 x + A_2 x^2 + E(x)$$

onde A_1 e A_2 e E são funções a determinar, as duas primeiras dependendo das variáveis y_0 , y_A , y_B , \underline{a} e \underline{b} e a última -- contendo além de \underline{a} e \underline{b} as derivadas de y de 3ª ordem em diante.

Mostremos a forma simbólica de se obter A_1 , A_2 e E. Os desenvolvimentos de $y(x)$ pela fórmula de McLaurin - no ponto $x=0$ são:

$$y_B - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (-b) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 (-b)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 (-b)^3 + \dots$$

$$y_A - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 a + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 a^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 a^3 + \dots$$

$$y(x) - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 x^3 + \dots$$

Resolvendo as duas primeiras em relação a -----
 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ e $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0$ vem:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{a-b}{ab} y_0 + \frac{b}{a(a+b)} y_A - \frac{a}{b(a+b)} y_B + E'_0 \quad (1.10)$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = -\frac{2}{ab} y_0 + \frac{2}{a(a+b)} y_A + \frac{2}{b(a+b)} y_B + E''_0 \quad (1.11)$$

com

$$E'_0 = -\frac{ab}{6} \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 + \dots$$

$$E''_0 = -\frac{a-b}{3} \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 + \dots$$

donde:

$$y(x) = y_0 + \left[\frac{a-b}{ab} y_0 + \frac{b}{a(a+b)} y_A - \frac{a}{b(a+b)} y_B \right] +$$

$$+ \left[\frac{-1}{ab} y_o + \frac{1}{a(a+b)} y_A + \frac{1}{b(a+b)} y_B \right] x^2 + E(x) \quad (1.12)$$

com

$$E(x) = \frac{1}{6} x(x-a)(x-b) \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_o + \dots \quad (1.12)$$

Derivando (1.12) nos pontos o, A, B obtém-se os desenvolvimentos das derivadas de $y(x)$ nesses pontos. Assim, os resultados para $A(a)$ e $B(-b)$ são:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_A = - \frac{a+b}{ab} y_o + \frac{2a+b}{a(a+b)} y_A + \frac{a}{b(a+b)} y_B + E'_A$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_B = \frac{a+b}{ab} y_o - \frac{b}{a(a+b)} y_A + \frac{a+2b}{b(a+b)} y_B + E'_B$$

com

$$E'_A = \frac{a(a+b)}{6} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_o + \dots$$

$$E'_B = \frac{b(a+b)}{6} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_o + \dots$$

Estas fórmulas se simplificam bastante quando A e B são simétricas em relação à origem. Independentemente disso, elas são suficientemente precisas para as necessidades que temos em vista, e de manuseio fácil e rápido. A fórmula (1.12) substitue com vantagens as clássicas fórmulas de interpolação especialmente quando se quer a lei de variação de $y(x)$ num intervalo de definição dado $(-b \leq x \leq a)$.

1.8.- PONTOS SINGULARES.

Durante o movimento irrotacional de um fluido incompressível, podem ocorrer pontos onde a velocidade se anula ou se torna infinita. Tais pontos constituem as singularidades matemáticas do movimento. Com efeito, admitindo o estudo do movimento através da função $\lg(df/dz)$, nos pontos de velocidade nula ou infinita temos μ infinito e Ω uma função não definida nesses pontos.

A relação (1.10) deixa também de subsistir.

É preciso, então, formular a hipótese segundo a qual os pontos singulares não ocorrem no interior da região de escoamento, podendo eventualmente ocorrer em pontos do contorno. Esta hipótese se justifica porque a velocidade, embora atinja os valores máximos no contorno (propriedade característica dos movimentos irrotacionais) pode atingir os valores mínimos nos pontos internos de um domínio plano harmônico, e então em particular, pode ser zero quando o ponto interno é um ponto de estagnação (Ref.7, pag.79).

Os pontos singulares no contorno se reduzem qu se exclusivamente a cantos. Uma demonstração interessante, embora incompleta, desta propriedade foi dada por Thomson - (Ref.8, pag.112).

Entretanto preferimos mostrá-la por meio de um exemplo simples. Consideremos o escoamento regido pelo potencial complexo

$$f(z) = A z^m$$

A e m sendo constantes reais e $m > 0$. Designando por r e θ o módulo e o argumento de z , vem:

$$f(z) = A r^m (\cos m\theta + i \sin m\theta)$$

donde:

$$\varphi = A r^m \cos m\theta$$

$$\psi = A r^m \sin m\theta$$

e então $\psi=0$ nos pontos de r qualquer (excluido $r = 0$) e θ múltiplo de π/m . Para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/m$ temos duas linhas de

Ref.7: HUNTER ROUSE (Editor Chefe). Advanced Mechanics of -
Fluids John Wiley 1959

Ref.8: MILNE THOMSON. Hydrodinamica Teorica. Aguilar.1951

corrente retas que se cruzam na origem, a primeira coincidindo com o eixo real e a segunda formando com este eixo o ângulo Π/m . Os movimentos irrotacionais, por uma propriedade que lhes é característica, autorizam considerar as duas retas como se fossem os traços de duas paredes no plano físico (plano z). Fazendo então variar θ de zero a Π/m obtemos a configuração de todas as linhas de corrente e linhas equipotenciais na região do escoamento delimitada pelas duas paredes com vértice na origem.

Este exemplo dá margem, agora, às seguintes observações importantes.

Para $m > 1$ o ângulo entre as paredes (computado no sentido do movimento), é menor que Π e para $\frac{1}{2} < m < 1$ este ângulo é maior que Π e evidentemente menor que 2Π . Derivando o potencial complexo obtém-se:

$$f'(z) = Am z^{m-1} = Am r^{m-1} e^{i(m-1)\theta}$$

donde o módulo da velocidade:

$$v = Amr^{m-1}$$

e, então, as linhas isovelocidades $v = \text{cte}$ são arcos de círculo com centro na origem. Notemos, ainda, que em $z=0$, a velocidade é nula para $m > 1$, (O vértice das duas paredes se comporta assim como ponto de estagnação) e para $\frac{1}{2} < m < 1$ a velocidade é infinita. São estas as conclusões particularmente importante às quais queríamos chegar. Reconhecem-se como singularidades no contorno os cantos, ou mais precisamente, os pontos em cujas vizinhanças incompletas (aquelas desfalçadas dos pontos propriamente ditos) há variação brusca da -- função argumento. A técnica matemática de contornar a presença de uma singularidade é remove-la do contorno por um artifício con

veniente. Isto feito, a eq. de Laplace sujeita às condições de contorno enunciadas no n^o 1.6 e mediante a relação (1.10) admite solução. Mas, esse artifício está sendo sugerido -- pelo exemplo que acabamos de apresentar. De fato, considerando o sistema de referência com a origem num ponto de estagnação, e isolando o ponto singular por meio de um arco de círculo de raio elementar \bar{r} e de equação $z = \bar{r} e^{i\bar{\theta}}$, a função potencial logarítmica será constante em todos os pontos do arco pois

$$v(\bar{r}) = \text{cte acarreta } \mu(\bar{r}) = \text{cte.}$$

e a função argumento terá por valor

$$\Omega = (m-1) \bar{\theta}$$

em cada ponto do arco.

Se $v(\bar{r})$ é conhecido teremos uma condição de Dirichlet para μ e, pela relação (1.10), sendo ou não conhecido $v(\bar{r})$, teremos obrigatoriamente uma condição de Neumann para Ω ,

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{d\Omega}{dn} = 0$$

sendo s um sistema de abcissas curvilíneo estabelecido ao longo do arco elementar no sentido habitual e n computada positiva no sentido da normal interior.

Ao longo do arco elementar a derivada de Ω em relação a s tem agora um sentido matemático. Portanto, sendo dado $d\Omega/ds$, resulta pela relação (1.10) uma condição de Neumann para μ .

A técnica de representação rheoelétrica das singularidades e das correspondentes condições de contorno será apresentada com o devido detalhe nos capítulos seguintes.

CAPÍTULO II

GENERALIDADES SOBRE A TÉCNICA DAS ANALOGIAS RHEOELÉTRICAS.

2.1.- PRINCÍPIO.

O método das analogias rheoelétricas se inspira na existência de um comportamento matemático identico de diversos campos da física ao do fenómeno da condução elétrica através de um meio condutor contínuo. As equações que regem este último fenómeno suposto se realizando em regime estacionário em relação a um sistema de referência Oxyz, em cada ponto $P(x,y,z)$ interno ao meio condutor, são:

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = - \frac{1}{\rho} \text{grad} U.$$

onde $\vec{j}(x,y,z)$ é o vetor densidade de corrente, $\rho(x,y,z)$ resistividade e $U(x,y,z)$ o potencial elétrico do qual deriva o vetor campo $\vec{E}(x,y,z)$.

Combinando as duas equações acima resulta a equação geral que rege o fenómeno da condução elétrica em um meio condutor contínuo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Daí o princípio estabelecido por Malavard (ref. 9): Toda vez que, no interior de um domínio D, um fenómeno físico é regido por um potencial ϕ que verifica uma eq. do tipo (2.1) é sempre possível de alguma maneira visualizar este fenómeno identificando ϕ ao potencial elétrico U de um modelo condutor de forma geométrica semelhante a D.

Ref.9: L.MALAVARD e G.RENARD. - La technique des analogies rhéométriques. Technique generales du laboratoire -- de physique (extrate).

Vol.II, Cap.XII, Ed. CNRS. 1962

No caso particular de um campo plano, o meio condutor sendo homogêneo e isotrópico em relação à resistividade, o fenômeno se rege pela equação de Laplace.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

À vista desta equação e daquelas (1.9) é suficiente então construir um modelo elétrico de dimensões geométricas semelhantes àsquelas do domínio considerado do movimento plano irrotacional precisando sobre o contorno do modelo elétrico as mesmas condições de contorno do escoamento em pontos homólogos, inclusive as correspondentes aos pontos singulares caso existam.

As grandezas elétricas detectadas no interior do modelo elétrico serão, a menos de uma constante, uma solução experimental das grandezas hidrodinâmicas correspondentes.

2.2.-ANALOGIA DIRETA E ANALOGIA INVERSA.

A correspondência entre a função potencial logarítmica μ e o potencial elétrico U , habitualmente designada analogia direta, não é a única possível. Com efeito, a função de corrente elétrica i (fluxo do vetor \vec{j}) é função conjugada do potencial U em virtude da relação:

$$di = - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{dn} ds \quad (2.3)$$

e em consequência, é função harmônica dentro das hipóteses acima mencionadas. Identificando μ com i resulta uma correspondência analógica entre Ω e U , chamada analogia inversa. As condições de contorno na analogia inversa são invertidas em relação àsquelas da analogia direta em virtude da equação (1.10) ou da sua imagem (2.3). Donde, portanto, o nome das duas analogias.

2.3.- ESCOLHA DO MEIO CONDUTOR.

Os materiais habitualmente utilizados para a materialização de modelo elétrico capaz de permitir o estudo de um campo harmônico plano podem ser líquidos ou sólidos. Entre os primeiros é exemplo clássico um eletrólito contido em cuba rheoelétrica de profundidade rigorosamente constante. Esta técnica não poderia servir à pesquisa de soluções de problemas envolvendo determinação de superfície livre pelas seguintes razões mais sérias que aquelas apontadas por Huard de La Marre (Ref.10, pag.6). A superfície livre é um contorno ao mesmo tempo linha de corrente, de forma qualquer, que se deve materializar com uma parede cilíndrica (munida ainda de eletrodos destinados à realização da condição de Neumann) de igual forma. Como a sua posição exata é incógnita a priori, ela deve ser obtida por aproximações sucessivas e estas implicam na realização de um conjunto de operações (esvaziamento da cuba, estanqueidade, reenchimento, etc...) que acabam por invalidar praticamente as vantagens próprias do método rheoelétrico.

Entretanto, alguns autores tem utilizado a cuba rheoelétrica na solução de problemas envolvendo pesquisa de superfície livre recorrendo a processos mais ou menos engenhosos que permitem deslocar dentro da cuba a parede materializadora da superfície livre sem a operação intermediária do esvaziamento em cada aproximação. Um desses processos, relacionado com a determinação da forma da superfície livre interior e superior da veia líquida em queda livre, é devido a Hay e Mar

Ref.10: PIERRE HUARD DE LA MARRE. Resolution de problèmes d'infiltrations à surface libre au moyen d'analogies électriques. Tese apresentada à Faculdade de Ciências de Paris. 1956

kland (Ref.11) que empregaram borracha flexível para materializar as superfícies livres e cola adequada afim de impedir eventuais fugas durante o deslocamento em cada aproximação.

Entretanto, as soluções julgadas aceitáveis por estes autores foram obtidas após cerca de seis aproximações e o teste completo compreendendo os ajustes dos contornos e levantamento final do campo demandou cerca de dois dias de trabalho. Não revelam, contudo, se aí está incluído o tempo gasto na execução do modelo.

Vemos, então, que o material sólido é incontestavelmente o mais indicado para os problemas laplacianos planos compreendendo determinação da superfície livre sob a condição de apresentar razoáveis requisitos em relação à resistividade e homogeneidade e ao mesmo tempo permitir manipulação fácil. Um tal material existe visto sob as conveniências da prática.

Em 1948 a "Western Union Telegraph Company" anunciou a fabricação de um novo tipo de papel eletro-sensitivo - destinado especialmente à gravação de telegramas e registros de instrumentos elétricos (Ref.12, pag.127). Conhecido pelo nome teledeltos, este papel passou a ser utilizado intensamente como meio condutor rheoelétrico por apresentar suficiente homogeneidade e isotropia em relação às características elétricas. Em virtude destas vantagens, o papel teledeltos tem sido utilizado com sucesso em diversos campos da técnica e em particular no domínio das escoamentos lentos. Na Escola Politécnica

Ref.11: HAY e ERIC MARKLAND.- The determination of the discharge over weirs by the electrolytic tank. Proc. the Institution of Civil Engineers. Vol.10.mai-1958.

Ref.12: WALTER J.KARPLUS. Analog Simulation.McGraw Hill-1958

ca de S.Paulo teve sua aplicação pela primeira vez, em 1961 - num estudo que visou a solução de um problema concreto, a saber, o estudo da percolação através da infraestrutura da barragem de Barra Bonita (Ref.13).

2.4.- CARACTERÍSTICAS DO PAPEL TELEDELTOS.

Existem no mercado fundamentalmente dois tipos de papel teledeltos, o tipo L de baixa resistividade (entre 1500 ohms.cm e 3000 ohms.cm) e o tipo H de alta resistividade (acima de 17 000 ohms.cm). O primeiro é o mais indicado porque -- preenche satisfatoriamente as condições exigidas pela técnica rheoelétrica.

Assim, por exemplo, as condições de contorno necessitam porções da fronteira bastante condutoras e também ao contrário, fronteiras isolantes em relação ao mesmo meio condutor.

O papel teledeltos é executado sob a forma de rolo de 80 cm de largura e comprimento até cerca de 30,0 m sendo - constituído de duas folhas coladas com um composto de grafite. Uma face se apresenta cinzenta clara e a outra cinzenta escura metalizada.

Durante a manufatura do papel, não é exercido controle preciso da resistividade, podendo ocorrer variação desta propriedade de um rolo para outro.

Além disso, testes de homogeneidade tem revelado - variação de 10⁰%, da resistividade segundo o comprimento e - testes de isotropia tem revelado também que a resistividade -

Ref.13: TUFFI M. ASSY.- Barragem de Barra Bonita. Estudo em modelo analógico elétrico de suas fundações. Lab. de -- Hidráulica da EPUSP. 1961

medida ao longo do comprimento do rôlo é $10^0/o$ aproximadamente mais baixa que aquela que se dá segundo a largura do rôlo, especialmente nas proximidades dos bordos. Estes inconvenientes obrigam tomar algumas precauções durante os ensaios. Para cada modelo convém testar a resistividade sôbre duas amostras cortadas segundo as duas direções nas proximidades da região servida à execução do modelo. Para certos campos com direção privilegiada de corrente recomenda-se mesmo executar dois modelos idênticos cortados segundo dois eixos perpendiculares e superpostos para a alimentação elétrica.

As variações de temperatura do meio ambiente e as frequentes corrente de ar úmido, quando agem uniformemente sôbre todo o modelo, alteram por igual a resistividade e em consequência a repartição dos potenciais. Mas quando, por falta de cuidado, se apoia o cotovelo ou antebraço sôbre o modelo ou ainda se ilumina intensamente o modelo de uma forma irregular, a repartição dos potenciais se altera agora desigualmente dando margem a êrros apreciáveis.

Os inconvenientes acima apontados que, evidentemente, limitam a precisão dos resultados, são contudo largamente compensados pela comodidade de emprêgo e rapidez de execução de domínios de forma absolutamente qualquer permitidos com o papel teledeltos. Este meio condutor é então altamente recomendado para descortinar, ainda que grosseiramente do ponto de vista da precisão, o sentido geral do fenómeno e, em particular, no caso presente, conduziria rapidamente à forma quase definitiva da superfície livre e a repartição das grandezas físicas interessando diretamente o problema do escoamento. Se maior precisão dos resultados é exigida por razões técnicas, o estudo completo pode ser feito daí por diante por meio da -

cuba rheoelétrica.

É sob este prisma que deve ser entendido o uso do papel teledeltos no presente trabalho, fornecendo, por um lado, resultados suficientemente bons para a maioria das necessidades práticas e por outro lado o ponto de partida para um estudo mais apurado nas cubas rheoelétricas.

2.5.- EXECUÇÃO DOS MODELOS.

Após definir completamente a forma geométrica do domínio a estudar, precisam-se em seguida as dimensões do modelo de modo que caiba em um retângulo de largura máxima --- 70cm, para escapar um pouco ao efeito de bordo do papel teledeltos referido no nº anterior, ~~desenhando~~ ^{desenhando} a lápis na escala 1:1 do modelo sobre um papel transparente milimetrado, A fronteira deste domínio deve ser detalhada de acordo com as condições de contorno a ser impostas eletricamente ao modelo. As partes que devem apresentar-se isolantes (corrente nulas), são desenhadas seguindo simplesmente a forma própria da fronteira, i.é, sem alteração. As partes da fronteira que devem ficar inteiramente condutoras (potencial constante) são desenhadas prevendo o lugar de um eletrôdo contínuo de aproximadamente 15mm de largura. As partes da fronteira que devem apresentar-se com variação de potencial ou de corrente de um ponto para outra são desenhadas prevendo uma sequência de eletrodos de dimensões a determinar e separados um do outro por um pequeno intervalo isolante. Estruturado desta maneira o projeto do modelo, o papel milimetrado é justaposto ao teledeltos na face cinza clara para reproduzir sobre ele a fronteira com seus eletrodos e isolantes por meio de furos minúsculos praticados com simples ponta seca. Estes furos permitem desenhar a lápis a forma do modelo no teledeltos. O Modê

lo pode ser extraído facilmente utilizando-se de tesoura e, se necessário ainda, de lâmina de barbear (fig.2.1).

O espaço ocupado por um isolante ao longo da fronteira que separa um eletrodo do contíguo não pode ser qual--quer pois, quando muito grande gera perturbações importantes do camponas vizinhanças da fronteira, os eletrodos se compor--tam como fontes e sorvedouros e quando muito pequeno provoca troca de corrente intensa entre os eletrodos vizinhos. Segun--do Malavard, o referido espaço deve ser tomado igual a $1/3$ - daquele que corresponde ao eletrodo.

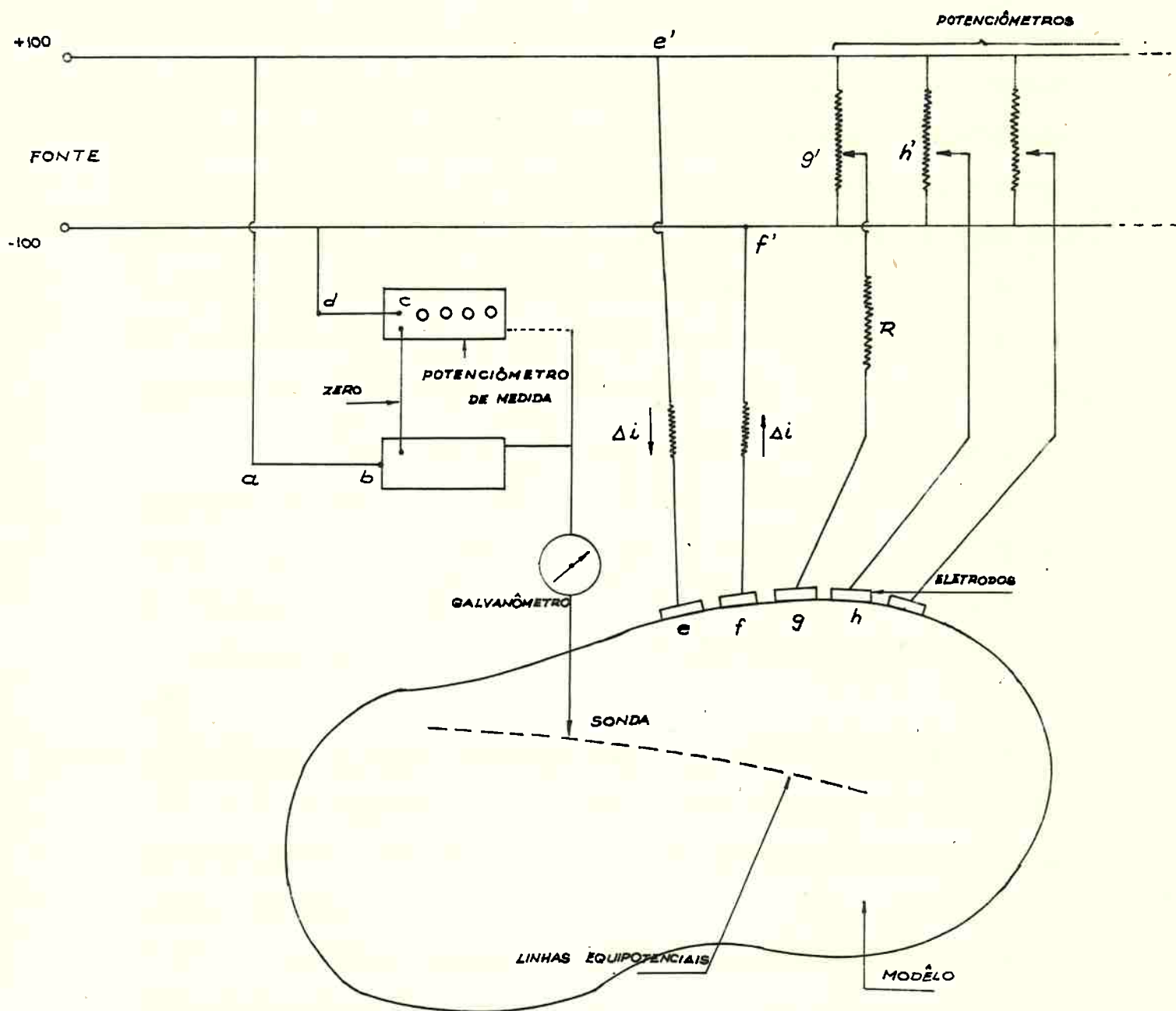
O processo que temos utilizado para realizar o e--letorodo altamente condutor, consiste em pintá-lo com tinta à base de prata de fabricação nacional, utilizando para isso - um simples pincel fino. A tinta seca rapidamente e assegura um contacto perfeitamente aceitável entre o eletrodo e o pa--pel.

2.6.- A APARELHAGEM. MATERIALIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTÔRNO.

A alimentação do modelo pode ser feita em corren--te alternanda, como é o caso da cuba eletrolítica, ou em cor--rente contínua.

Com as notações da fig. 2.1, a aparelhagem utili--zada neste trabalho compreende:

- a) Uma fonte de corrente contínua que permite uti--lizar uma tensão até de 30 volts de acôrdo com a sensibilidade desejada no modelo. Temos uti--lizado também uma bateria de acumuladores de 6 volts.
- b) Um potenciometro de medida de quatro dígitos - tiph Kelvin-Varley munido de um comutador que permite ligá-lo ao polo positivo ou negativo da



ESQUEMA DA INSTALAÇÃO

fig. 2-1

fonte, achando-se em série com o potenciômetro uma resistência não graduada de igual valor, a saber, 10.000 ohms. Esta fica ligada sempre ao polo oposto daquele do potenciômetro. Entre a resistência e o potenciômetro fica estabelecido o zero de referência.

- c) Um galvanômetro de ponto luminoso com a sensibilidade de 100 divisões para 1μ A.
- d) Uma sonda constituída de uma haste metálica -- sendo o seu corpo protegido por material isolante e tendo a extremidade destinada à exploração do campo a forma pontiaguda.
- e) Um conjunto de potenciômetros não graduados cada um de resistência interna igual a 1000 Ω associados em paralelo com a fonte e munidos de ajustes grosso e fino.

A alimentação geral dá uma diferença de potencial que podemos chamar arbitrariamente 0-100 quando é possível -- prescindir do sinal algébrico do potencial do campo ou então -100 e +100 quando sobre o contorno e no interior do campo o correm valores do potencial positivos e negativos. No primeiro caso, o fio a b é ligado diretamente ao zero do potenciômetro de medida, o comutador deixando assim de ter função.

A materialização de uma condição de Dirichlet consiste em afetar cada eletrodo de um potencial elétrico correspondente ao potencial do problema físico calculado em seu -- centro.

Esta operação faz-se da seguinte maneira: seja h um desses eletrodos no qual se quer impor o potencial U_h . Registra-se este valor no potenciômetro de medida, coloca-se a

sonda em h e manobra-se sôbre o cursor do potenciômetro h' - até que se tenha corrente nula através do galvanômetro. É -- por vêzes necessário repetir esta operação quando o número - de eletrodos a alimentar é grande pois ao manipular com um - dêles os demais podem se desregular. Convém observar também que a regulagem do zero no galvanômetro deve ser cercado do seguinte cuidado: utilizar sensibilidades sempre crescentes antes de operar o ajuste fino para evitar choque no galvanômetro.

A materialização de uma condição de Neumann consiste em injetar no eletrodo uma corrente Δi proporcional à derivada da função potencial segundo a normal ao contorno - calculada em seu centro. A imposição dessa corrente pode ser feita por dois processos. Pelo método dito das "diferenças - de potencial" , utiliza-se, para cada eletrodo a alimentar , um potenciômetro como g' e uma resistência montada como se - indica na fig.2.1. Sejam R a resistência, \bar{U} o potencial no -- cursor do potenciômetro g' e U aquele do eletrodo g. A cor--rente Δi que se estabelece no eletrodo tem por valor

$$\Delta i = \frac{\bar{U} - U}{R}$$

Fixando R, a diferença $\bar{U} - U$ fica conhecida e esta se impõe manipulando o potenciômetro até que os potenci--ais lidos nos bornos da resistência dêem a diferença desejada. O método de injeção pór diferença de potenciais permite estabelecer correntes com excelente precisão, porém à custa de uma regulagem frequentemente longa devida à convergência excessivamente lenta. Quando a precisão desejada é menor, o método seguinte, dito das grandes resistências, convém melhor por que é mais simples e não necessita de regulagens. Consiste em intercalar uma resistência R de grande valor entre o -

borbo da fonte de corrente (onde $\bar{U} = \pm 100$) e o eletrodo de -
maneira que o potencial \bar{U} resultante no eletrodo seja da or-
dem 1 ou 2 na escala 0-100. A fórmula anterior se reduz a

$$\Delta i \approx \pm \frac{100}{R}$$

e esta mostra que as resistências R devem também ser inver-
samente proporcionais às correntes Δi . O inconveniente deste
método é a redução importante da sensibilidade devida à pe-
quenez da escala de potenciais em relação à escala total ---
correspondente à diferença de potencial dada pela fonte.

O último dígito de que é formada o potenciômetro
de medida fica praticamente sem função. Temos melhorado a --
sensibilidade procurando aplicar diferença de potencial sufi-
cientemente grande compatível com a resistência do modelo e
temos aumentado a precisão da leitura, impondo ao potenciôme-
tro de medida uma fração da escala elétrica da fonte, a sa--
ber, 1/10 desta escala. Para isso, é suficiente inserir en--
tre a e b e entre c e d resistências iguais a 90.000 ohms pa-
ca cada lado.

2.7.- TÉCNICA DAS INJEÇÕES POR GRANDES RESISTÊNCIAS.

A confecção de eletrodos ao longo do contorno ---
subtendendo pequenos segmentos e a injeção de corrente por -
grandes resistências constituem técnica rheoelétrica corren-
te. Entretanto, não temos dados de nenhum autor que mostrem
a precisão resultante com o emprego simultâneo dos dois pro-
cessos em modelo de papel teledeltos. Este aspecto da ques-
tão é sobretudo importante em problemas cujas soluções em --
pontos internos do domínio de integração importam pouco como
é o caso dos escoamentos por vertedores e são no entanto fun-
damentais em pontos fronteira. É preciso saber até que ponto
se altera o campo das equipotenciais no interior da região -

do escoamento e especialmente nas vizinhanças imediatas da fronteira quando se substitui uma lei contínua de dados de Neumann por uma distribuição discreta através do processo - dos pequenos eletrodos alimentados segundo o método das grandes resistências e quando o meio condutor utilizado é o papel Teledeltos. Quando a injeção de corrente é feita pelo método potenciômetrico e o modelo é feito em cuba eletrolítica - os resultados que se obtém por confronto entre o cálculo teórico e a experimentação analógica conduzem a justificar o processo como sendo altamente satisfatório (Cf. Malavard, ref.14 pag.262).

O exemplo tratado por Malavard é clássico e simples e consiste na verificação do campo hiperbólico $\varphi = y^2 - x^2$ em um domínio retangular ABCD, AB segundo Ox e CD segundo Oy coincidindo A com a origem, e os lados guardando a seguinte relação $AD:AB=2:3$. A coincidência das linhas equipotenciais - teóricas e experimentais é excelente e os potenciais lidos nos eletrodos coincidem com os teóricos com a precisão de $\pm 3/1000$.

Consideramos exatamente o mesmo exemplo para testar ao mesmo tempo a aparelhagem aqui utilizada, a discretização das condições de Neumann pelo processo dos pequenos eletrodos e a injeção de corrente pelo método das grandes resistências. O modelo executado em papel Teledeltos tem as dimensões 30 x 20 cm. (fig.2.2). Sobre os lados AB e AD a derivada $d\varphi/dn$ é nula e sobre BC e CD temos para valor dessa derivada, respectivamente: $-2\overline{AB}$ e $2\overline{AD}$. Segundo a fórmula (2.3)

Ref.14: L.MALAVARD - La technique des Analogies électriques
Techniques générales du laboratoire de
Physique - Vol.II - Cap.XV - Ed.CNRS.

as correntes a ser estabelecidas nos eletrodos constituidos ao longo de \overline{BC} são proporcionais a $\overline{AB} \Delta y$ e ao longo de \overline{CD} -- são proporcionais a $\overline{AD} \Delta x$. As resistências são inversamente proporcionais a estes números, donde $R_x = (2/3)(\Delta x / \Delta y) \cdot R_y$ onde R_x é a resistência ao longo dos eletrodos de BC e R_y a resistência ao longo dos eletrodos em CD. O lado BC foi dividido em 16 eletrodos de largura total 12mm (dos quais 9mm ocupados pela parte condutora e 3mm formando a parte isolante) e um eletrodo de largura 8mm. O lado CD foi dividido em 13 eletrodos de largura total 24mm (dos quais 18mm para a parte condutora e 6mm para a parte isolante) e um eletrodo de 12mm. Os eletrodos foram numerados de 1 a 30 segundo a ordem crescente no sentido BCD. O eletrodo n^o 1 é o de largura total 8mm e o eletrodo n^o 30 é o de largura total 12mm (Cf. fig. 2.2). A experiência definitiva compreendeu as seguintes resistências

Eletrodo n ^o	Resistência
1	1,5 M Ω
12 a 17	1,0 M Ω p/ cada eletrodo
18 a 29	750 K Ω p/ cada eletrodo
30	1,5 M Ω

As resistências relativas aos eletrodos em BC foram conectadas ao borne -100 da fonte e as restantes foram ligadas ao borne +100.

Sendo 2 e 3 os comprimentos dos lados do domínio retangular, a função ϕ no centro do eletrodo n^o 1 ($x = 3,000$ $y = 0,04$) e no centro do eletrodo n^o 30 ($x = 0,06$, $y = 2,00$) assume os seguintes valores, respectivamente, $\phi_1 = 8,998$ e $\phi_{30} = -3,996$. Os potenciais lidos nesses eletrodos foram, respectivamente, $U_1 = 0,150$ e $U_{30} = 3,726$ (na escala 0-100). A-

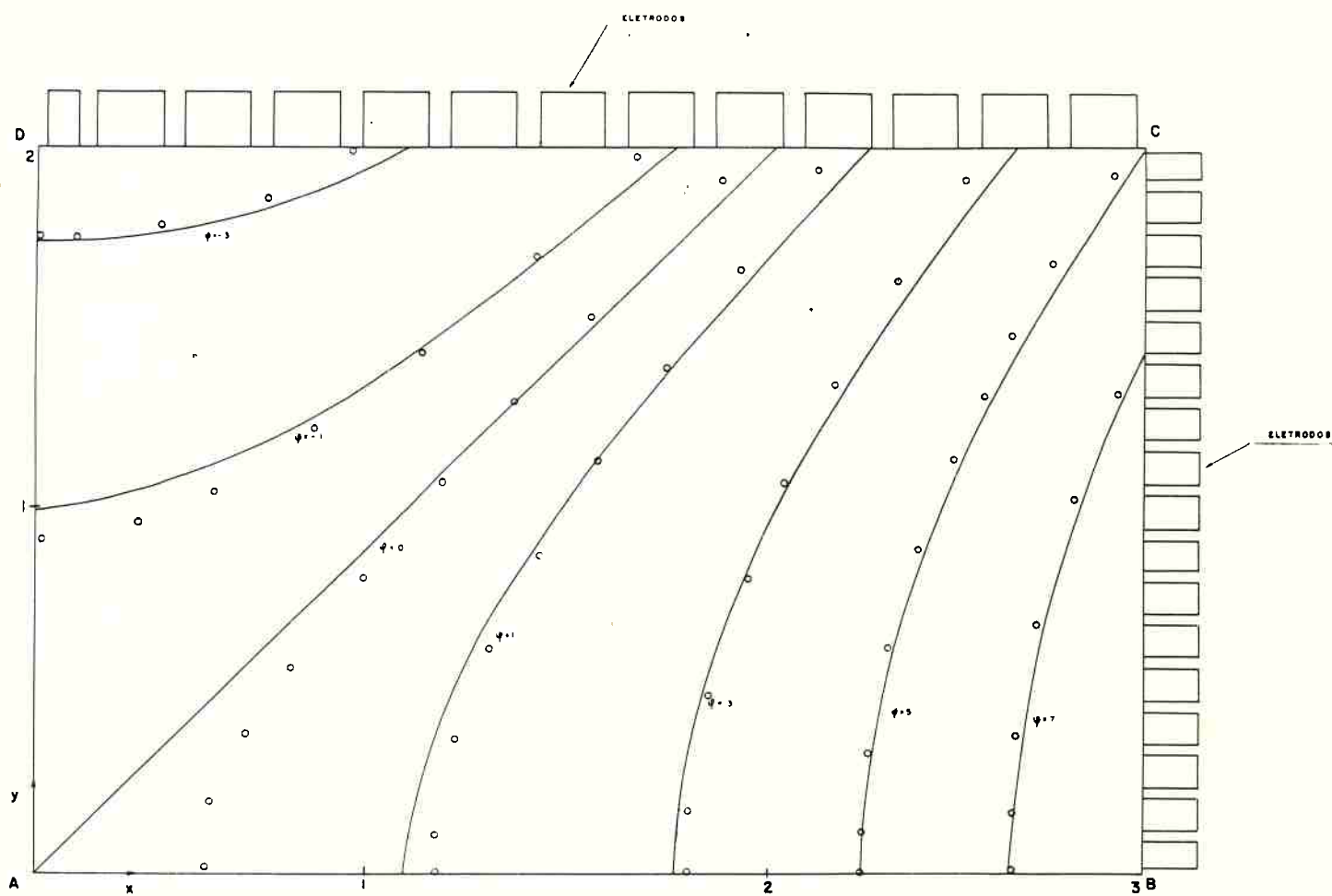
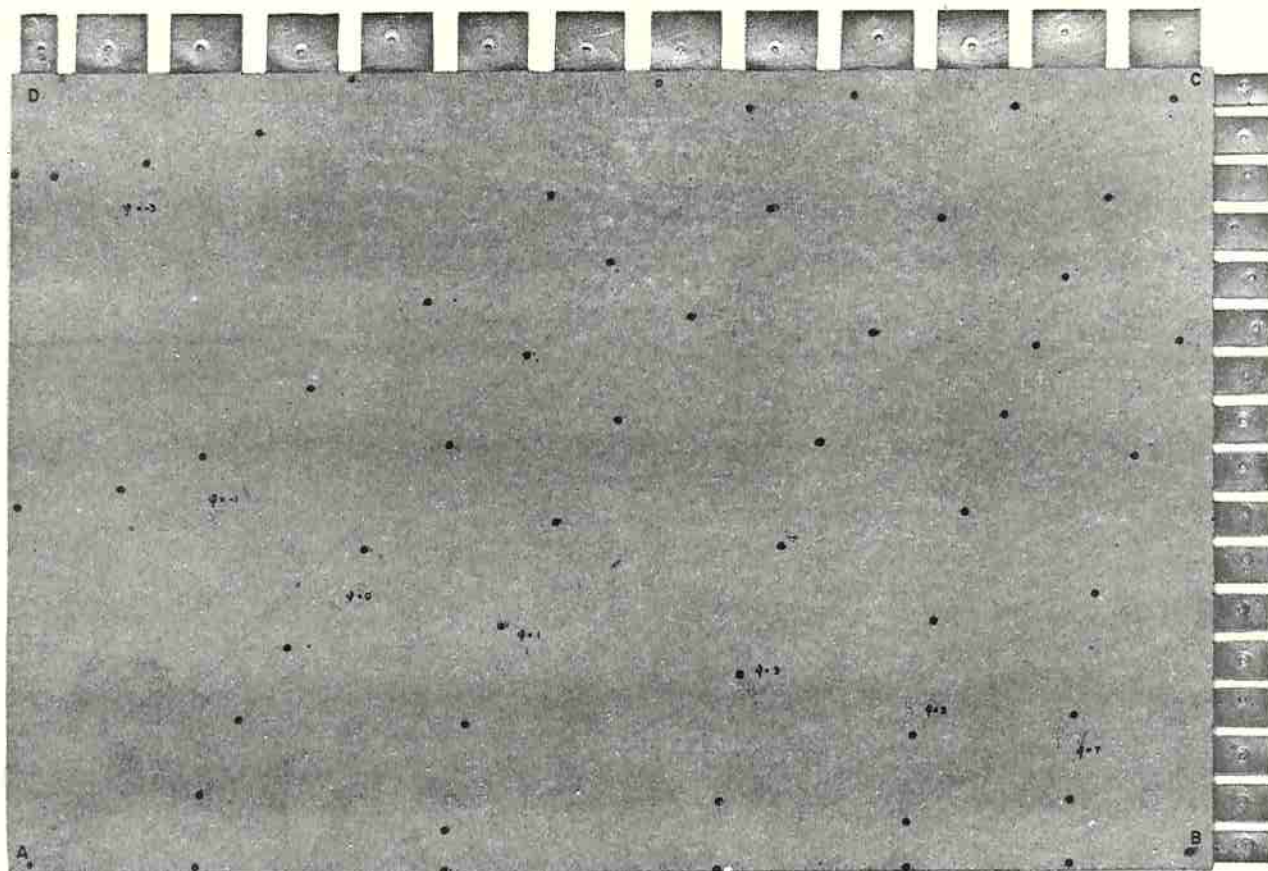
admitindo uma relação linear entre U e φ resulta a seguinte -
lei do potencial nos pontos internos e fronteira do campo, -

$$U = - 0,275\varphi + 2,625$$

Utilizando a técnica descrita no n^o 3,7 obtivemos no campo os pontos correspondentes às linhas $\varphi = 7, 5, 1, 0, -1, -3$ que se vêem na fig. 2.2 onde também traçamos para efeito de confronto as hipérboles teóricas. Detectamos, ainda, os potenciais em alguns eletrodos a partir dos quais deduzimos os potenciais experimentais que se vêem na tabela abaixo em correspondência com os potenciais teóricos:

Eletrodo n ^o	exp	φ_{exp}	$\varphi_{teórico}$
4	0,146	9,010	8,856
8	0,282	8,516	8,260
12	0,599	7,364	7,204
16	0,984	5,965	5,688
24	3,145	-1,890	-1,926
28	3,670	-3,798	-3,770

O papel teledeltos sendo dotado de uma certa heterogeneidade e anisotropia, os potenciais sendo extremamente pequenos para detectá-los com grande precisão e a dificuldade de amplificação em corrente contínua parecem ser as causas do arrastamento das hipérboles experimentais em relação às teóricas notadamente na região que cerca o vértice A (fig. 2.2). Todavia, os potenciais verificados nos eletrodos não excedendo aqueles teóricos em mais de 5^o%, em termos práticos podem ser considerados satisfatórios. Estamos, portanto, convencidos que uma maior precisão só é possível com o emprego da cuba eletrolítica e que tomando os devidos cuidados e quando a precisão desejada não é grande o modelo em papel teledeltos pode convir em geral.



linhas equipotenciais teóricas ———

potencial experimental ○

ESTUDO DE UM CAMPO HIPERBÓLICO PELO PROCESSO DOS

PEQUENOS ELETRODOS E GRANDES RESISTÊNCIAS

Fig. 2.2

CAPÍTULO III

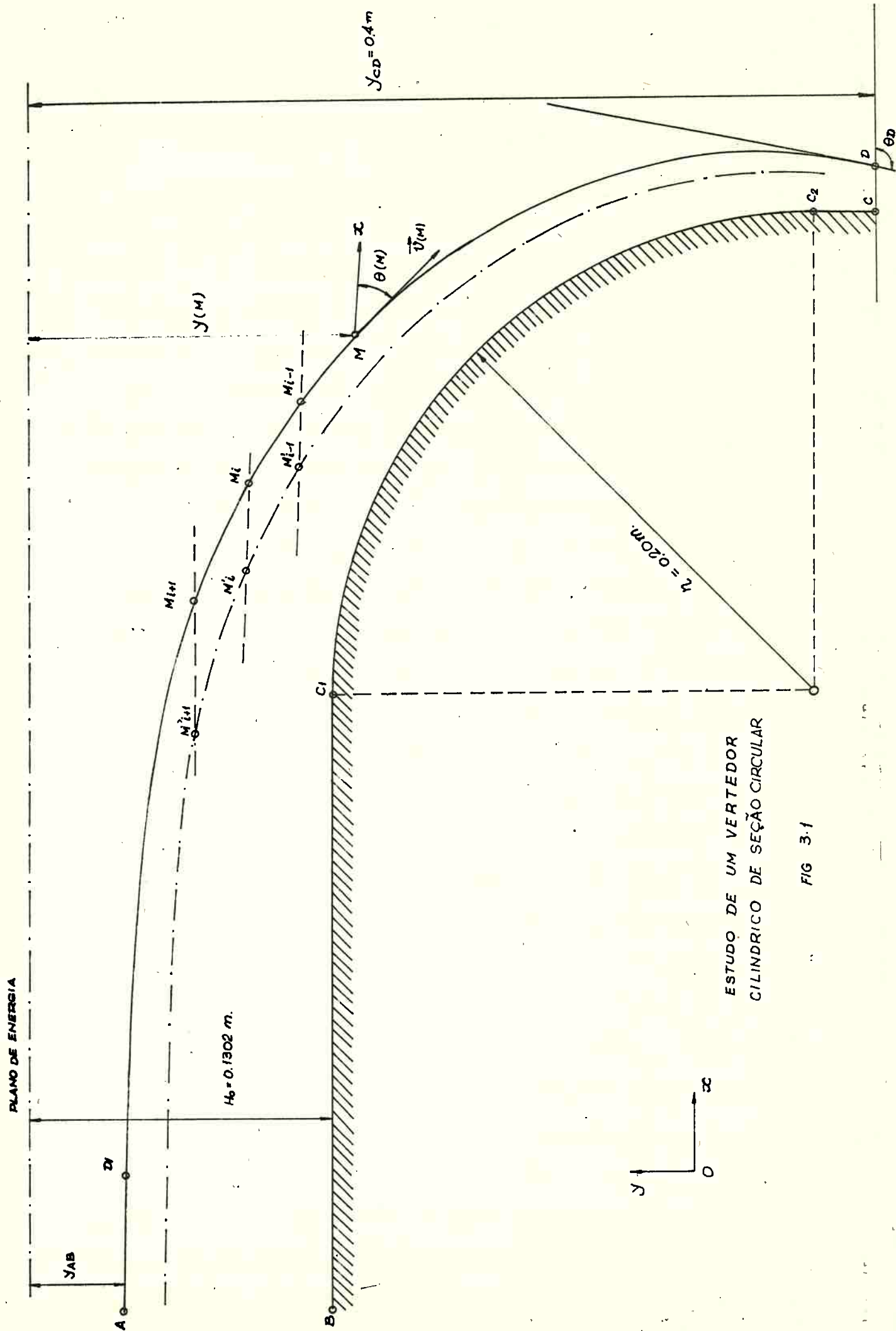
ESTUDO DE UM VERTEDOR CILINDRICO DE PERFIL CIRCULAR.

3.1.- CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES E APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Entre as diversas formas de vertedores ensaiados em laboratório, a escolha, visando a aplicação do presente método de cálculo baseado na analogia rheoelétrica, fez-se recair sobre vertedor testado experimentalmente por Boss e do qual se serviu Lauffer para comprovar a sua hipótese da concentricidade das linhas de corrente (Ref.15). O vertedor é cilíndrico de seção circular de raio $R \approx 0,2m$ precedido por canal horizontal. O fluido escôa para um plano de energia fixado na posição $H_0 = 0,1302m$ valor este computado a partir do fundo do canal (fig.3.1).

O exemplo pareceu-nos interessante porque permitiria verificar o comportamento do método rheoelétrico em relação a uma estrutura que se apresenta curva ao longo de uma extensão razoavelmente grande. Com efeito, o perfil do vertedor em questão se reduz no plano do escoamento a um quadrante de círculo o que na prática é considerado excepcional. Entretanto, se à montante ele é precedido por um canal, à jusante não se tem informação precisa quanto à forma da estrutura que o sucede, se uma parede vertical ou se o fluido descarrega diretamente na atmosfera. Optamos por uma parede vertical, o que de certo modo simplificará um pouco a implantação das condições de contorno do lado do perfil. Nesta região não é

Ref.15: HAROLD LAUFFER. Ecoulement dans les canaux a radier incurvé. Wasserkraft und Wasserwirtschaft. (Tradução CHATOU) Outubro, 1936.



ESTUDO DE UM VERTEDOR
 CILINDRICO DE SEÇÃO CIRCULAR

FIG 3.1

possível portanto o confronto da distribuição de pressões obtida pelo método rheoelétrico com aquela obtida por Boss.

Se as condições de contorno são mais simples na parede vertical à juzante do vertedor, a implantação correta destas condições, como veremos, tornam-se particularmente delicadas do lado da superfície livre que olha a parede vertical.

A primeira etapa do processo se inicia precisando a forma da região do escoamento. Matematicamente, isto -- significa que se deve precisar a forma da fronteira Γ do domínio de integração D . Esta fronteira compreende, em geral, a face interna da soleira vertente, as paredes que a precedem e sucedem, as seções de escoamento AB (à montante) e CD (à juzante). Facilita-se enormemente o processo quando AB e CD são seções de escoamento planas, i.é, seções de escoamento atravessadas por linhas de corrente sensivelmente retas paralelas. Nestas condições, a velocidade será em cada uma das seções sensivelmente constante. Na maioria dos casos práticos as seções AB e CD são retas no plano do escoamento colocadas suficientemente à montante e à juzante pois os vertedores -- são precedidos quase sempre por canais de profundidade finita ou infinita onde o escoamento é praticamente uniforme e -- são sucedidos por perfis retilíneos ao longo dos quais a superfície livre apresenta curvatura extremamente pequena.

Daí, ainda, uma outra razão por que se prolongou o vertedor circular por uma parede vertical.

A forma da superfície livre à montante do vertedor se inicia então sensivelmente horizontal. Veremos, contudo, que apesar da sua pequena curvatura ao longo do perfil retilíneo à juzante, há uma certa incidência da superfície --

livre na seção CD que não pode ser fixada arbitrariamente. Esta incidência é dada pelo ângulo que o vetor da velocidade faz com o eixo de referência Ox e que um cálculo simples precisará o seu valor. A dificuldade seguinte é a pesquisa da região de concordância entre a superfície livre que olha o -- vertedor e aquela que olha para a parede retilínea à juzante do mesmo, a saber, no caso presente é a parede vertical. Esta região é obtida com boa precisão a partir de um traçado cuidadoso da superfície livre ao longo de toda a estrutura.

Estabelecidas as seções AB e CD, a forma e a posição da superfície livre, o passo seguinte compreende agora o desenho do conjunto em papel milimetrado, detalhando na forma descrita no n^o 2.5, a fronteira de acordo com as condições de contorno a ser impostas e em seguida a execução de modelo de maneira a ficar pronto para receber a alimentação elétrica conforme será exposto do decorrer deste capítulo.

As seções AB e CD e a superfície livre sendo a priori incógnita, a exploração do modelo vai consistir em -- primeiro lugar no encaminhamento à obtenção definitiva dessas incógnitas. Isto será feito, como o veremos, por aproximações sucessivas.

3.2.- HIPÓTESES E EQUAÇÕES QUE REGEM O ESCOAMENTO.

Um fluido perfeito incompressível, em movimento plano, irrotacional e permanente, sujeito à ação da gravidade e apresentando superfície livre se rege, como se infere dos capítulos anteriores, pelas equações seguintes:

a) Em cada ponto interno à região do escoamento as funções μ (potencial logarítmico) e Ω (função argumento) são harmônicas, satisfazendo:

$$\nabla^2 \mu = 0 \quad \nabla^2 \Omega = 0 \quad (3.1)$$

b) Em cada ponto M regular as derivadas de $\mu = \lg v$ e $\Omega = -\Theta$ segundo duas direções ortogonais Mn e Ms são tais que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = -\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{\partial \Theta}{\partial s} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial \Omega}{\partial n} = -\frac{\partial \Theta}{\partial n} \quad (3.3)$$

onde

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \quad (3.5)$$

e onde $\partial \Theta / \partial s$ é, a menos de sinal, a curvatura de Ms em M.

c) Em cada ponto interno ou fronteira, as quantidades p/γ (altura de pressão ou energia potencial de pressão por unidade de peso no ponto), z (cota em relação a um plano horizontal dito de referência, ou energia potencial de posição referida à unidade de peso no ponto) e $v^2/2g$ (altura cinética ou energia cinética referida à unidade de peso no ponto) são tais que

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{Cte} \quad (3.6)$$

relação que exprime a conservação da energia (Eq. de Bernoulli) e onde p pode ser considerada a pressão efetiva (a origem das pressões atmosférica) e z contado positivo segundo a vertical ascendente. A constante é pois independente do ponto considerado e representa, geometricamente, a distância do plano horizontal de referência ao plano de energia dado e energeticamente significa a energia total por unidade de peso no ponto. Seja H esta altura total. Se o ponto M de cota $z(M)$ pertence à superfície livre onde a pressão é a atmosférica

rica, temos

$$v_{(M)}^2 = 2g [H - z_{(M)}] \quad (3.7)$$

A quantidade $H - z_{(M)}$ é positiva e representa a distância segundo a vertical descendente desde o plano de energia ao ponto M considerado. Designando por $y_{(M)}$ a esta variável, a eq.(3.7) assume a forma (Cf.fig.3.1)

$$v_{(M)}^2 = 2g y_{(M)} \quad (3.8)$$

3.2.- EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS DA SUPERFÍCIE LIVRE.

Tracemos em um ponto M da superfície livre a normal unitária \vec{n} dirigida para o interior da região do escoamento, formando com o versor da tangente \vec{s} um ângulo $+\pi/2$. Tracemos ainda, o versor da velocidade \vec{v} com a direção de referência Mx o ângulo θ (negativo no caso da fig.3.2). O vetor do gradiente da velocidade v , indicado $\vec{G}_{(v)}$, forma com Mx o ângulo β e com o vetor \vec{v} o ângulo α .

Em virtude da equação

$$v^2 = 2gy$$

temos:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{g}{v} \sin \theta$$

pois

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta$$

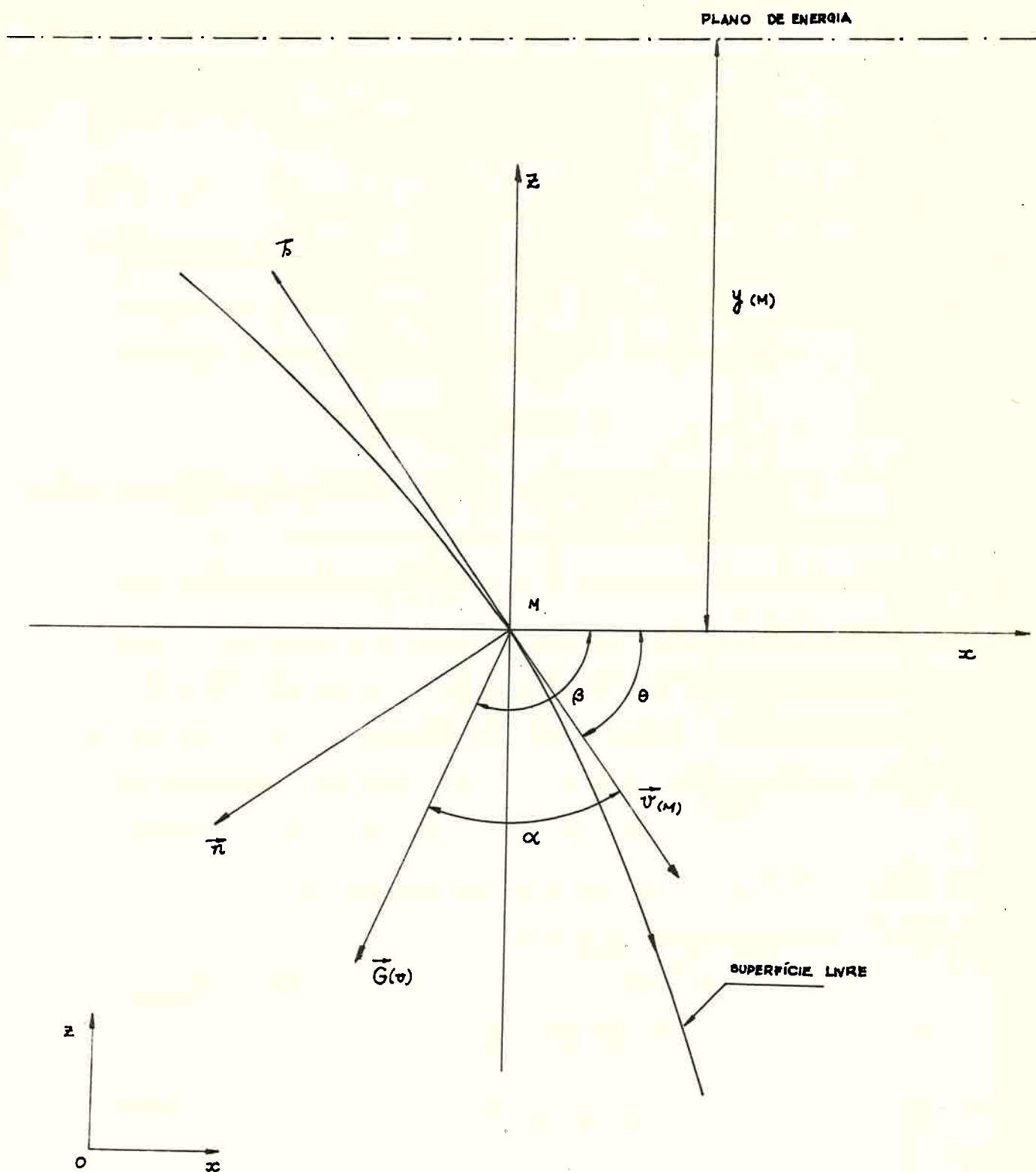
donde a expressão do mod $\vec{G}_{(v)}$:

$$G = \frac{g}{v} \frac{|\sin \theta|}{\cos \alpha}$$

Para achar a derivada da velocidade segundo a direção de \vec{n} multiplicamos G por $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$, i.é,

$$\frac{dv}{dn} = \frac{g}{v} \sin \theta \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.9)$$

donde, em consequência do exposto no n.º (3.2) a expressão do



ELEMENTOS GEOMÉTRICOS LIGADOS À SUPERFÍCIE LIVRE

raio de curvatura r da superfície livre em M:

$$\frac{1}{r} = \frac{g}{v^2} \sin \theta \operatorname{tg} \alpha \quad (3.10)$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2y} \sin \theta \operatorname{tg} \alpha \quad (3.11)$$

Segundo os eixos M_x e M_z temos, também:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{g}{v} \frac{\sin \theta}{\cos \alpha} \cos \beta \quad (3.12)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{g}{v} \frac{\sin \theta}{\cos \alpha} \sin \beta \quad (3.13)$$

As derivadas segundo as diversas direções supõe regiões das vizinhanças de M onde com boa aproximação v se exprime pela relação (3.8).

Equivale dizer que nas referidas vizinhanças a repartição das pressões é sensivelmente hidrostática. Se esta hipótese não é verificada, as derivadas acima estabelecidas não podem subsistir segundo a forma que lhes foi atribuída.

A (3.13) fornece uma relação importante entre os ângulos que aí intervêm. Com efeito, tendo presente que (3,8) se escreve também sob a forma (Cf.Eq.3.7).

$$v^2 = 2g (H-z)$$

esta dá

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{g}{v}$$

donde por confronto com (3,13)

$$\sin \theta \sin \beta = - \cos \alpha. \quad (3.14)$$

Mostremos a aplicação do presente desenvolvimen to à determinação do ângulo de incidência θ_D e do raio r da superfície livre quando o ponto M coincide com D da seção - CD (Cf.fig.3.1). Nesta seção precisamos supor y_{CD} constante e a repatição hidrostática na vizinhança adequada de D.Temos

da Eq. (3.2)

$$\left(\frac{d\mu}{dz}\right)_{CD} = \frac{1}{v_{CD}} \left(\frac{dv}{dz}\right)_{CD} = \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{CD}$$

i.é,

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{\frac{\pi}{2}}{v_{CD}} = - \frac{1}{2y_{CD}} \quad (3.15)$$

Integrando esta eq. desde $\theta_c = - \pi/2$ até θ_D vem:

$$\theta_D = - \frac{\pi}{2} - \frac{\overline{CD}}{2y_{CD}} \quad (3.16)$$

que é o ângulo de incidência da superfície livre D.

A derivada de v_{CD} segundo CD é nula, donde, em virtude da relação (3.12):

$$\cos \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

A equação (3.14) dá:

$$\sin \theta_D = - \cos \alpha_D = \sin(\alpha_D - \frac{\pi}{2})$$

i.é:

$$\theta_D = \alpha_D - \frac{\pi}{2}$$

donde

$$\alpha_D = - \frac{\overline{CD}}{2y_{CD}}$$

O raio de curvatura r_D , a partir de (3.11), será

$$\frac{1}{r_D} = \frac{1}{2y_{CD}} \cos \frac{\overline{CD}}{2y_{CD}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\overline{CD}}{2y_{CD}} \approx \frac{\overline{CD}}{4y_{CD}^2}$$

já que o ângulo $\overline{CD}/2y_{CD}$ é bastante pequeno. Temos, então:

$$r_D = \frac{4y_{CD}^2}{\overline{CD}} \quad (3.17)$$

Notemos, agora que CD , sendo muito pequeno deante de y_{CD} , o raio de curvatura será extremamente grande em D ao ponto de poder confundir o arco da superfície livre mergulhando em D com uma porção da tangente geométrica formando com a direção Dx o ângulo $\theta_D = - \pi/2 - (\overline{CD}/2y_{CD})$. Esta propriedade geométrica permite traçar a superfície livre na região que olha

a parede vertical da fig.3.1, concordando em seguida suavemente com aquela parte que olha o perfil circular. A região de concordância só pode ser obtida com boa precisão num traçado gráfico elaborado em escala adequadamente grande.

3.4.- CONDIÇÕES DE CONTÔRNO PARA A FUNÇÃO μ .

A fronteira Γ que encerra em seu interior a região do escoamento interessando o problema enunciado no n.º 3.1 compreende a seção de escoamento AB, o fundo do canal BC_1 , o perfil do vertedor C_1C_2 , a Parede vertical C_2C , a seção de escoamento CD e a superfície livre DA. Convindo em adotar a circulação ao longo de Γ no sentido positivo, a saber, com a normal unitária \vec{n} aplicada nos pontos de Γ olhando sempre para o interior da região do escoamento e o versor da tangente \vec{s} a Γ - em cada um de seus pontos formando um ângulo positivo $+\pi/2$ - com \vec{n} , as condições de contôrno se enunciam da seguinte maneira:

a) Sobre AB:

Na região do escoamento envolvendo a seção AB temos evidentemente

$$\text{grad } v = 0$$

que se pode decompor em duas:

$$a_1) \quad v_{AB}^2 = 2gy_{AB} = \text{Cte.}$$

donde

$$\mu_{AB} = \lg v_{AB} = \text{Cte.} \quad (3.18)$$

$$a_2) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

donde, nos pontos de AB:

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{1}{v_{AB}} \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (3.19)$$

A condição a_1) não é conhecida no caso geral dos escoamentos por vertedores pois AB e portanto y_{AB} são incógnitas. Estas grandezas só são conhecidas no caso em estudo por

que se podem obter, conforme veremos, impondo a condição de vazão máxima para um plano de energia dado (Ref.16, pag.284). Supô-las, entretanto, conhecidas invalidaria praticamente a generalidade a que se propõe no presente trabalho.

Devemos, então, considerá-las como grandezas a ser determinadas dentro do processo que conduz à pesquisa da superfície livre.

b) Sobre BC_1 e C_2C .

O fundo do canal é uma linha de corrente retilínea horizontal. O ângulo θ permanece também constante ao longo de C_2C . Temos então, em virtude da Eq.(3.2):

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{d\theta}{ds} = 0 \quad (3.20)$$

c) Sobre C_1C_2 .

O perfil do canal é circular de raio r , ao mesmo tempo linha de corrente. Temos, portanto, em virtude da mesma Eq. (3.2):

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{d\theta}{ds} = - \frac{1}{r} \quad (3.21)$$

d) Sobre CD .

Tanto quanto AB , a seção CD vai ser considerada também como incógnita. São indispensáveis ao processo o conhecimento das seguintes condições:

$$d_1) \quad v_{CD}^2 = 2g y_{CD} = \text{Cte.} \quad (3.22)$$

donde

$$\mu_{CD} = 1g v_{VD} = \text{Cte.}$$

$$d_2) \quad \frac{\partial \mu}{\partial n} = - \frac{1}{2y_{CD}} \quad (3.23)$$

Conforme reza a Eq.(3.15)

e) Sobre DA.

Para compensar o efeito que a superfície livre é incógnita, duas condições são então indispensáveis à sua determinação. Estas são:

$$e_1) v_{(M)}^2 = 2g y_{(M)} \\ \text{donde (V. Fig.3.1):}$$

$$\mu_{(M)} = 1g v_{(M)} \quad (3.24)$$

$$e_2) \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_M = \left(\frac{\partial Q}{\partial n}\right)_M = \frac{1}{r_{(M)}} \quad (3.25)$$

sendo $r_{(M)}$ o raio de curvatura de superfície livre em M (Cf.Fig.3.1).

Vamos, assim, que a representação da função μ é fundamentalmente um problema de Neumann. Demonstra-se, como o sabemos, que o problema de Neumann só é possível se

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \mu}{\partial n} ds = 0 \quad (3.26)$$

condição evidentemente necessária já que μ é harmônica. Sob a condição (3.26) o problema de Neumann admite solução a menos de uma constante aditiva (Cf.Ref.17,pag.314). Examinando os dados no contorno acima estabelecidas a (3.26) fica perfeitamente satisfeita.

3.5.- ANALOGIA DIRETA.

A exploração da analogia entre a função potencial logarítmica μ e o potencial elétrico - designada analogia direta por razões já vistas no n.º 2.2 - permite determinar - inicialmente a superfície livre e, em seguida, as linhas iso-velocidades (que são evidentemente as linhas $\mu = Cte$) e, em consequência, as equipressões (em particular, a repartição

das pressões ao longo do peril).

Procuremos a realização dos dados de Newmann fazendo as injeções de corrente pela técnica das grandes resistências. Esta técnica, malgrado os inconvenientes que implica do ponto de vista da precisão, é a mais expedita e ao mesmo tempo suscetível de realização em face dos recursos disponíveis.

A forma de proceder é então a seguinte. Admitindo que a função potencial elétrica U se identifica com a função logarítmica μ através de uma lei linear,

$$U = a \mu + b \quad (3.27)$$

onde a e b são duas constantes a determinar, as derivadas segundo a normal dessas funções em cada ponto M de Γ ficam relacionadas por:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = a \frac{\partial \mu}{\partial n} = a \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (3.28)$$

Podemos fixar estas derivadas fazendo estabelecer uma corrente elétrica Δi em um segmento curvilíneo Δs contendo em seu centro o ponto M de acordo com a lei (2.3):

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \rho \frac{\Delta i}{\Delta s}$$

Se alimentarmos o eletrodo correspondente a Δs por meio de uma resistência R , U sendo o potencial no eletrodo e \bar{U} o potencial na entrada da resistência, resulta finalmente a expressão:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\rho}{\Delta s} \cdot \frac{\bar{U} - U}{R} \quad (3.29)$$

A técnica de injeção de corrente por grandes resistências consiste, como já o fizemos notar no Cap. II, em utilizar resistências R suficientemente grandes de maneira que o potencial resultante U no eletrodo seja da ordem de 1a

2°/o do potencial \bar{U} .

Se fizermos $\bar{U} = 100$, que é por convenção o potencial num dos bornos da fonte, U deverá resultar da ordem 1 - ou 2 na escala 0-100. Com esta restrição das resistências R , a fórmula (3.29) torna-se

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} = - \frac{\rho}{\Delta s} \frac{100}{R}$$

Substituindo em (3.28) $\frac{\partial \theta}{\partial s}$ por $\Delta \theta / \Delta s$, onde $\Delta \theta = \theta(s+\Delta s) - \theta(s)$, as resistências R deverão ser agora tais que

$$R \Delta \theta = - \frac{\rho}{a} 100 \quad (3.30)$$

ou seja, devem se constituir em uma sequência de valores inversamente proporcionais às aberturas angulares $\Delta \theta$.

Vemos, ainda, que se pode estabelecer a seguinte convenção de sinais: Impor $\bar{U} = +100$ quando a resistência conecta eletrodo para o qual $\Delta \theta < 0$ e $\bar{U} = -100$ em caso contrário.

As condições de contorno estabelecidas no n° anterior se materializam, agora, por:

a) Sobre AB.

Para satisfazer a condição $\mu_{AB} = \text{Cte}$, AB deve ser um eletrodo contínuo cujo potencial U_{AB} se impõe naturalmente. Deve, ainda, ficar sem injeção de corrente pois $\frac{\partial \mu}{\partial n} = 0$ implica em variação $\Delta \theta_{AB}$ nula ao longo de AB.

b) Sobre EC_1, C_2C

As variações $\Delta \theta$ sendo nulas ao longo destas - partes do contorno Γ , devemos ter EC_1 e C_2C isolantes.

c) Sobre C_1C_2 .

O ângulo $\theta(s)$ sendo variável ao longo do perfil C_1C_2 , a técnica consiste em dividi-lo em segmentos curvi

lineos elementares de extensão Δs tais que nos pontos extremos se tenha $\theta(s)$ e $\theta(s+\Delta s)$ suficientemente próximos. A imposição $\Delta\theta$ se faz por eletrodos conectados ao borne da fonte de corrente por meio de resistências de grande valor. Cada eletrodo é separado do seu vizinho por um pequeno intervalo i isolante ocupando um espaço que é função dos espaços ocupados pelos eletrodos que o cercam. Do exposto no n.º 2.5 se conclui que o espaço da parte condutora é da ordem $3 \Delta s/4$ e o de cada parte isolante é da ordem $\Delta s/8$.

Notemos, ainda, que ao longo do perfil C_1C_2 temos $\Delta\theta < 0$, os bornos de entrada das resistências sendo levadas ao potencial $\bar{U} = +100$ do borne da fonte de corrente.

d) Sobre CD.

Para satisfazer a condição $\mu_{CD} = \text{Cte}$, CD se constitui de um único eletrodo onde o potencial U_{CD} se implanta naturalmente. Mas, ao contrário do que ocorre com a seção AB, através de CD a corrente não é nula, sendo dada pela variação angular $\Delta\theta_{CD} = -\bar{CD}/2y_{CD}$. A resistência que conduz a corrente nesta seção é então conectada ao borne $\bar{U} = -100$ da fonte de corrente.

e) Sobre DA.

Ao longo da superfície livre aparamos do mesmo modo que em C_1C_2 , dividindo-a em segmentos curvilíneos Δs e injetando correntes por meio de resistências cujos bornos de entrada, em razão do sinal de $\Delta\theta$, são conectadas ao borne $\bar{U} = -100$ da fonte de corrente. A verificação da condição -- (3.24) será apresentada mais adiante.

As resistências, já o dissemos, se constituem de valores inversamente proporcionais às variações $\Delta\theta$. Retomando a Eq. (3.30), e prescindindo do sinal de $\Delta\theta$, temos

$$R \Delta \theta = \text{const. } K$$

As resistências R se calculam então por

$$R = \frac{K}{\Delta \theta} \quad (3.31)$$

Temos determinado a constante K de maneira a resultar satisfeita a condição de potenciais U extremamente pequenos.

Por razões de viabilidade, executamos também os eletrodos compreendendo quase sempre a mesma variação angular $\Delta \theta$ ao longo de cada parte do contorno, o que conduz a implantar resistências iguais. Esta operação é muito simples ao longo de $C_1 C_2$, que é um quadrante de círculo, e onde aberturas angulares iguais subentendem arcos Δs iguais. Ao longo da superfície livre, porém, o modo de proceder é outro. Utilizando-se das fórmulas de derivação e de interpolação descritas no n.º 1.7, calculamos em alguns pontos os coeficientes angulares das retas tangentes, daí deduzimos os ângulos que essas tangentes formam com a direção positiva do eixo de referência Ox e em seguida os arcos Δs que subentendem aberturas iguais $\Delta \theta$. Entretanto, durante a subdivisão, podem surgir eletrodos muito pequenos ou muito grandes e este feito temos contornado mediante arcos subentendo aberturas múltiplas ou submúltiplas da abertura $\Delta \theta$ tomada para referência. Os novos eletrodos assim formados vão necessitar de resistências que se podem obter facilmente recorrendo às associações em série ou em paralelo, e conforme o caso, em associações mixtas. A realização deste trabalho, por exemplo foi possível graças a apenas um conjunto de 70 resistências de 1 M Ω e 64 resistências de 750 K Ω executadas com tolerância de 1%.

Julgamos, também, oportuno tecer algumas considerações a respeito do método de cálculo das variações angula-

res $\Delta\theta$ e dos arcos Δs que o fizemos com o emprêgo das fórmulas da derivação e interpolação numéricas apresentados no nº 1.7. Os perfis dos vertedores são muitas vêzes dados por meio de expressões analíticas, a derivação e a interpolação -- não apresentam portanto dificuldades de nenhuma ordem e a -- precisão dos cálculos resulta extremamente satisfatória.

No caso da superfície livre, porém, fomos forçados a recorrer ao cálculo por diferenças finitas. Aquelas apresentadas no nº 1.7 constituem exemplos de fórmulas aplicáveis ao caso presente.

A escolha recaiu nestas fórmulas, porque é sabido que os métodos de integração numérica das equações diferenciais de derivadas parciais - entre eles o método da relaxação - as têm utilizado com sucesso em problemas envolvendo fronteiras de formas complicadas.

Entretanto, este fato não nos isenta de fazer uma verificação por confronto com resultados teóricos conhecidos. Por menor que seja o intervalo de derivação, as diferenças se fazem evidentes nas regiões em que há fortes curvaturas, por exemplo.

No caso da superfície livre, se acresce ainda uma outra dificuldade devida ao seu traçado que é feito a mão.

Além de apresentar regiões de grandes curvaturas apresenta-se também afetada de pequenas irregularidades. Representando num gráfico cartesiano o coeficiente angular m - das retas que lhe são tangente em função das abscissas x de seus pontos vamos encontrar certamente uma determinada flutuação, às vêzes apreciável, tudo indicando haver uma curva média $\bar{m}(x)$ que se deve utilizar para daí deduzir em cada ponto

da superfície livre o coeficiente angular mais provável. Este fato nos tem sugerido a regularização dos coeficientes angulares segundo método de Vernotte (Ref.18). Entretanto, os resultados fornecidos pelo modelo diferem pouco de um caso para outro em consequência talvez da ocorrência de fatores de maior influência, os quais, em parte, foram destacados no nº 2.7.

3.6.- CONDIÇÕES SUPLEMENTARES. PESQUISA DA SUPERFÍCIE LIVRE.

As condições de contorno estabelecidas no nº 3.4 não bastam entretanto para resolver o problema proposto em face do número elevado de incógnitas entre as quais, prioritariamente, se colocam a determinação das dimensões das seções AB, CD e a pesquisa da forma e da posição da superfície livre.

Com efeito, não existam elementos suficientes para deduzir os valores das constantes a e b da Eq.3.27 afim de estabelecer a lei que rege o potencial correspondente aos pontos internos e fronteiras do campo.

Durante a elaboração deste trabalho, entre as hipóteses formuladas que figuravam como mais razoáveis a equação da continuidade escrita para tubos de corrente parecia preencher condições bastante satisfatórias. Esta equação dá para as seções extremas a seguinte relação

$$v_{CD} \cdot \overline{CD} = v_{AB} \cdot \overline{AB} \quad (3.32)$$

já que AB e CD são seções de escoamento planas (i.é, atravessadas por trajetórias sensivelmente retas paralelas). Sob a forma (3.32), a equação da continuidade fornece os elementos

Ref.18: P.VERNOTTE. La dérivation des courbes expérimentales. Comptes rendus.t.246, pg.2124-2125. junho,1955

necessários aos cálculos de a e b .

Com efeito, sendo dado v_{CD} (pois CE é horizontal) e tendo fixado \overline{AB} e \overline{CD} segundo um critério exposto logo adiante, a equação (3.32) fornece o valor de v_{AB} . Detectando no modelo os potenciais U_{AB} e U_{CD} , o sistema de equações

$$U_{AB} = a \lg v_{AB} + b$$

$$U_{CD} = a \lg v_{CD} + b$$

dá as raízes procuradas a e b com o que se tem finalmente a expressão do potencial em cada ponto do campo ($U = a \mu + b$).

O problema, no entanto, não está ainda resolvido. Resta estabelecer uma outra condição de origem física capaz de conduzir ao acerto final da superfície livre. Para melhor compreender este ponto, vejamos inicialmente o processo preconizado para a obtenção da superfície livre. Durante a elaboração da forma do modelo, fixa-se uma vazão em volume Q que se presume ser maior que aquela correta, i.é, que se estabelece em correspondência com o plano de energia imposto. Calcula-se a seção CD pela fórmula:

$$Q = \sqrt{2gy_{CD}} \cdot \overline{CD}$$

pois y_{CD} é conhecido. Em seguida fixa-se uma seção AB que se presume ser maior que a que teria lugar com a vazão correta. Calcula-se pela fórmula

$$Q = \sqrt{2gy_{AB}} \cdot \overline{AB}$$

a carga y_{AB} sob a qual o líquido estaria escoando. Temos evidentemente $y_{AB} > H - \overline{AB}$. Vemos, portanto, que AB deve ser -- tal que a carga resultante y_{AB} seja maior que aquela que se presume ser correta. Com as variáveis y_{CD} e y_{AB} temos então a lei do potencial [Eq.(3.27)]. Traça-se a lápis sôbre o mo-

dêlo linhas horizontais, dê preferência equidistantes, (V. - fig.3.1), correspondendo cada uma delas a uma carga $y_{(M)}$, ou o que é o mesmo, à velocidade $v_{(M)}^2 = 2gy$ que estaria se verificando na interseção M da linha horizontal com a superfície livre caso esta fosse correta. O potencial elétrico $U_{(M)}$ é então conhecido segundo a Eq.3.27. Se o potencial lido no -- ponto de interseção M_1 de cada horizontal com a superfície - livre coincidir com o potencial calculado o problema estaria resolvido, Na primeira tentativa isto não pode acontecer e, então, cada potencial vai ser procurado ao longo da horizon- tal no interior do modelo. Este revela os pontos M_1' como ca- racterísticos da superfície livre a ser assumida para a rea- lização da tentativa seguinte. Por precaução traça-se a su- - perfície livre na tentativa seguinte numa posição intermediá- ria, entre a posição anterior dada pelos pontos M_1 e a posi- ção sugerida pelo modelo correspondente aos pontos M_1' . Nes- ta nova tentativa e seguintes é que surgem verdadeiramente as dificuldades. De fato, o feito segundo o qual mediante o pro- cesso acima descrito e com o enprêgo da equação da continui- dade, os pontos M_1 caem no interior do modelo é realmente a nimador e efidência que a lei de convergência assim iniciada pode conduzir a bons resultados. Acontece, porém que o impas- se se dá quando, ao refazer a forma do modelo para a tentati- va seguinte, tendo diminuído CD e portanto a vazão, na nova seção AB pode resultar um y_{AB} maior ou menor que o adotado - anteriormente. Se maior, a convergência daí em diante não é evidentemente possível. Se menor, pode se dar o caso da so- ma $y_{AB} + \overline{AB}$ resultar inferior a H_0 [que é a distância segundo a vertical que separa o fundo do canal do plano de ener- - gia imposto (Cf.fig.3.1) e os pontos M_1' cair fora do modelo.

Isto que acabamos de dizer são constatações experimentais dadas pelo modelo. O critério com o qual temos conseguido resultados satisfatórios consiste no seguinte: é preciso que às diminuições de \overline{AB} corresponda diminuições de y_{AB} de tal sorte que a soma $\overline{AB} + y_{AB}$ tenda a H_0 por valores superiores a H_0 . Operando desta maneira a convergência torna-se extremamente rápida. Atingidos os valores convenientes de AB e y_{AB} , o passo seguinte compreende a deformação da superfície livre afim de aproximar as cargas experimentais $y_{(M)}$ às cargas teóricas existentes correspondentes ao centro de cada eletrodo (Cf. n.º 3.9). Os resultados experimentais adiante citados foram obtidos em menos de um dia e meio de trabalho. Ajudado por um técnico de laboratório, a tarefa completa compreendeu a execução de cinco modelos e a exploração do campo. Esta última operação pode ser feita em menos de uma hora de trabalho. Do ponto de vista da precisão, julgamos que são -- compatíveis com o meio condutor utilizado (papel teledeltos) e os demais recursos disponíveis.

3.7.- TRAÇADO DAS ISOVELOCIDADES.

A determinação do campo das equipotenciais $\mu = Cte$ (ou $v = Cte$) é uma operação extremamente simples e rápida: faz-se por meio da sonda posta a um determinado potencial - $U(\mu)$.

Disposta com a sua ponta ortogonalmente ao papel teledeltos, desloca-se em seguida nesta posição até obter -- corrente nula através do galvanômetro. Isto é sinal de que o potencial no ponto de contacto é igual ao potencial da sonda. Uma leve pressão sobre a sonda deixa uma marca visível sobre o papel que materializa o ponto de contacto em questão. Dê-se modo é possível traçar por pontos uma linha equipotencial $\mu = Cte$.

3.8.- ANALOGIA INVERSA.

Tendo sido determinada a posição da superfície livre e as dimensões das seções AB e CD é preciso confeccionar um segundo modelo para realizar a analogia inversa que é a representação da correspondência entre a função argumento $\Omega = -\theta$ e o potencial elétrico U.

Esta representação é muito simples. Com as notações da fig.3.1 temos:

a) Sobre D_1A , AB e BC_1 : $\Omega = 0$ pois ao longo destas partes da fronteira Γ é nulo o ângulo que o vetor da velocidade forma com a direção de referência Ox.

b) Sobre C_1C_2 e DD_1 : $\Omega = -\theta$ que é uma repartição angular simples de ser obtida a partir dos cálculos já elaborados para a representação da analogia direta.

Notemos que em D o ângulo é dado por $\theta_D = -\frac{\pi}{2} - \frac{\overline{CD}}{2y_{CD}}$

c) Sobre C_2C : $\Omega = +\frac{\pi}{2}$

d) Sobre CD: $\Omega = -\theta$ variável linearmente desde $\theta_C = -\frac{\pi}{2}$ até $\theta_D = -\frac{\pi}{2} - \frac{\overline{CD}}{2y_{CD}}$

Vemos que a representação da função Ω é tipicamente um problema de Dirichlet. O projeto do modelo compreende eletrodos contínuos ao longo de D_1AB , C_1 , C_2C , CD e eletrodos por pequenos segmentos curvilíneos de extensão Δs afim de subsistir ao longo de C_1C_2 e DD_1 a repartição contínua de potenciais Ω por valores discretos, fazendo corresponder o potencial elétrico a ser fixado no eletrodo ao valor Ω calculado em seu centro.

Esta técnica tem sido evidenciada como bastante satisfatória sobre inúmeros exemplos concretos.

Executado o modelo em papel Teledeltos, a fixação dos potenciais é feita pelo método potenciométrico (Cf. - n^o 2.6) - Estes potenciais são números proporcionais aos valores de Ω na escala 0-100. O traçado das linhas $\theta = Cte$ é feito pelo mesmo processo descrito no n^o 3.7.

No estudo dos vertedores e no caso particular que estamos estudando o conhecimento da função argumento nos pontos internos da região de escoamento tem interesse mais teórico que prático. Com efeito, a menos que surjam problemas - especiais pertinentes a este tipo de escoamentos (cálculo de esforços, p.ex.) os ângulos podem interessar particularmente em pontos fronteira, exatamente para a ampliação do domínio de integração na analogia direta (caso de regiões de alta de pressão no contorno sólido). Prescindimos, pois, da realização prática da analogia inversa por não apresentar ao mesmo tempo interesse prático convincente e dificuldades especiais quanto à sua representação rheoelétrica.

3.9.- RESULTADOS EXPERIMENTAIS.

Os dados do problema enunciado no n^o 3.1 são:
raio $r_{C_1C_2} = 0,2m$; o plano de energia imposto na posição ---
 $H_0 = 0,1302m$ montado acima do fundo do canal; a seção AB foi posicionada suficientemente à montante e a seção CD foi colocada a uma distância do plano de energia igual a $y_{CD} = 0,4m$

As incógnitas do problema são: as dimensões das seções AB e CD, a forma da superfície livre, a carga y_{AB} , a vazão por unidade de largura da soleira vertente Q , a distribuição das velocidades e das pressões ao longo do vertedor e o traçado das isovelocidades no interior da região de

escoamento delimitada por $\Gamma = ABCDA$.

Na primeira tentativa tomamos $y_{AB} \approx 0,055\text{m}$ e a seção $\overline{AB} = 0,095\text{m}$ de maneira que pela equação da continuidade, para $y_{CD} = 0,4\text{m}$, resulta $\overline{CD} \approx 0,036\text{m}$. A partir do modelo construído com estas dimensões foram necessárias quatro tentativas para se chegar à forma definitiva da superfície livre e às dimensões das seções AB e CD (V.fig.3.3). O critério segundo o qual consideramos aceitável a forma da superfície livre é a seguinte: a carga y obtida a partir do potencial elétrico lido no eletrodo não excede a carga y existente no centro do eletrodo em mais de $2^{\circ}/\%$.

Esta precisão não poderia ser melhor pelo que se depreende do exposto no n.º 2.7. Damos a seguir o cálculo elaborado para o modelo final, o qual vai aqui reproduzido a título de ilustração e tendo em vista que este tipo de cálculo se repete identicamente em qualquer fase do processo.

O perfil C_1C_2 foi dividido em 36 eletrodos iguais subentendendo cada um deles abertura angular igual a $\Delta\theta = -2,5^{\circ}$ ou $-0,0436\text{rd}$. Para estes eletrodos foram adotados resistências iguais a $1,0\text{M}\Omega$, donde a constante da fórmula (3.31):

$$K = R |\Delta\theta| = 1\,000\,000 \times 0,04363 = 43\,630$$

Os eletrodos foram numerados em ordem crescente no sentido C_1C_2 CD AB, recebendo o número zero o que tem por extremidade o ponto C_1 . O eletrodo em CD de número 37 sofre a variação angular $\Delta\theta_{CD}$, igual a, sendo $\overline{CD} = 0,0285\text{m}$, $y_{CD} = 0,4\text{m}$, [Cf.Eq.(3.16)]:

$$\Delta\theta_{CD} = - \frac{0,0285}{2 \times 0,4} = -0,0363$$

donde o valor da resistência correspondente em virtude da mesma fórmula (3.31) e da constante K acima calculada:

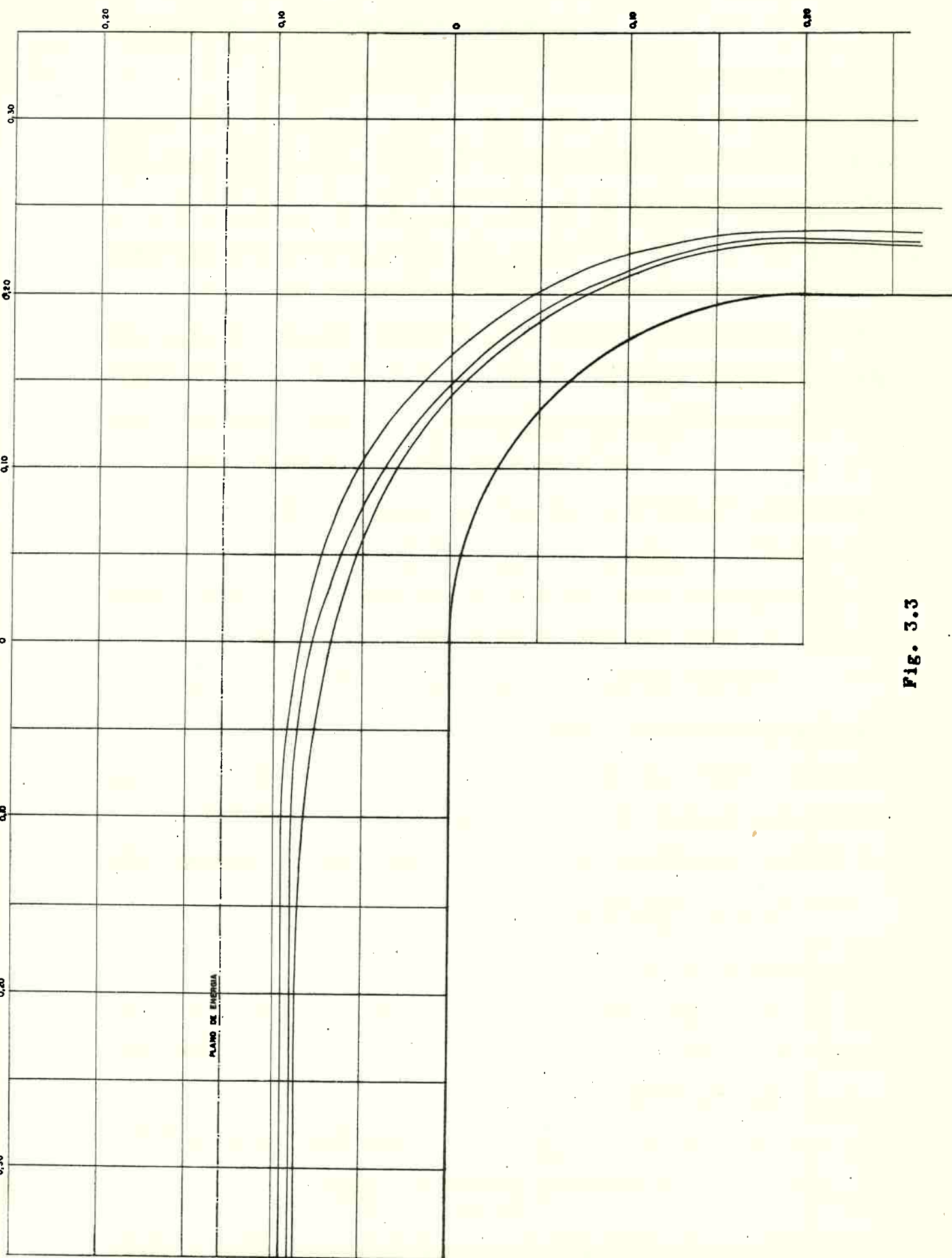


Fig. 3.3

$$R_{CD} = \frac{43,630}{0,0363} = 1\ 200\ 000\ \text{ohms}$$

ou seja uma resistência de 1,0 MΩ em série com cinco resistências de 1,0 MΩ associadas entre si em paralelo (fig.3.4).

A superfície livre incide no ponto D segundo o ângulo:

$$\theta_D = -\frac{\overline{CD}}{2y_{CD}} - \frac{\pi}{2}$$

ou seja $-92^{\circ},05$. Seu traçado se confunde com o arco de circunferência de extensão 0,04m e de raio [V.fórmula(3.17)]:

$$r_D = \frac{4y_{CD}^2}{\overline{CD}} = \frac{4 \times 0,04^2}{0,0285} \approx 22,4\text{m}$$

donde a variação angular sofrida pelo eletrodo n° 38:

$$\Delta\theta_{38} = \frac{0,04}{22,4} = 0,00178\ \text{rd ou } 0,1^{\circ}.$$

à qual corresponde a resistência

$$R_{38} = \frac{43,630}{0,00178} = 24\ 510\ 000\ \text{ohms}$$

Esta, em virtude de seu elevado valor, poderia ser suprimida, o que equivale a suprimir o eletrodo n° 38, tornando-o isolante. Entretanto, temos constatado que a sua supressão acarreta uma certa alteração desfavorável sobre os potenciais dos eletrodos vizinhos. O eletrodo n° 39 abrange a região de concordância da parte da superfície livre sensivelmente vertical ($\theta = x - \frac{\pi}{2}$) com a parte em arco de circunferência ($r_D = 22,4\text{m}$). A sua variação angular é então:

$$\Delta\theta_{39} = 0,0363 - 0,0017 \approx 0,0346$$

donde $R_{39} = 1,26\ \text{M}\Omega$ (uma resistência de 1,0 MΩ associada em série com quatro resistências de 1,0 MΩ associadas entre si em paralelo)

Os demais eletrodos, distribuídos ao longo da superfície livre, do n° 40 ao n° 63 subentendem variações ângu

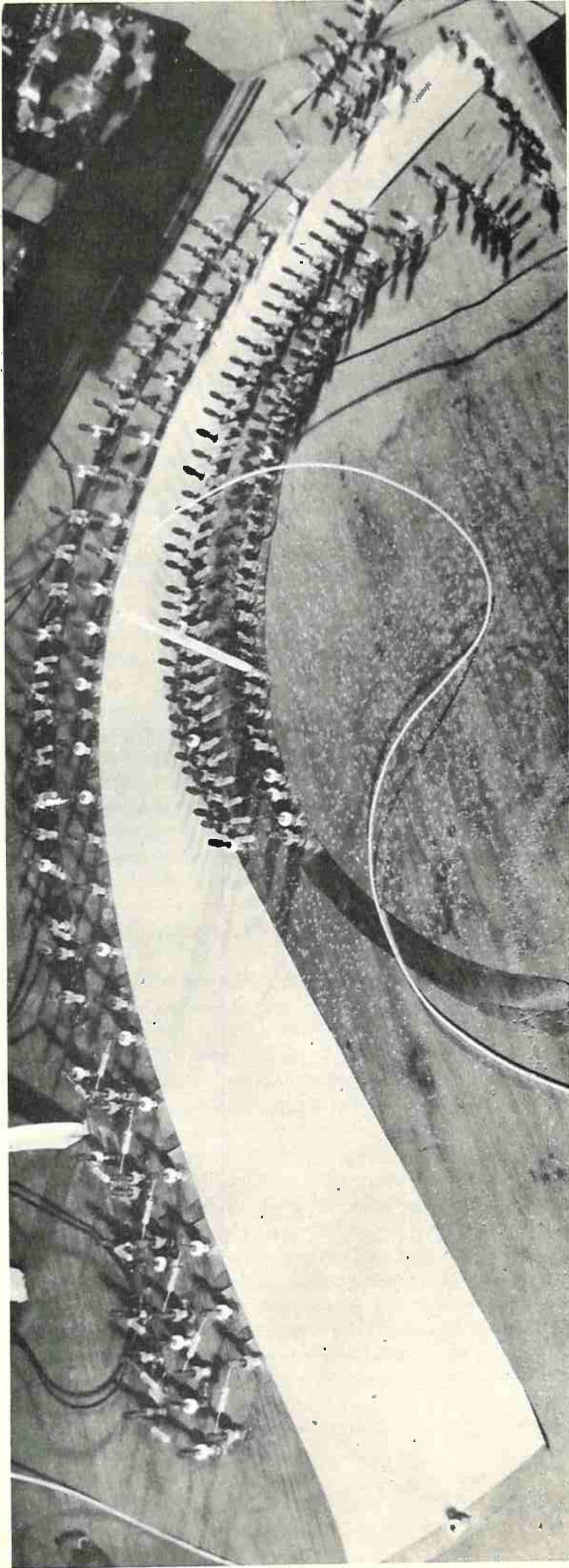


Fig. 3.4

iguais a $3,33^\circ$ aos quais correspondem resistências iguais a $750K\Omega$ e do $n^\circ 64$ ao $n^\circ 69$ subentendem variações angulares iguais a $1,66^\circ$... e portanto resistências iguais a $1,5 M\Omega$ (ou duas resistências de $750K\Omega$ em série). O eletrodo em ----- AB ($AB=0,087m$) foi deixado sem resistência pois aí a corrente elétrica é nula. A fig.3.4 mostra o modelo convenientemente preparado para receber a alimentação elétrica e a fig.3.5 -- mostra o aspecto da instalação em funcionamento. Os bornos - de entrada das resistências correspondentes aos eletrodos de n° zero ao $n^\circ 37$, que subentendem variações angulares negativas, foram conectadas ao borne $\bar{U} = +100$ da fonte de corrente e as demais resistências foram conectadas ao borne $\bar{U} = -100$. O passo seguinte, agora, é a determinação das constantes a e b da lei do potencial no campo: $U = a \mu + b$. Sendo $y_{AB} = 0,0429m$ e $y_{CD} = 0,4m$, resulta por um cálculo simples.

$$\mu_{AB} = \lg v_{AB} = - 0,08659$$

$$\mu_{CD} = \lg v_{CD} = 1,0296$$

Os potenciais lidos nos eletrodos AB e CD, respectivamente: $-4,611$ e $0,094$, permitem construir o sistema:

$$U_{AB} = -0,0866 a + b = -4,611$$

$$U_{CD} = 1,0296 a + b = 0,094$$

que admite a solução: $a = 4,215$, $b = -4,246$, donde:

$$U = 4,215 \mu - 4,246$$

Com esta lei do potencial podemos para cada potencial detectado no eletrodo da superfície livre, efetuar a seguinte sequência de cálculo afim de determinar o valor experimental da carga y no centro do eletrodo:

$$2\mu = \lg v^2 = 2 \frac{U + 4,246}{4,215} = 0,474(U + 4,246)$$

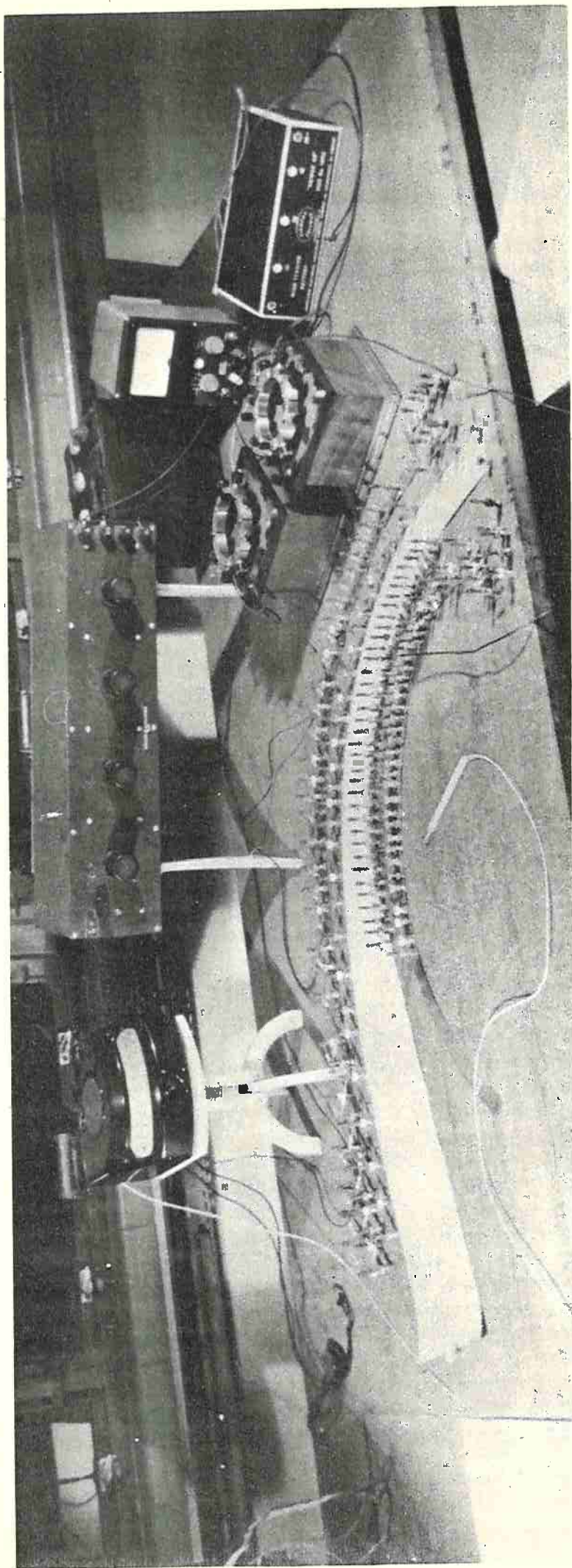


FIG. 3.5

$$\log v^2 = \log e \cdot \lg v^2 \quad \text{com} \quad \log e = 0,43429$$

$$v^2 = 2gy$$

Na fig. 3,7 acha-se representada a superfície livre obtida - por esta via, cuja concordância com a superfície livre levantada no modelo hidráulico por Boss é excelente.

Mostremos, agora, a determinação da repartição da pressão ao longo do perfil C_1C_2 . A lei do potencial escrita para o eletrodo de potencial U e para o eletrodo CD de potencial $U_{CD} = 0,094$

$$U = a \mu + b$$

$$U_{CD} = a \mu_{CD} + b$$

dá por diferença:

$$U_{CD} - U = a(\mu_{CD} - \mu) = a \lg \frac{v_{CD}}{v} = \frac{a}{2} \lg \frac{y_{CD}}{y}$$

donde a sequência de cálculo (cf. Tab3.1):

$$\text{—} \quad \lg = \frac{y_{CD}}{y} = \frac{2}{a} (U_{CD} - U) \quad \text{com} \quad a = 4,215$$

$$\text{—} \quad \log = \frac{y_{CD}}{y} = \lg_{10} e \cdot \lg \frac{y_{CD}}{y}$$

$$\text{com} \quad \lg_{10} e = 0,43429$$

$$\text{—} \quad \frac{y_{CD}}{y}$$

onde $y_v = \frac{v^2}{2g}$ e v é a velocidade no centro do eletrodo. Considerando o plano de referência coincidente com o plano de energia, a constante da eq. de Bernoulli é nula, donde

$$y_p + y_v - y = 0$$

sendo y_p a altura de pressão ($\frac{p}{\gamma}$) e y a cota geométrica, referidas ambas ao centro do eletrodo

Temos então:

$$y_p = y - y_v$$

relação que evidencia a forma prática de se obter a altura -

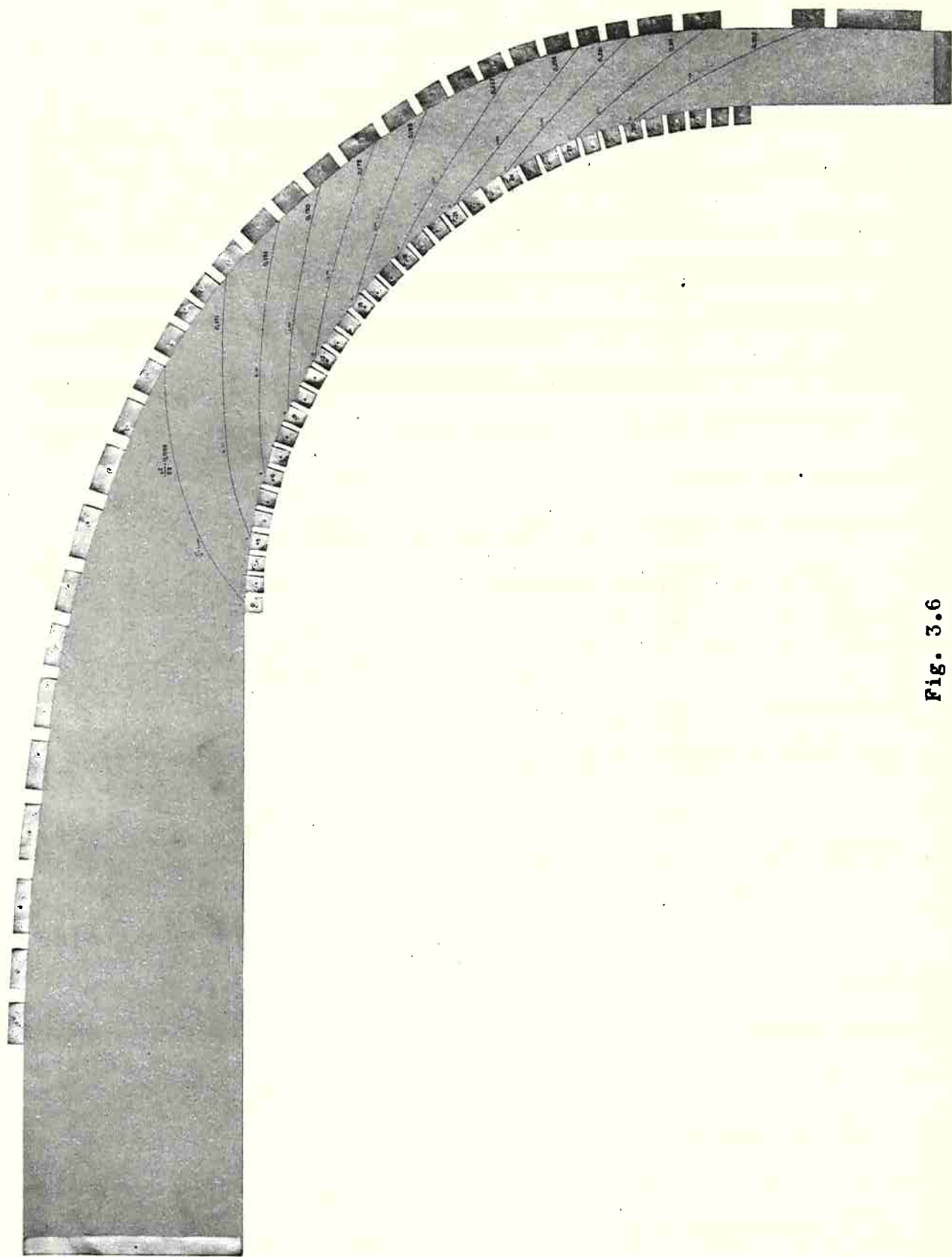


Fig. 3.6

de pressão no centro do eletrodo. A fig.3.7 mostra estas alturas em confronto com aquelas detectadas no modelo hidráulico por Boss. A discordância que se verifica a partir do eletrodo n^o 24 não é devida, evidentemente, à negação da hipótese de base, a saber, presença da camada limite com espessura apreciável deixando o movimento de ser aí irrotacional. O erro é de origem sistemática e este só pode ser minimizado investigando a causa no conjunto da instalação e melhorando os conhecimentos sobre as propriedades do papel Teledeltos.

Notemos, finalmente, que com o conhecimento das incógnitas $AB = 0,087m$ e $y_{AB} = 0,0429m$ a vazão em volume por unidade de largura da soleira vertente se calcula por:

$$Q = \sqrt{2gy_{AB}} \cdot AB = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,043} \cdot 0,087 = 0,0793m^3/s$$

Esta na realidade vale $0,080m^3/s$. Com efeito, o critério da vazão máxima referido no n^o 3.4 estabelece para o caso que - estamos estudando:

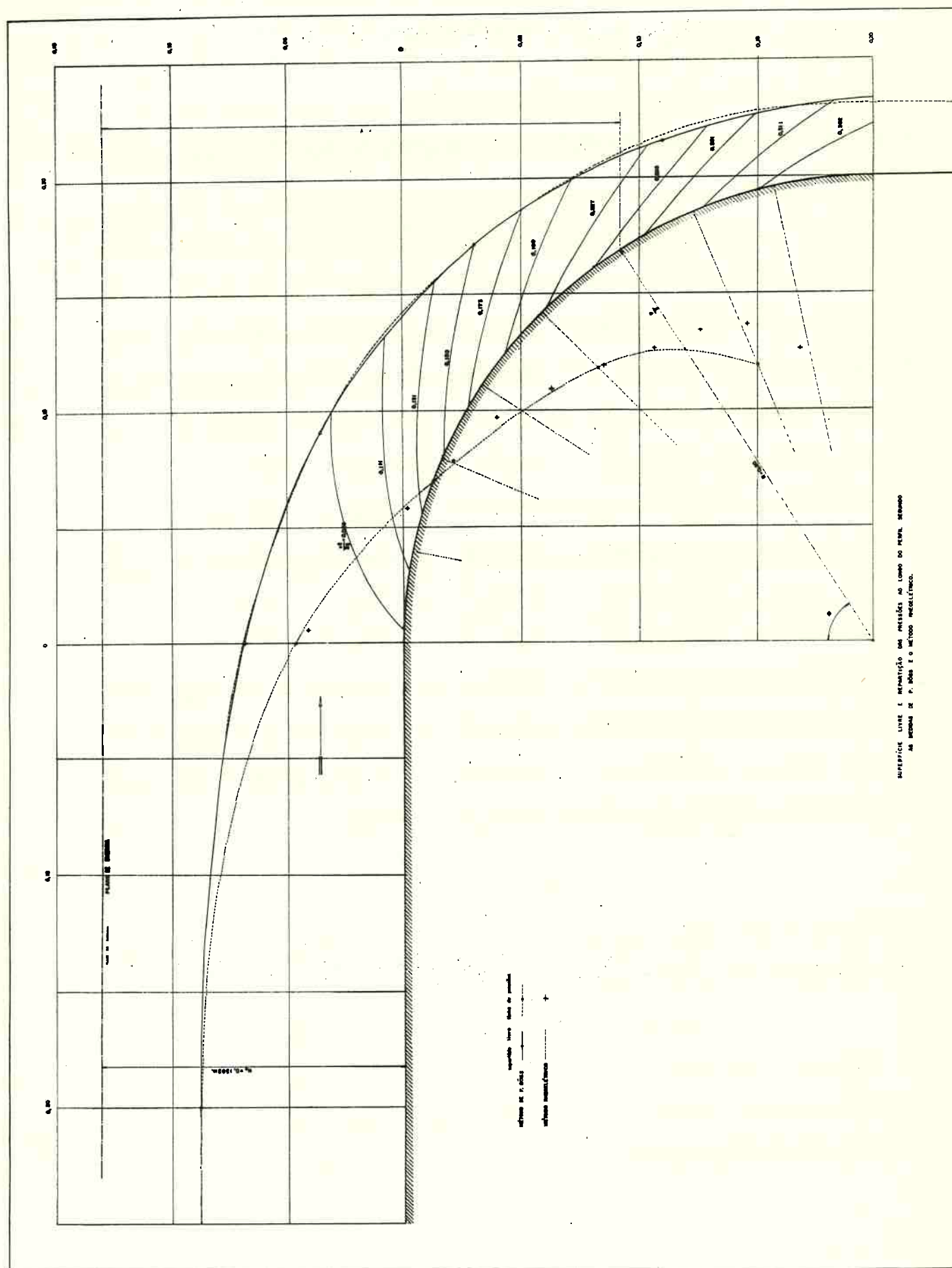
$$\overline{AB} = \frac{2}{3} H_0 = 0,0868m, \quad y_{AB} = \frac{1}{3} H_0 = 0,0434m$$

donde

$$Q = 0,0796m^3/s$$

que é também próximo do valor obtido por Boss ($Q = 0,08m^3/s$). Esta coincidência de valores justifica portanto a hipótese - da irrotacionalidade inicialmente admitida.

A fig. 3.6 mostra o modelo executado segundo os dados estabelecidos neste número e ao mesmo tempo o traçado sobre ele das linhas isovelocidades (V. também fig.3.7).



SUPERFÍCIE LIVRE E DEFORMAÇÃO DAS PRESSÕES NO LOMO DO PEIXE, SEGUNDO
AS PRESSÕES DE P. 200 E O MÉTODO NEOLÍTICO.

Fig. 3.7

Tabela 3.1.

Valores experimentais da altura cinética ao longo do perfil C_1C_2

Eletrodo n°	U	$(U_{CD}-U)$	$0,474(U_{CD}-U)$	$\log \frac{y_{CD}}{y_v}$	$\frac{y_{CD}}{y_v}$	y_v (metros)
0	-3,064	3,158	1,4968	0,65003	4,467	0,0895
3	-2,615	2,709	1,2841	0,55767	3,611	0,1107
6	-2,267	2,361	1,1191	0,48601	3,062	0,1306
9	-1,972	2,066	0,9793	0,42530	2,662	0,1503
12	-1,680	1,774	0,8409	0,36519	2,318	0,1725
15	-1,373	1,467	0,6954	0,30201	2,004	0,1996
18	-1,093	1,187	0,5626	0,24433	1,755	0,2279
21	-0,859	0,953	0,4517	0,19617	1,571	0,2546
24	-0,649	0,743	0,3522	0,15295	1,422	0,2813
27	-0,435	0,529	0,2507	0,10887	1,285	0,3112
30	-0,175	0,269	0,1275	0,05537	1,136	0,3521
33	+0,060	0,154	0,0729	0,03166	1,075	0,372
35	0,097	0,191	0,0905	0,03930	1,094	0,366

CAPÍTULO IV
APLICAÇÕES DIVERSAS

4.1.- CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES.

O vertedor estudado no capítulo anterior não constitui evidentemente a forma preferida dos engenheiros hidráulicos em obras de retenção. Mas, o equacionamento matemático aí apresentado compreendendo a representação rheoelétrica aplica-se contudo sem dificuldade aos perfis normalmente adotados na prática. Estende-se, também aos demais tipos de escoamentos de líquidos supostos planos, permanentes, sempre que a hipótese da irrotacionalidade fôr plausível. O presente capítulo tem pois esta finalidade: - mostrar a viabilidade do emprego da função potencial logarítmica e da sua conjugada, para o estudo de questões mais concretas. Um desses problemas - de interesse prático se acha representado na fig.4.1. O traçado compreende um canal de profundidade finita BC_1 , um paramento retilíneo C_1C_2 , uma soleira vertente que se compõe de um arco de circunferência C_2C_3 e de raio $r_{C_2C_3}$ e de um perfil dado de equação * $Y = f(X)$ até o ponto de concordância C_4 a partir do qual se inicia um perfil circular C_4C_5 de raio $r_{C_4C_5}$ que termina por um canal de fundo horizontal C_5C . Este traçado é muito semelhante ao executado, por exemplo, para a barragem de Três Maria no rio S.Francisco.

*) Recordemos que uma forma frequente da função $Y = f(X)$ é dada por

$$\frac{Y}{H_0} = a \left(\frac{X}{H_0} \right)^n$$

que representa o perfil tipo Creager. Nesta expressão, a e n são números dados e H_0 é a carga fundamental

O problema que se pode propor em termos técnicos admite o seguinte enunciado: sendo dada a seção de escoamento AB, determinar a posição do plano de energia, a forma da superfície livre e consequentemente a seção de escoamento à juzante CD, e a repartição das pressões ao longo da soleira vertical. Como vemos, a enunciação do problema aqui é um pouco diferente daquela proposta no Cap.III, onde o plano de energia é dado e AB é incógnita. Uma outra diferença importante oferecida pelo traçado da fig.4.1 em relação àquele estudado no capítulo anterior, é a presença de dois pontos singulares, a saber, um ponto de parada C_1 e um ponto de velocidade infinita C_2 (Cf. n.º 1.8).

Mostraremos no decorrer deste capítulo que as diferenças acima apontadas não oferecem dificuldades especiais para a solução do problema posto pelo traçado da fig.4.1.

4.2.- CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA.

Considerando o fluido incompressível, em movimento permanente, irrotacional, sujeito no plano do escoamento ao campo da gravidade, a equação da continuidade para tubos de corrente entre as seções de escoamento AB ou o-o e CD ou 1-1 e a equação de Bernoulli para dois pontos quaisquer dessas seções se escrevem respectivamente (fig.4.1):

$$v_o \overline{AB} = v_1 \overline{CD} \quad (4.1)$$

$$\frac{v_o^2}{2g} + z_o + \overline{AB} = \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \overline{CD} \quad (4.2)$$

onde z_o e z_1 são as cotas das soleiras horizontais BC_1 e C_5C em relação ao plano de referência. Eliminando \overline{CD} entre as equações (4.1) e (4.2) e pondo a expressão resultante em termos adimensionais, resulta:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v_o^2}{g \cdot \overline{AB}} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_o} \right)^2 \right] + \frac{\Delta z_{o,1}}{\overline{AB}} + 1 - \left(\frac{v_o}{v_1} \right) = 0 \quad (4.3)$$

onde $\Delta z_{o,1} = z_o - z_1$.

Pondo agora,

$$F_o = n^o \text{ de Froud} = \frac{v_o}{\sqrt{g \cdot \overline{AB}}}$$

$$\eta = \frac{v_1}{v_o}$$

a expressão (4.3) torna-se:

$$\frac{1}{2} F_o^2 [1 - \eta^2] + \frac{\Delta z_{o,1}}{\overline{AB}} + 1 - \frac{1}{\eta} = 0 \quad (4.4)$$

relação que justifica o seguinte processo de obtenção por a aproximações sucessivas da superfície livre com o emprêgo do modelo rheoelétrico: assumindo uma posição para o plano de energia, situado de preferência aquém da posição que se pressume ser correta, a carga y_{AB} fica determinada na seção \overline{AB} e consequentemente a velocidade $v_{AB}^2 = v_o^2 = 2gy_{AB}$, donde então, o n^o de Froud F_o . Sendo tudo o mais dado, a Eq.4.4, dá pelo menos uma raiz real η , donde a velocidade $v_1^2 = v_{CD}^2 = 2gy_{CD}$ e consequentemente, segundo a eq.4.2, a seção \overline{CD} conjugada. -- Com as seções AB e CD é possível traçar uma superfície livre, executar o modelo rheoelétrico e detectar nos seus eletrodos os potenciais elétricos aos quais vão corresponder cargas y que não verificam o plano de energia inicialmente admitido. Uma nova posição para o plano de energia é então assumida, repetindo, em seguida, o ciclo acima descrito. Ao se atingir uma posição satisfatória para o plano de energia, o passo se--guinte consiste em melhorar a forma da superfície livre, de--formando-a convencientemente, a cada deformação correspondendo a execução de um modelo rheoelétrico. O processo se fina--lisa quando se cumpre a precisão desejada, a carga experimenten

PLANO DE ENERGIA

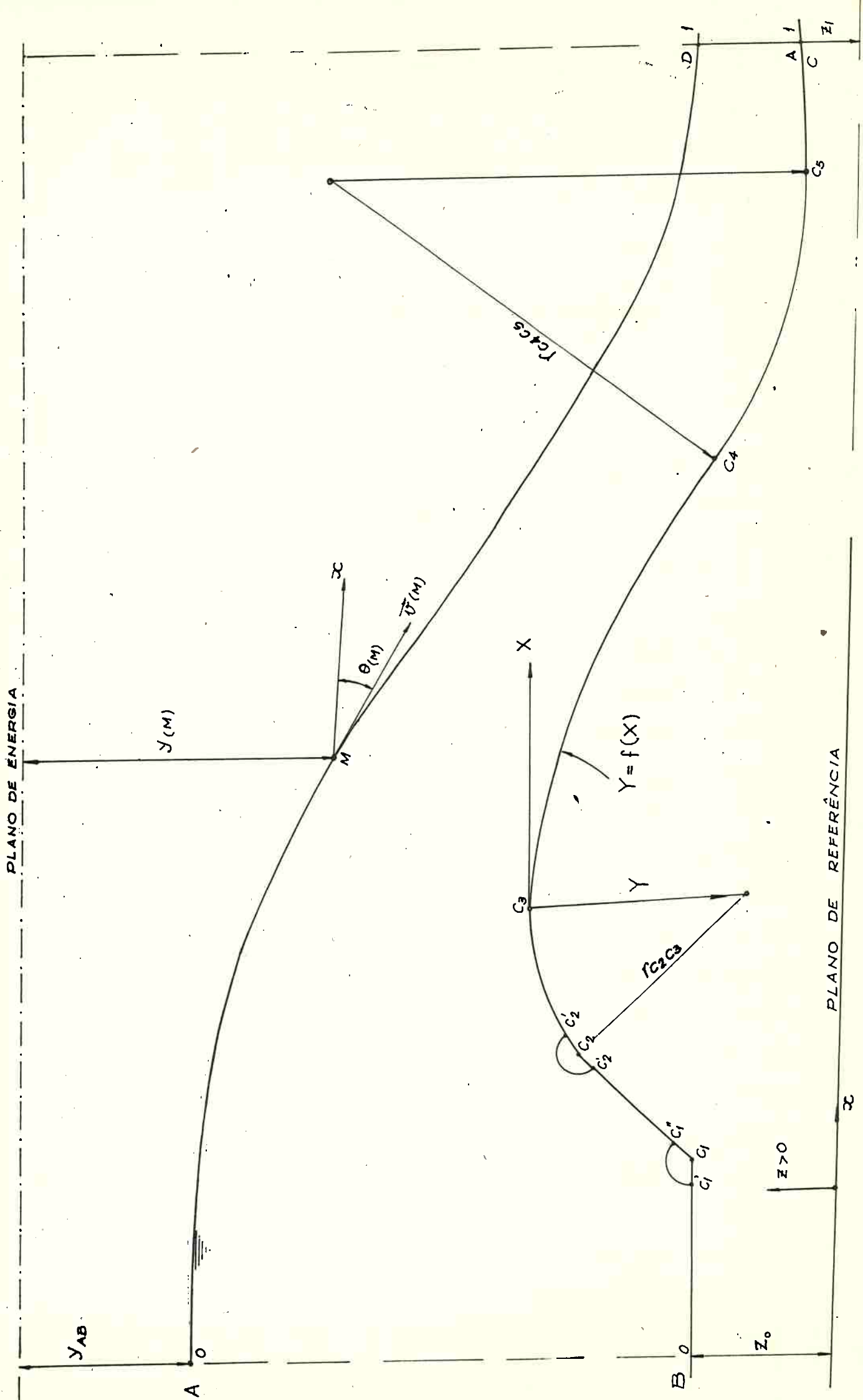


FIG. 4-1

tal dada a partir da leitura do potencial elétrico não excede a carga existente no centro do eletrodo em mais de 2^o / o.

A carga y_{CD} e a seção CD podem ser obtidas por tentativas do seguinte modo: tendo presente as relações:

$$M = \sqrt{\frac{y_1}{y_0}} \quad \text{e} \quad M^2 = \frac{y_1}{y_0}$$

a Eq. (4.4) se escreve:

$$M^2 = 1 + \frac{2}{s_0^2} \left[\frac{\Delta z_{0,1}}{AB} + 1 - M \right]$$

ou

$$\frac{y_1}{y_0} = 1 + \frac{2}{s_0^2} \left[\frac{\Delta z_{0,1}}{AB} + 1 - \sqrt{\frac{y_0}{y_1}} \right]$$

Prescindindo, inicialmente, do radical no 2^o -- membro, calculamos y_1/y_0 donde o valor de $(y_0/y_1)^{1/2}$ o qual levado para dentro do colchete dá um outro valor de y_1/y_0 . Três ou quatro tentativas nesse sentido permitem estabelecer com boa precisão o valor final de $y_1 = y_{CD}$ e portanto de CD.

Podemos, ainda, operar do seguinte modo: A Eq. 4.1 se escreve:

$$Q^* = \overline{AB} \sqrt{y_{AB}} = \overline{CD} \sqrt{y_{CD}} \quad \text{com} \quad Q = \sqrt{2g} \quad Q^*$$

Assumindo y_{CD} igual à distância que separa segundo a vertical o fundo do canal C_4C ao plano de energia, a seção CD se calcula por:

$$\overline{CD} = \frac{Q^*}{\sqrt{y_{CD}}}$$

Tomando, agora, como carga $y'_{CD} = y_{CD} - \overline{CD}$ a nova seção que resulta será então

$$\overline{CD}' = \frac{Q^*}{\sqrt{y'_{CD}}}$$

E assim por diante, três ou quatro tentativas nesse sentido permitem também estabelecer com boa precisão os va

lores finais de CD e de y_{CD} .

4.3.- CONDIÇÕES DE CONTÔRNO PARA A FUNÇÃO μ .

Vimos no n^o 1.8 que um ponto de parada e um ponto onde a velocidade é infinita podem ser removidos do contôrn Γ , que cerca a região do escoamento, substituindo-os por arcos de circunferência que são isovelocidades, contanto que estes arcos sejam traçados no interior da região de escoamento com raio elementar \bar{r} e centro nos pontos singulares correspondentes. O contôrn Γ passa assim a se constituir da seção AB, do fundo do canal BC'_1 , do arco elementar $C'_1C''_1$, do paramento $C''_1C'_2$, do arco elementar $C'_2C''_2$, do perfil $C''_2C'_4$, do arco circular C_4C_5 , do fundo do canal C_5C , da seção de escoamento CD e finalmente da superfície livre DA, (fig.4.1). Adotando a circuitação ao longo de Γ no sentido positivo (Cfr.n^o3.4), as condições de contôrn Γ se enunciam do seguinte modo:

a) Sôbre AB, verifica-se simultaneamente:

$$\mu_{AB} = \lg v_{AB} = \text{Cte} \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_{AB} = 0 \quad (4.6)$$

b) Sôbre B C'_1 , $C''_1C'_2$, C_5C :

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = 0 \quad (4.7)$$

c) Sôbre $C'_1C''_1$, que contorna o ponto singular C_1

A solução por dados de Neumann exige o conhecimento da função

$$\int_{C'_1C''_1} \frac{\partial \mu}{\partial n} ds = \int_{C'_1C''_1} \frac{\partial \theta}{\partial s} ds = \int_{C'_1C''_2} d\theta = \theta(C''_1) - \theta(C'_1)$$

onde $\theta(C''_1)$ é o argumento da velocidade em C''_1 que coincide com a inclinação de $C''_1C'_2$ e $\theta(C'_1) = 0$ é o argumento da velocidade em C'_1 . Temos, então, o resultado

$$\int_{C_1' C_1''} \frac{\partial \mu}{\partial n} ds \approx \theta(C_1'') \quad (4.8)$$

d) Sobre $C_2' C_2''$ que contorna o ponto singular C_2 .

Raciocinando do mesmo modo que no caso anterior resulta

$$\int_{C_2' C_2''} \frac{\partial \mu}{\partial n} ds \approx -\theta(C_2'') - \theta(C_2') \quad (4.9)$$

onde $\theta(C_2'')$ é o argumento da velocidade no ponto C_2'' e $\theta(C_2') = \theta(C_1'')$

e) Sobre o perfil $C_2'' C_4 C_5$ e DA operamos do mesmo modo que no n^o 3.4, itens c) e e).

f) Sobre CD, verifica-se simultaneamente:

$$\mu_{CD} = \lg v_{CD} = \text{Cte.} \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_{CD} = 0$$

já que a partir de CD a superfície livre pode ser considerada horizontal.

4.4.- ANALOGIA DIRETA E RESULTADOS EXPERIMENTAIS.

Mostramos no n^o 3.5 que a técnica das injeções de corrente pelo método das grandes resistências se faz intercalando entre o borne da fonte de corrente e cada eletrodo uma resistência de grande valor afim de resultar uma distribuição de potenciais elétricos com restrição superior entre os valores 1 e 2 na escala 0-100 e satisfazendo a seguinte relação

$$R \cdot \Delta \theta = K \text{ (constante) (Cf. Eq. 3.31)}$$

Dividindo o contorno Γ da região representada na fig. 4.1 por arcos Δs que subentendem, entre outras, aberturas angulares $\Delta \theta = 2,5^\circ$ (ou 0,0436rd) e intercalando para esses arcos resistências de valor $R = 1,0 \text{ M}\Omega$, a constante K será;

$$K = 43 \ 630 \quad (4.11)$$

Mostremos que a resistência a ser intercalada entre o borne da fonte e cada singularidade é também obtida da Eq.3.31. Com efeito, considerando o arco elementar $C_1' C_1''$ que envolve o ponto singular C_1 , a corrente elétrica através da parte condutora com bordo em $C_1' C_1''$ pode ser calculada como segue. Pondo o potencial elétrico como função linear do potencial logarítmico,

$$U = a \mu + b$$

a eq.2.3 assume a forma:

$$di = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial n} ds = - \frac{a}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial n} ds$$

donde, em virtude da Eq.4.8,

$$\Delta i = - \frac{a}{\rho} \int_{C_1' C_1''} \frac{\partial \mu}{\partial n} ds = - \frac{a}{\rho} \Theta(C_1'')$$

e do raciocínio seguido no n.º 3.5 resulta, a menos do sinal,

$$|\Delta i| = \frac{100}{R_{C_1}} = \frac{a}{\rho} |\Theta(C_1'')|$$

i.é:

$$R_{C_1} |\Theta(C_1'')| = \frac{\rho}{a} 100 = \text{Cte.}$$

Raciocínio identico para o ponto singular C_2 leva ao mesmo resultado

$$R_{C_2} |\Theta(C_2'') - \Theta(C_2')| = \text{Cte.}$$

a constante sendo a mesma da Eq.3.31.

Podemos então operar com as singularidades como se fossem eletrodos comuns, tendo o cuidado, apenas, de considerar os pontos extremos como centros do espaço isolante que os separa dos eletrodos vizinhos.

Considerando, agora, que as partes restantes de Γ são tratadas, no sentido da materialização das condições de

contorno, tal qual foi exposto no n^o 3.5, temos:

- a) AB eletrodo contínuo sem corrente elétrica
- b) BC_1 isolante
- c) $C_1'C_1''$ eletrodo de bordo circular de diâmetro - 10 mm.
- d) $C_1''C_2'$ isolante.
- e) $C_2'C_2''$ eletrodo de bordo circular de diâmetro 5 mm.
- f) $C_2''C_5$ eletrodos subentendendo aberturas angulares $\Delta \theta$ iguais, submúltiplos ou múltiplos de $\Delta \theta = 2,5^\circ$
- g) C_5C isolante
- h) CD eletrodo contínuo sem corrente.
- i) DA eletrodos subentendendo aberturas angulares iguais, submúltiplos ou múltiplos de $\Delta \theta = 2,5^\circ$

A seção \overline{AB} foi fixada igual a 15,0m e o plano de energia foi inicialmente adotado na cota 15,6m contada acima do fundo do canal à montante BC_1 . A carga y_{AB} é então igual a 0,6m e $Q^* = 11,6m^{5/2}$, donde, pelo processo descrito no n^o 4.2: $y_{CD} = 15,8m$ e $CD = 2,91m$. Em seguida, traçamos a superfície livre, e executamos o modelo elétrica (como todos os demais) na escala 1:50 das dimensões reais (V.Mod.IV-A, -- figs 4.2 e 4.3). Ao traçar a superfície livre, equivale a impor cargas em cada um de seu pontos, para o plano de energia adotado. O passo seguinte consiste em determinar as cargas experimentais calculadas a partir dos potenciais elétricos detectados nos eletrodos de DA afim de constatar se estas cargas, pelo menos aproximadamente, verificam o plano de energia adotado. A resposta do modelo IV-A foi, nesse sentido, negativa, - ressaltando que o plano de energia foi posicionado extremamente baixo, devendo então ser elevado. Do mesmo modo procedeu o

modelo IV-B, com plano de energia na cota 16,25m; $y_{AB} = 1,25m$ $\overline{CD} = 4,31m$ e $y_{CD} = 15,2m$. O modelo IV-C com plano de energia - na cota 16,5m; $y_{AB} = 1,5m$; $y_{CD} = 14,6m$ e $\overline{CD} = 4,77m$, pareceu-nos indicar o plano de energia próximo da solução. Para confirmar isto, procuramos deformar a superfície livre DA, a deformação seguindo no sentido de evolução das cargas experimentais em - relação às impostas, i.é, devendo levantar a parte de DA na - região em que as cargas experimentais superam aquelas impos-- tas e descer as partes de DA nas regiões em que as cargas ex- perimentais são inferiores àquelas impostas. Com este objeti- vo foram construídos os modelos IV-D e IV-E. (V. figs. 4.2 e 4.3) tendo ambos uma parte da superfície livre em comum (na região acima de C_4C), onde as cargas experimentais se avizinham bas- tante das cargas impostas do plano de energia adotado porém , à montante, (na região acima de BC_3) as cargas experimentais continuam abaixo das cargas impostas, sendo ligeiramente me- lhores as fornecidas pelo modelo IV-E. Isto mostra que mantem- do o mesmo plano de energia, é inútil construir modelos com - superfícies livres mais baixas do lado de montante, pois o au- mento correspondente das cargas experimentais nesta região é nítidamente pequeno, jamais atingindo a solução. Só resta, en- tão, elevar ainda mais o plano de energia e repetir o ciclo a cima descrito. Estaremos próximos da solução quando as cargas experimentais se avizinhamem daquelas impostas ao longo de tô- da a linha DA.

A técnica acima sugerida mostra, então, que, para um plano de energia situado abaixo daquele que é solução, não é possível encontrar uma forma da superfície livre ao longo - da qual as cargas experimentais passam coincidir com as car-- gas impostas e, ainda, o que é evidenciado pela fig. 4.2, se--

guindo o processo descrito o sistema é convergente. Obtida a forma final da superfície livre, a determinação da repartição das pressões ao longo do perfil, o traçado das linhas isovelocidades e o cálculo da vazão se fazem de maneira idêntica aos já apresentados no capítulo anterior.

Mostraremos, agora, o tipo de cálculo elaborado em cada fase do processo, tomando, a título de ilustração o modelo IV-E.

Os eletrodos foram numerados no sentido D A B C recebendo o n^o 1(um) aquele vizinho de CD ao longo de DA. -- Com a constante $K = 43\,630$ [Cf.Eq.(4.11)] determinamos as resistências para cada eletrodo as quais vão reproduzidas na - Tab.4.1

Tabela 4.1
Valores das aberturas angulares e das resistências correspondentes ao modelo IV-E

Eletrodo n ^o	$\Delta \theta$ (graus)	R (ohms)
1 a 10	+2,50	1.000.000
11	+0,63	4.000.000
12	-0,63	4.000.000
13 a 18	-1,25	2.000.000
19	-2,50	1.000.000
20 e 21	-1,25	2.000.000
22 a 26	-2,50	1.000.000
AB	0,00	∞ (s/corrente)
27(sing.C ₁)	46,05	54.280
28(sing.C ₂)	-21,05	318.750
29 a 39	-5,00	500.000
40 a 45	+5,00	500.000
CD	0,00	∞ (s/corrente)

Pondo

$$\frac{v^2}{2g} = y$$

$$\mu = \lg y^{1/2} = \frac{1}{2} \lg 10 \cdot \log y \quad \text{com} \quad \lg 10 = 2,3026$$

resulta:

$$\mu = 1,1513 \log y.$$

donde para $y_{AB} = 1,5m$ e $y_{CD} = 14,65m$.

$$\mu_{AB} = 0,20273 \quad \text{e} \quad \mu_{CD} = 1,34223$$

Detectando os potenciais $U_{AB} = -5,007$ em AB e --
 $U_{CD} = -0,482$ em CD as constantes a e b da fórmula $U = a\mu + b$ são dados pelo sistema:

$$0,20273a + b = -5,007$$

$$1,34223a + b = -0,482$$

donde $a = 3,971$, $b = -5,812$ e a expressão da lei

$$U = 3,971\mu - 5,812$$

Com esta expressão é possível deduzir os valores das cargas experimentais se verificando no centro de cada eletrodo da linha DA da seguinte maneira:

$$2\mu = 2 \lg y^{1/2} = \lg y = \frac{2}{a} (U - b)$$

donde:

$$\begin{aligned} \log y &= \log e \cdot \lg y = \log e \cdot \frac{2}{a} (U - b) \quad \text{com} \quad \log e = \\ &= 0,43429 \end{aligned}$$

i, é:

$$\log y = 0,21873 (U + 5,812) \quad (4.12)$$

A tabela 4.2 fornece os valores experimentais - para alguns dos eletrodos da linha DA, calculados segundo a Eq.4.12, e os valores das cargas impostas obtidos segundo o traçado que se pode ver na fig.4.2:

Tabela 4.2.

Eletrodo n ^o	U	U + 5,812	log y	y _{exp} (metros)	y _{imposto} (metros)
1	-0,352	5,460	1,19427	15,64	14,60
5	-0,500	5,312	1,16189	14,52	14,20
8	-0,812	5,000	1,09365	12,46	13,00
11	-0,952	4,860	1,06303	11,57	11,55
12	-1,155	4,657	1,01863	10,44	10,45
14	-1,441	4,371	0,95607	9,04	8,80
17	-2,551	3,261	0,71328	5,17	6,55
20	-4,121	1,691	0,36987	2,34	4,25
23	-4,956	0,856	0,18723	1,54	2,45
26	-5,149	0,663	0,14502	1,40	1,55

4.5.- ANALOGIA INVERSA.

Tendo sido determinado o contorno Γ segundo o processo sugerido no n^o anterior, a representação rhebelétrica da função $\Omega = -\Theta$ faz-se de acôrdo com o descrito no n^o 3.8, exceção feita dos pontos singulares. Consideremos, para ilustrar, o ponto singular C_1 substituído pelo arco $C'_1C''_1$. Sôbre este arco que é isovelocidade (Cfr.n^o1.8), temos $\mu(s) = \text{Cte}$ donde pela Eq. 1.10:

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial n}$$

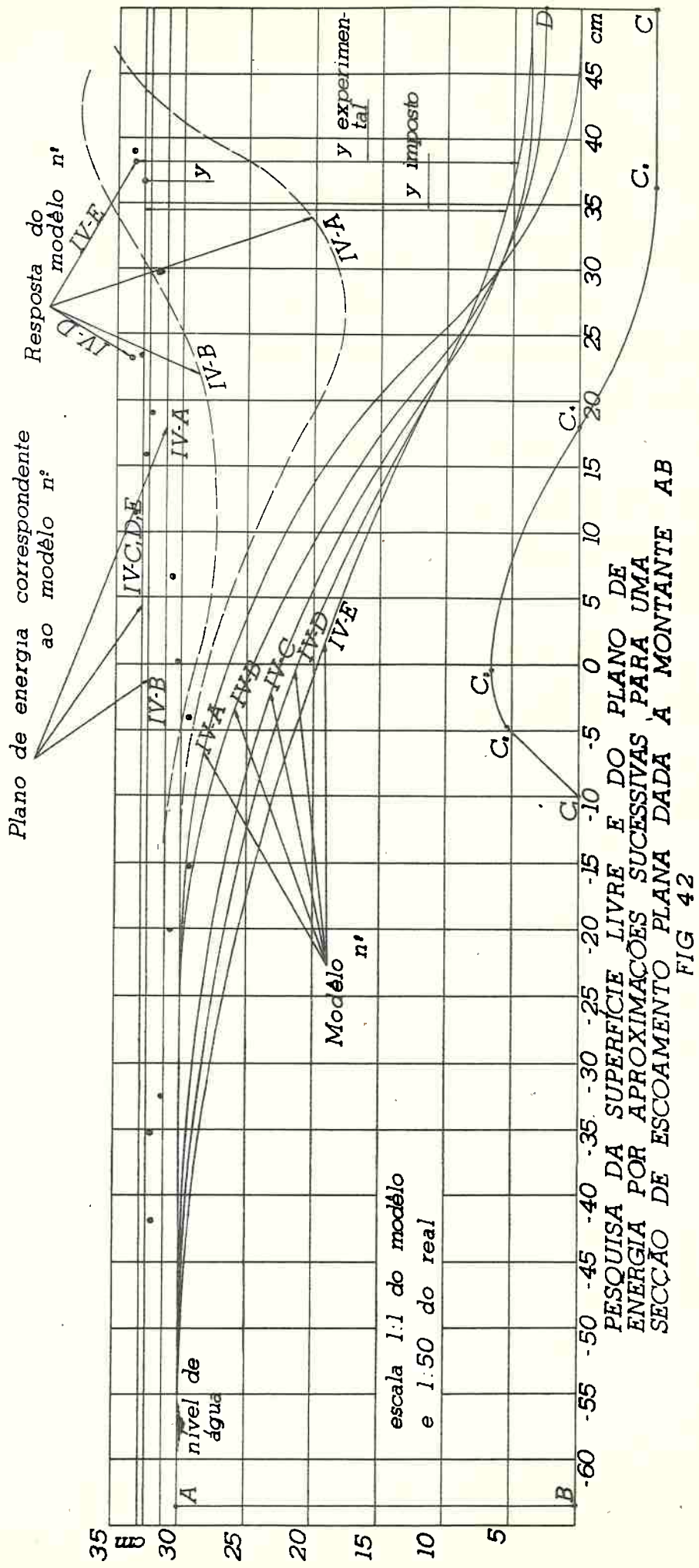
que é uma condição de Neumann simples de ser representada: $C'_1C''_1$ (e do mesmo modo $C'_2C''_2$) deve ser isolante. O problema da representação da funçãp Ω e então do tipo mixto (Cfr.n^o1,6). A título de ilustração damos a seguir a materialização das condições de contêrno:

- a) Sôbre AB, BC_1 , C_5C , CD temos uma condição de Dirichlet com $\Theta = 0$ donde $\Omega = 0$ e então $U=0$.

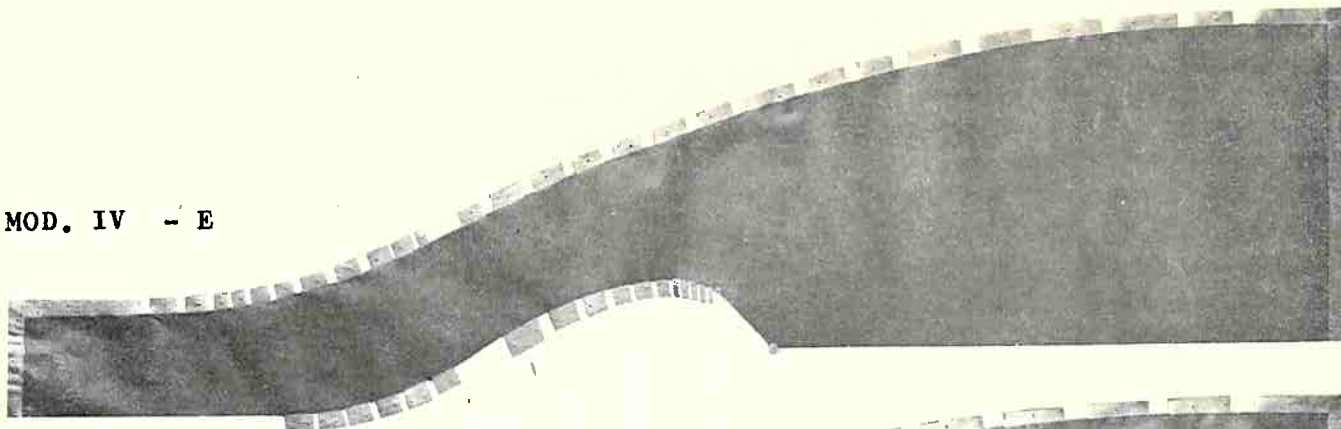
(o eletrodo é contínuo ao longo das fronteiras citadas).

- b) Sobre $C_1' C_1''$ e $C_2' C_2''$ temos uma condição de -- Neumann com $\frac{\partial \mu}{\partial n} = 0$ (isolante).
- c) Sobre $C_1'' C_2'$ temos uma condição de Dirichlet, eletrodo contínuo, onde se fixa U proporcional a $\Omega = - \theta(C_1'') = - \theta(C_2')$.
- d) Sobre $C_2'' C_5$ e DA temos, também uma condição de Dirichlet, com $\Omega = - \theta(s)$ variável, a representação sendo feita por segmentos e $U(s)$ fixados proporcionalmente a $\theta(s)$.

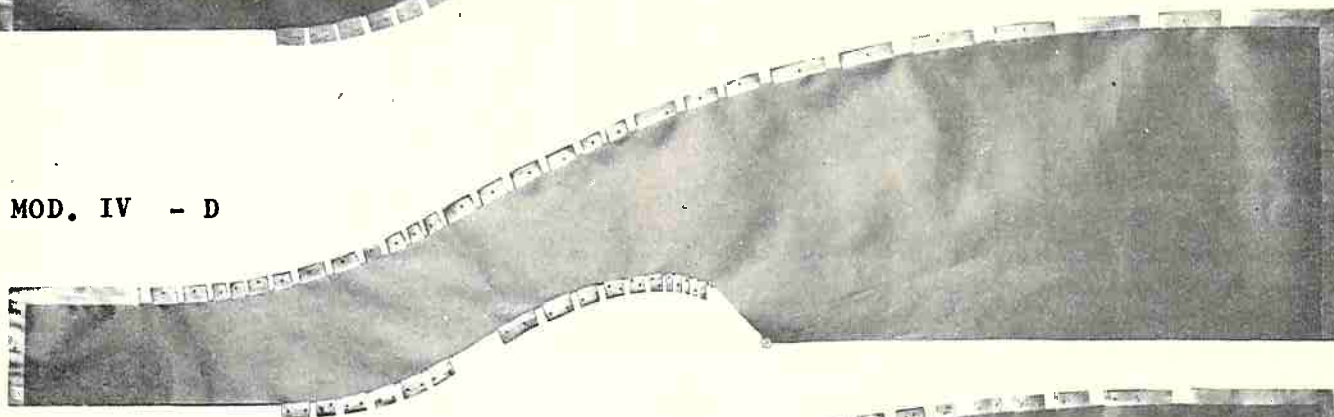
A técnica de fixação dos potenciais pode ser a
quela citada no n^o 2.6



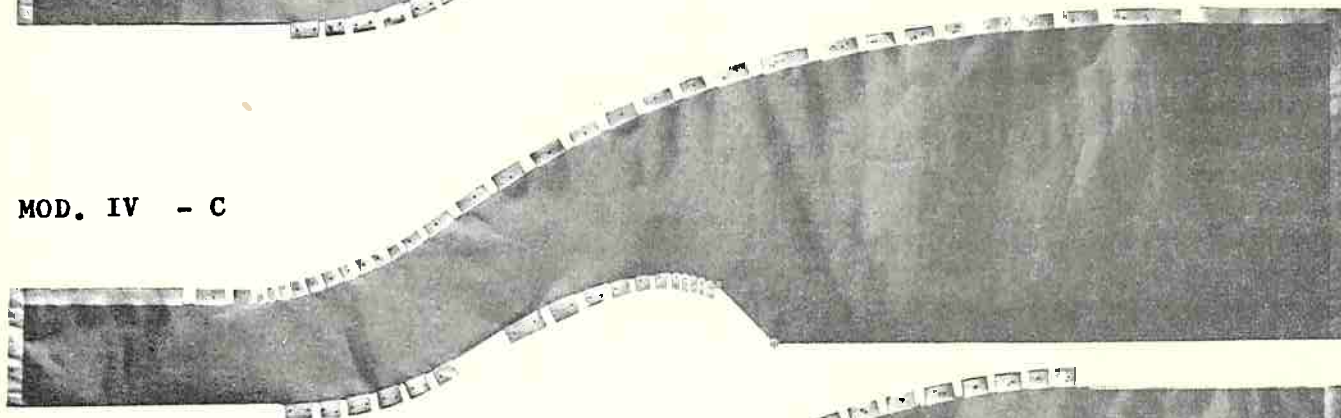
MOD. IV - E



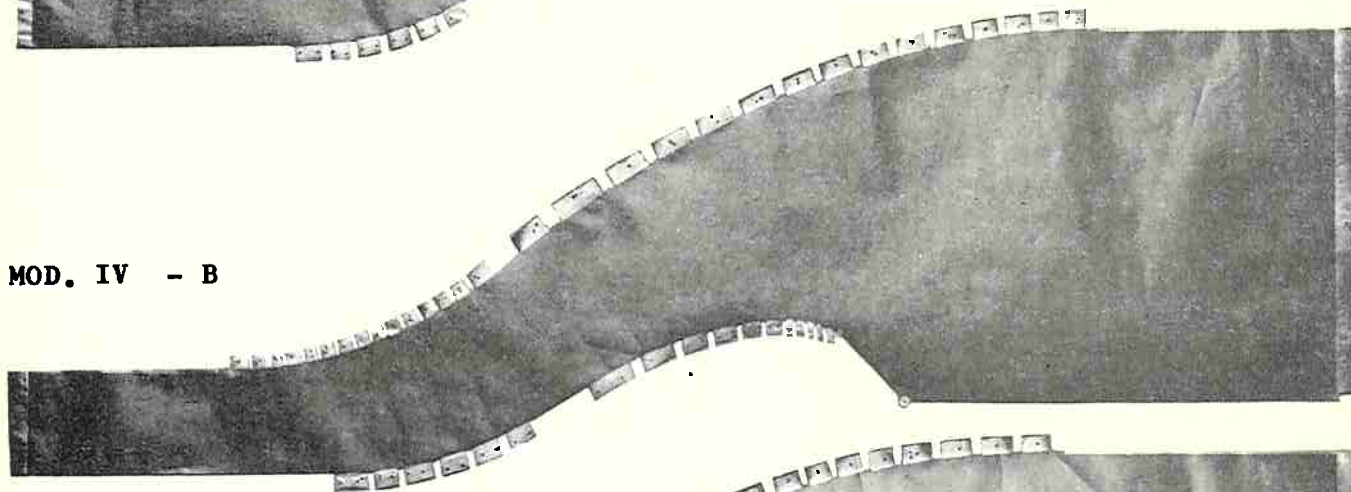
MOD. IV - D



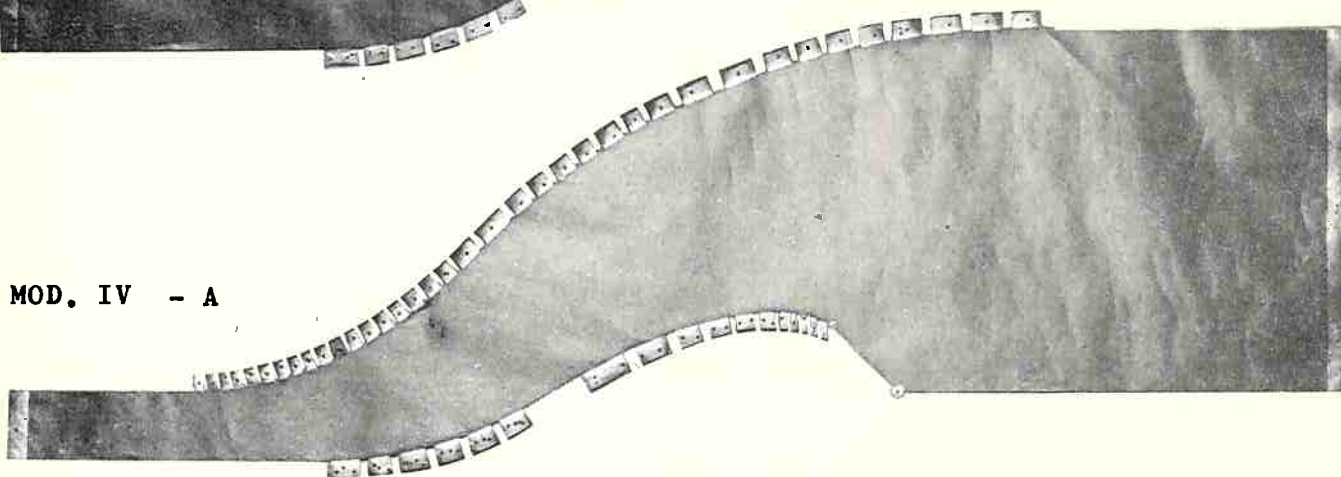
MOD. IV - C



MOD. IV - B



MOD. IV - A



MODELOS EXECUTADOS VISANDO A OBTENÇÃO DA SUPERFÍCIE LIVRE PARA UM PLANO DE ENERGIA ADOTADO E SEÇÃO DE ESCOAMENTO PLANA DADA À MONTANTE AB.

Fig. 4.3

V - CONCLUSÃO

Quisemos neste trabalho ressaltar a importância da função potencial logarítmica e da função argumento na resolução de movimentos planos, permanentes, irrotacionais, de líquidos apresentando superfície livre, tendo como instrumento de cálculo, a técnica das analogias rheoelétricas. Pareceu-nos ter evidenciado que o equacionamento matemático e a tecnologia apresentados não se restringem unicamente aos escoamentos estudados, podendo ser aproveitados para a resolução de diversos outros tipos de perfis com diferentes condições de escoamento.

Quanto ao alcance prático do estudo que acabamos de apresentar, permitimo-nos lembrar que durante a elaboração de ante-projetos ocorre quase sempre a necessidade de pré-determinar, pelo menos aproximadamente, algumas das características dos escoamentos postos por vertedores ou estruturas similares, sem que para isso fôsse necessário aguardar os resultados definitivos dados por estudos em modelos hidrodinâmicos, os quais demandam prazos de tempo -- frequentemente longos.

O método dos potenciais logarítmicos preenche satisfatoriamente a esta exigência da técnica pois permite, para um número mínimo de dados, fornecer, entre outros, a forma da superfície livre, a repartição das pressões ao longo do perfil e o valor da vazão em volume de uma maneira -- relativamente expedita dando resultados suficientemente -- precisos para a maioria das necessidades práticas. Com efeito, a aparelhagem requerida para a experimentação analógica é muito simples, a realização das condições de contorno -- por dados de Neumann é extremamente facilitada pela técnica

das injeções de corrente utilizando o método das grandes resistências e o modêlo rheoelétrico pode ser executado - rapidamente empregando como meio condutor o papel teledeltos. Apesar da complexidade posta pelos problemas envolvendo determinação da superfície livre, os exemplos de aplicação apresentados mostraram que a precisão oferecida é perfeitamente aceitável em termos práticos.

BIBLIOGRAFIA

1. L. ESCANDE - Barrages, Vol.III, Herman et Cie. 1937.
2. G.Z. WATTERS e R.L. STREET - Two-dimensional flow over sills in open channels. Proc. of the American Society of Civil Engineers, vol.90 n^o - HY4, julho 1964.
3. R.V. SOUTHWELL - Relaxation Methods in Theoretical Physics. Oxford. 1946.
4. JOHN.S. McNOWN, EN-YUN e YIH CHIA-SHUN.- Applications of the Relaxation Technique in Fluid Mechanics Proc. American Society of Civil Engineers. -- Vol.79, julho 1953.
5. GUY RENNARD - Représentation directe par analogie rhéologique des gradients de fonctions harmoniques em domaine plan limité ou illimité. - Tese apresentada à Faculdade de Ciências de Paris. 1958.
6. POLUBARINOVA KOCHINA - Theory of Ground Water Movements. Princeton 1962.
7. H. ROUSE. (Editor Chefe). Advanced Mechanics of Fluids. - John Wiley. 1959.
8. MILNE THOMSON - Hydrodinamica Teorica. Aguilar. 1951.
9. L. MALAVARD e G. RENARD. La Technique des analogies rhéologiques. Technique Générale du Laboratoire de Physique (estrato). Vol.II, Cap.XIII, Ed. CNRS. 1962.
10. P. HUARD DE LA MARRE - Resolution de problèmes d'infiltrations à surface libre au moyen d'analogies électriques. Tese apresentada à Faculdade de Ciências de Paris. 1956

11. NESSIM HAY e ERIC MARKLAND - The determination of the discharge over weirs by the eletrolytic tank, Proc. The Institution of Civil Engineers. Vol.10, maio 1958.
12. WALTER J.KARPLUS - Analog Simulation. McGraw Hill.1958
13. TUFI M.ASSY - Barragem de Barra Bonita. Estudo em modêlo analógico elétrico de suas fundações. Lab. de Hidráulica da E.P.U.S.P. 1961.
14. L.MALAVARD - La Technique des analogies électriques. Techniques générales du Laboratoire de Physique. Vol.II, Cap.XV, Ed. CNRS.
15. HARALD LAUFFER - Ecoulement dans les canaux a radier in curvé. Wasserkraft und Wasserwirtschaft. (Tradução Chatou). Outubro. 1936.
16. H.ROUSE - Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers. Dover Publications. 1938.
17. KELLOG - Foundations of Potencial Theory. The Murray Printing. 1929.
- 18 . P.VERNOTTE - La derivation des courbes expérimentales. Comptes rendus. t.246, pag. 2124 - 2125. junho 1955.