GEOMETRIA PROJETIVA

No início do século dezenove desenvolveu-se uma nova maneira de estudar certos problemas de geometria do plano e do espaço, devido principalmente a questões de artes gráficas e arquitetura.

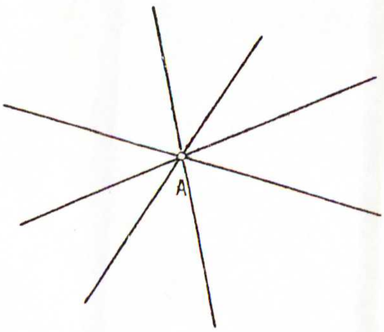
Podemos dizer que a geometria projetiva como disciplina matemática teve início com os trabalhos do geometra frances J.V. Poncelet (1788-1867) que investigou certas propriedades de figuras geométricas que foram denominadas propriedades projetivas.

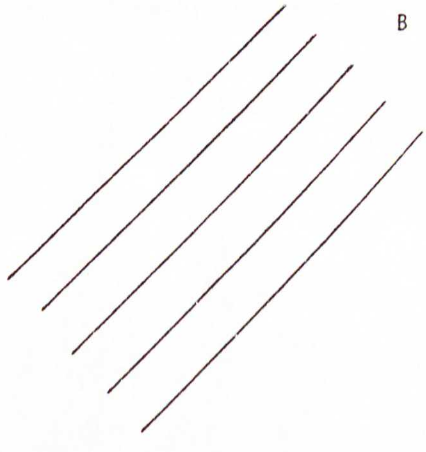
No que se segue passaremos a descrever tais propriedades. Para isso consideramos uma operação fundamental em geometria projetiva que consiste em projetar-se os pontos de uma reta sobre uma segunda reta desde um ponto situado fora de ambas as retas (que supomos pertencer a um mesmo plano).

Ao examinarmos tal operação com mais cuidado veremos que esta não é definida para todos os pontos da primeira reta. De fato não temos a imagem do ponto tal que a reta que une este ponto ao centro de projeção seja paralela à segunda reta.

A existência de tais exceções é bastante inconveniente quando tratamos de questões de geometria que exigem a composição de diversas destas operações de projeção. Para eliminar este inconveniente amplia-se o conjunto de pontos de um plano introduzindo-se os chamados pontos ideais desse plano.

É claro que todo ponto do plano pode ser caracterizado por todas as retas do plano que contém esse ponto. Este fato sugere que um ponto ideal do plano seja definido como sendo o conjunto de todas as retas que são paralelas a uma dada reta. O conjunto de todos os pontos ideais (também denominados pontos impróprios) é chamado de reta ideal do plano.





Em geometria elementar temos a relação de pertinência entre retas e pontos. Uma noção análoga é introduzida em geometria projetiva, denominada incidência de pontos e retas, sendo que neste último caso não nos limitamos somente a pontos e retas do plano mas também consideramos os elementos ideais que acabamos de introduzir.

Assim, dizemos que um ponto P incide com uma reta r nos seguintes casos:

a) Se P e r forem pontos próprios (isto é não ideais) e P pertence a r.

b) Se P for um ponto ideal e r uma reta própria paralela a uma das retas que definem P

c) Se P for um ponto ideal e r for a reta ideal.

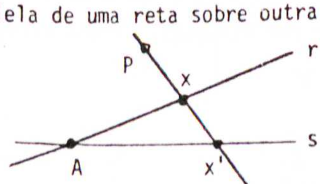
A relação de incidência tem as seguintes propriedades que o leitor poderá demonstrar:

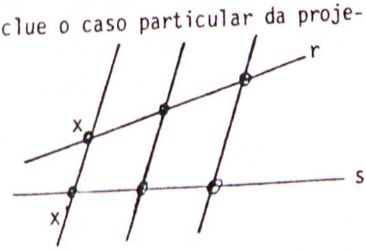
I-1. Dados dois pontos distintos existe uma e uma única reta que incide cp, estes pontos.

I-2 Dadas duas retas distintas então existe um e um único ponto que incide com estas retas.

Aqui devemos ressaltar que a propriedade I-2 não é verificada na geometria euclidiana. Um outro fato interessante a ser observado é que as duas propriedades têm um enunciado que é simétrico no seguinte sentido: Podemos obter I-2 a partir de I-1 permutando as palavras ponto e reta. Esta por sinal é uma característica dos enunciados de resultados em geometria projetiva; eles permanecem válidos se em seus enunciados permutamos as palavras ponto e reta.

No plano projetivo, isto é, o plano de geometria elementar ao qual acrescentamos os elementos ideais é possível definir as operações de projeção sem exceções. Assim dados um ponto P e duas retas, r, s, nenhuma incidindo com P podemos definir uma aplicação que a cada ponto X de r associa o ponto X' que é o ponto comum às retas PX e s. Deve ser notado que esta definição inclue o caso particular da projeção paralela de uma reta sobre outra.





O leitor deve notar também que o ponto A que é comum a ambas as retas é um ponto fixo por esta projeção isto é A=A'.

A correspondência entre pontos de r e s que acabamos de descrever denomina-se perspectividade de r sobre s com centro P.

Passaremos agora a abordar um fato crucial em geometria projetiva; a composição de duas perspectividades não é em geral uma perspectividade. Mais precisamente, seja P um ponto e r, s duas retas que não encontram P. Tomemos ainda um segundo ponto Q e duas retas u,v que não encontram Q. Podemos então construir uma correspondência entre os pontos de r e os pontos de v pela composição das perspectividades de centros P e Q respectivamente.

O leitor poderá construir facilmente exemplos em que o ponto M comum a r e v não permanece fixo e em consequência a correspondência obtida não será uma perspectividade entre r e v. As correspondências que acabamos de mencionar são denominadas projetividades.

Aqui temos um resultado fundamental que é denominado teorema fundamental da geometria projetiva:

Dadas duas retas r,s (não necessariamente distintas) e pontos

A_1, A_2, A_3, dois a dois distintos em r

B_1, B_2, B_3, dois a dois distintos em s

então existe uma e uma única projetividade de r sobre s que transforma os pontos A_1, A_2, A_3 em B_1, B_2, B_3 respectivamente.

Razão Simples de Três Pontos

Voltemos por ora à geometria elementar, isto é somente consideraremos pontos próprios e retas próprias do plano. Dadas duas retas r e s podemos definir (como já o fizemos anteriormente) a projeção paralela de r sobre s segundo uma direção dada. Resulta aqui que a composição de projeções paralelas ainda é uma projeção paralela.

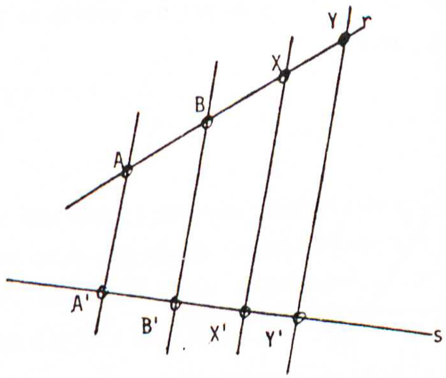
Dados dois pontos distintos A e B de uma reta r, a cada ponto X de r podemos associar o número real que é o quociente da medida de AX pela medida de AB. (com os devidos sinais). Indiquemos este número por r(A,B,X). Temos então:

$$r(A,B,X) = \frac{AX}{AB}.$$

A importância desta noção reside no fato de que $r(A,B,X)$ é invariante por projeção paralela. Em outras palavras se os pontos A',B',X' são as imagens dos pontos A,B,X por uma dada projeção paralela então vale:

$$r(A,B,X) = r(A',B',X') .$$

Este fato nada mais é do que um reenunciado do conhecido teorema de Tales.

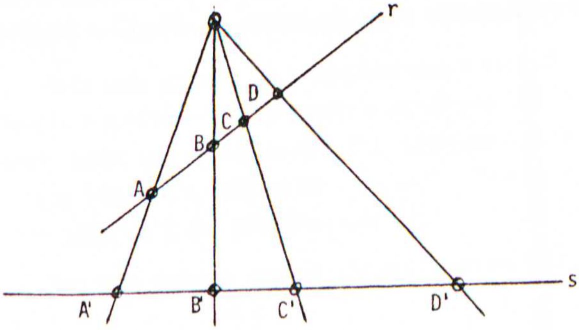


Razão Anarmônica de Quatro Pontos

Daremos agora uma generalização do conceito de razão simples de três pontos de uma reta. O que se procura é o seguinte:

Dados quatro pontos (todos distintos) A,B,C,D de uma mesma reta, queremos definir uma regra que associe a estes pontos um número real, que indicamos por $R(A,B,C,D)$ com a propriedade de que se A',B',C',D' são pontos de uma segunda reta obtidos por projeção a partir de um mesmo ponto P (fora de ambas as retas), tenhamos,

$$R(A',B',C',D') = R(A,B,C,D) .$$

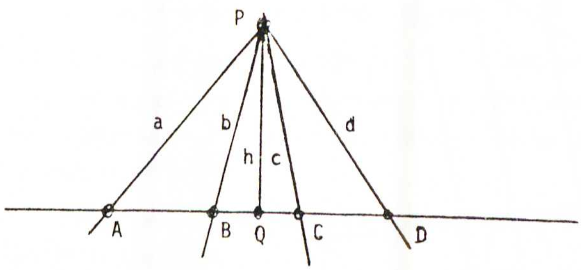


Daremos a seguir uma idéia de como o número R(A,B,C,D) pode ser definido a partir dos pontos dados. De fato mostraremos que o número real

$$R(A,B,C,D) = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$$

satisfaz à condição dada acima.

Sejam então A,B,C,D pontos dois a dois distintos de uma reta r e P (centro de projeção) um ponto fora desta reta. Indicando por h a medida do segmento PQ, o qual é perpendicular à reta AB, temos:



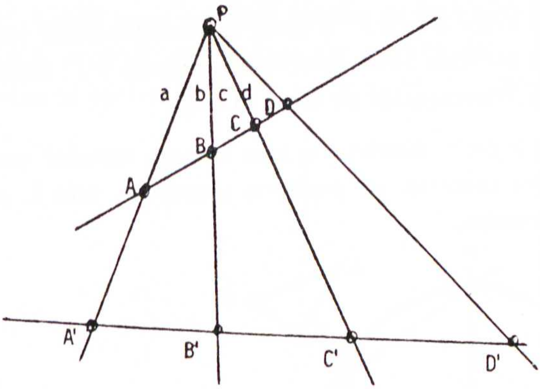
$$\frac{AD}{sen(ad)} = \frac{AP}{h} \cdot PD \ , \ \frac{AB}{sen(ab)} = \frac{AP}{h} \cdot PB$$

$$\frac{CB}{sen(cb)} = \frac{CP}{h} \cdot PB \ , \ \frac{CD}{sen(cd)} = \frac{CP}{h} \cdot PD$$

Destas relações obtemos facilmente:

$$\frac{AD \cdot CB}{AB \cdot CD} = \frac{sen(ad) \cdot sen(cb)}{sen(ab) \cdot sen(cd)}$$

Observemos aqui que o segundo membro desta equação depende somente dos ângulos entre as quatro retas AP, BP, CP, DP. Assim este número não muda se tomamos uma outra reta que corta estas quatro retas em pontos A', B', C' e D' respectiva - mente.



Já mencionamos que toda projetividade é uma composição de perspectividades. Daí vem então que se uma projetividade transforma os pontos A,B,C,D de uma reta em pontos A",B",C",D" de uma segunda reta, vem:

R(A B C D) = R(A",B",C",D").

O número R(A,B,C,D) denomina-se razão anarmônica dos pontos A,B,C,D.

Cônicas na Geometria Projetiva

Em Geoemtria euclidiana as cônicas são definidas utilizando-se fundamentalmente a noção de distância. Isto fica claro quando recordamos as definições de elipse hipérbole e parábola. É um fato notável que cônicas podem ser construidas (e portanto definidas) utilisando-se unicamente as noções de ponto reta e incidência entre pontos e retas. A seguir esboçaremos uma justificação deste fato.

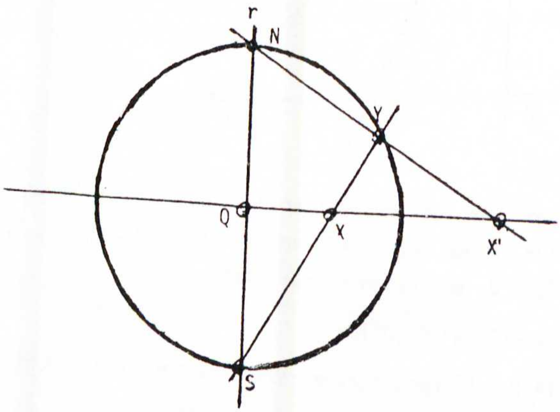
Seja uma circunferência de centro Q e raio a 0. Tracemos pelo ponto Q duas retas ortogonais r e s. Sejam N e S os pontos de intersecção de com a reta s. Vamos agora construir uma aplicação de s em s da seguinte maneira:

Para cada ponto X de s consideramos a reta XS e seja Y o ponto comum à circunferência e a esta reta. A seguir consideramos o ponto X' intersecção de YN com s. Assim temos uma aplicação X → X'. Estendemos esta aplicação definindo a imagem do ponto ideal de s como sendo o ponto Q. Pode-se verificar que a correspondência assim definida é uma projetividade de s.

Com isto podemos reconstruir a circunferência por pontos da seguinte maneira:

Para cada reta t por N seja T' o ponto de encontro desta reta com s. Utilisando a projetividade definida acima construímos o ponto T'. Obtemos então um ponto da circunferência interceptando as retas NT e ST'.

A partir deste exemplo podemos ver como se pode formular uma definição de cônica utilizando somente conceitos de geometria projetiva, isto é, pontos, retas, incidência e projetividades.

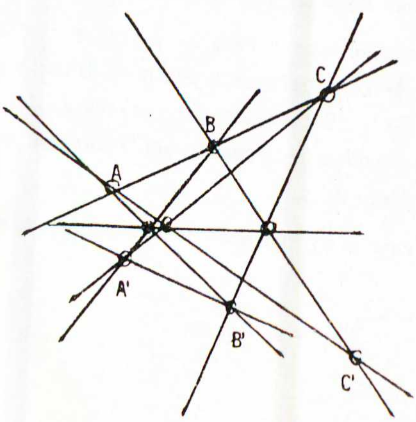


De um modo suscinto podemos definir a geometria projetiva do plano como sendo o estudo das propriedades de figuras que dependem somente de incidência de pontos e retas (próprios ou ideais).

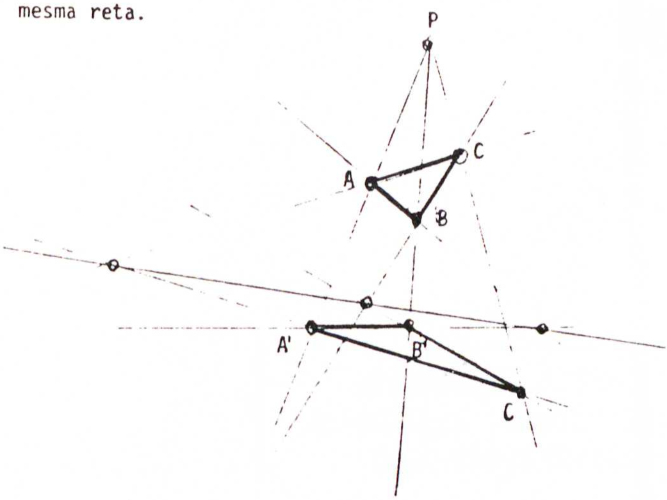
Evidentemente a propriedade de três pontos estarem em uma mesma reta ou então o fato de três retas passarem por um mesmo ponto são propriedades dessa natureza.

Um outro exemplo, já mais complicado é o famoso teorema de Pappus:

Se A,B,C são pontos de uma reta r e A',B',C' são pontos de uma reta s distinta de r então os pontos (A'B).(A'B) , (AC').(A'C), (BC').(B'C) pertencem (ou incidem) a uma mesma reta.



Também temos o famoso teorema de Desargues que afirma que se dois triângulos A,B,C e A',B',C' são tais que às retas AA' , BB' , CC' passam por um ponto P então os pontos (AB).(A'B'), (AC).(A'C') , (BC).(B'C') pertencem a uma mesma reta.



Mencionamos de passagem que ambos resultados podem ser demonstrados com o teorema fundamental da geometria projetiva plana.

No que se refere ao estudo projetivo de cônicas devemos ressaltar o Teorema de Pascal:

Seja A, B, C, A', B', C' seis pontos de uma cônica dois a dois distintos. Neste caso os pontos:

K = (AB').(A'B) , L = (AC').(A'C) e M = (BC').(B'C) sempre estão alinhados.