

# Les invariants de Horn-Tarski des formes quadratiques

M. Dickmann    F. Miraglia

Cet exposé présente un résumé de la section 7, "The Horn-Tarski invariants", de notre article [DM]. Ce que nous appelons les *invariants de Horn-Tarski* d'une forme quadratique constituent un système complet d'invariants pour l'isométrie (en effet, il y a deux séries de tels invariants, les additifs et les multiplicatifs, et chacune d'elles est un système complet d'invariants). Précisons tout de suite que ces invariants n'ont un sens que dans le cadre de la théorie réduite des formes quadratiques. Pourtant, très souvent ils se prêtent au calcul beaucoup plus facilement que d'autres systèmes d'invariants considérés auparavant, tels que les invariants de Stiefel-Whitney à la Milnor (cf. [M; §3]) ou les invariants de Stiefel-Whitney cohomologiques à la Delzant (cf. [D]). Qui plus est, en utilisant les invariants de Horn-Tarski on peut montrer facilement que les invariants de Stiefel-Whitney à la Milnor constituent également un système complet d'invariants pour l'isométrie des formes quadratiques sur tout corps pythagoricien (toute somme de carrés est un carré) et formellement réel (i.e., ordonnable).

Par la suite nous précisons, d'une manière peu détaillée, le contexte dans lequel apparaissent les invariants de Horn-Tarski. D'abord, nous ne travaillons pas directement sur les corps mais dans le cadre abstrait des *groupes spéciaux réduits*; cette notion, introduite dans [LP] et dans [DM; §1], fournit un système axiomatique simple adapté au développement de la théorie des formes quadratiques. Un **groupe spécial** est un groupe  $G$  d'exposant 2 avec un élément distingué,  $-1$ , muni d'une relation d'équivalence sur  $G^2$ ,  $\equiv_G$ , vérifiant sept axiomes (voir [LP] ou [DM; §1]). La relation  $\equiv_G$  axiomatise l'isométrie de formes binaires à coefficients dans  $G$ . L'isométrie de formes de dimension arbitraire est définie récursivement à partir de  $\equiv_G$ . La relation  $\equiv_G$  est, en fait, interdéfinissable (sans quantificateurs) avec la relation binaire  $a \in D_G(\langle 1, b \rangle)$ , " $a$  est représenté par la forme  $\langle 1, b \rangle$ ".

On associe plusieurs groupes spéciaux à un corps  $F$  de caractéristique  $\neq 2$ . La construction qui suit donne les manières connues de le faire:

**Construction.** Etant donné un sous-groupe  $T$  du groupe multiplicatif  $\dot{F}$ , contenant  $\dot{F}^2$ , on considère le groupe  $G_T(F) = \dot{F}/T$ , avec  $\overline{-1} = -1/T$  comme élément distingué, muni de la relation de représentation définie par:

$$(*) \quad \bar{a} \in D_T(\langle 1, \bar{b} \rangle) \quad \text{ssi} \quad \text{il existe } p, q \in T \cup \{0\} \text{ tels que } a = p + bq.$$

Cette relation est bien définie sur  $G_T(F)$ , et on a:

**Proposition 2.** Soient  $F$  et  $T$  comme ci-dessus. Si pour chaque  $b \in \dot{F}$  l'ensemble  $\{p + bq \mid p, q \in T \cup \{0\}\}$  est un sous-groupe de  $\dot{F}$ , alors  $\langle G_T(F), \overline{-1}, \equiv_{G_T(F)} \rangle$  est un groupe spécial ( $\equiv_{G_T(F)}$  désigne la relation d'isométrie de formes binaires déduite de  $(*)$ ). Il est réduit si et seulement si  $T$  est clos par addition. En particulier, si  $T = \dot{F}$ , si  $T = \Sigma F^2 - \{0\}$ , ou si  $T$  est un pré-ordre de  $F$ , alors  $\langle G_T(F), \overline{-1}, \equiv_{G_T(F)} \rangle$  est un groupe spécial (réduit dans les deux derniers cas).  $\diamond$

Pour une démonstration, cf. [DM; Exemple 1.7].



Signalons ensuite que toute algèbre de Boole  $B$  possède une structure naturelle de groupe spécial réduit: la structure de groupe est celle donnée par la différence symétrique  $\Delta$  (i.e., l'addition de l'anneau  $B$ , ayant le plus petit élément  $\perp$  de  $B$  comme unité 1); l'élément distingué  $-1$  est le plus grand élément  $\top$  de  $B$ ; la relation de représentation est simplement l'ordre de  $B$ ; voir [DM Prop. 4.2]. On désigne par  $Sg(B)$  ce groupe spécial réduit. Les groupes spéciaux réduits associés aux algèbres de Boole coïncident, à isomorphisme près, avec ceux des corps appelés SAP; cf. [DM Prop. 6.5] et [P; Thms. 6.7-6.9 et 9.4].

Tout groupe spécial réduit,  $G$ , se plonge de façon naturelle dans le groupe spécial d'une algèbre de Boole,  $B_G$ , appelée son enveloppe booléenne;  $B_G$  est l'algèbre des ouverts-fermés de l'espace d'ordres  $X_G$  de  $G$ , c'est-à-dire, l'ensemble des homomorphismes de groupe spécial de  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}_2$ , muni de la topologie induite par la topologie produit de  $\{\pm 1\}^G$ ;  $\mathbb{Z}_2$  est le groupe spécial réduit  $\langle \{\pm 1\}, -1, \equiv \mathbb{Z}_2 \rangle$  où la relation d'isométrie est déterminée de manière unique par la condition  $\langle 1, 1 \rangle \not\equiv_{\mathbb{Z}_2} \langle -1, -1 \rangle$ . Le plongement  $\varepsilon_G : G \hookrightarrow B_G (= Sg(B_G))$  est donné par:

$$\varepsilon_G(g) = \{\sigma \in X_G \mid \sigma(g) = -1\} \quad \text{pour } g \in G.$$

Alors on a:

**Proposition 3.** *Soit  $G$  un groupe spécial réduit. Alors:*

- (a) ([DM; Corol. 5.3]) *L'application  $\varepsilon_G$  est un homomorphisme injectif de groupes spéciaux.*
- (b) *Tout élément de  $B_G$  s'écrit (de manière non-unique) comme une réunion finie d'intersections finies d'éléments de  $Im(\varepsilon_G)$ .*
- (c) ([DM; Corol. 6.4(a)]) *L'application  $\varepsilon_G$  est un plongement complet, i.e., pour toutes formes  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle$  de dimension arbitraire  $n$  à coefficients dans  $G$ :*

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \equiv_G \langle b_1, \dots, b_n \rangle \quad \text{ssi} \quad \langle \varepsilon_G(a_1), \dots, \varepsilon_G(a_n) \rangle \equiv_{B_G} \langle \varepsilon_G(b_1), \dots, \varepsilon_G(b_n) \rangle. \quad \diamond$$

Signalons, en passant, que l'algèbre de Boole  $B_G$  d'un groupe spécial réduit  $G$  possède des propriétés particulières qui la lient intimement à  $G$ , et qui la distinguent d'autres algèbres de Boole dans lesquelles  $G$  peut être plongé comme groupe spécial. Ainsi, dans [DM; 6.18] nous donnons l'exemple d'un groupe spécial réduit  $F$  qui se plonge comme groupe spécial – mais de manière non-complète – dans une algèbre de Boole  $B$ : l'algèbre  $B$  est beaucoup "plus petite" que l'enveloppe booléenne  $B_F$  de  $F$ . Une propriété cruciale de  $B_G$  est qu'elle est "librement engendrée" par  $G$  en tant que groupe spécial; cf. [DM; Thm. 5.7]. Lorsque  $G = G(F)$  est le groupe spécial (réduit) d'un corps  $F$ , on peut trouver une extension  $K$  de  $F$  – évidemment non-unique – telle que  $G(K) \simeq B_G$  et le plongement  $\varepsilon_G$  de  $G$  dans  $B_G$  est induit par l'inclusion  $F \hookrightarrow K$  ([DM; pp. 60-61]).

Les invariants de Horn-Tarski sont alors définis de la manière suivante:

**Définition 4.** Soit  $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  une forme quadratique à coefficients dans un groupe spécial réduit  $G$ . Les *invariants de Horn-Tarski* de  $\varphi$  sont les éléments suivants de l'enveloppe booléenne de  $B_G$ : pour  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\mathcal{HT}_k(\varphi) = \bigvee_{p \in S^{n,k}} \bigwedge_{i=1}^k a_{p_i} \quad (\text{invariants additifs})$$

et

$$\mathcal{HT}_k^*(\varphi) = \bigtriangleup_{p \in S^{n,k}} \bigwedge_{i=1}^k a_{p_i} \quad (\text{invariants multiplicatifs})$$



$S^{n,k}$  désigne l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur  $k$  prises dans  $\{1, \dots, n\}$ .  $\diamond$

Notre résultat principal est:

**théorème 5** ([DM; Thm. 7.1]). *Pour deux formes  $\varphi, \psi$  de dimension  $n$  à coefficients dans un groupe spécial réduit  $G$ , les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i)  $\varphi \equiv_G \psi$ .
- ii)  $\mathcal{HT}_k(\varphi) = \mathcal{HT}_k(\psi)$  pour tout  $1 \leq k \leq n$  (identité dans  $B_G$ ).
- iii)  $\mathcal{HT}_k^*(\varphi) = \mathcal{HT}_k^*(\psi)$  pour tout  $1 \leq k \leq n$  (identité dans  $B_G$ ).  $\diamond$

d'autres termes, chacune des séries d'invariants de Horn-Tarski additifs et multiplicatifs donne un système complet d'invariants pour l'isométrie des formes quadratiques sur  $G$ .

Dans [DM; §7] nous calculons les (deux) séries d'invariants de Horn-Tarski pour plusieurs classes importantes de formes quadratiques, parmi lesquelles les formes de Pfister et leurs combinaisons linéaires. Ces calculs exacts sont possibles – bien que non-triviaux – grâce à la richesse des algèbres de Boole et au lien étroit entre un groupe spécial réduit et son enveloppe booléenne établi par la Proposition 3(c) ci-dessus.

Soulignons ensuite quelques faits importants.

Les invariants de Horn-Tarski multiplicatifs sont définis en termes des opérations  $\Delta$  et  $\Lambda$ , c'est-à-dire dans la seule structure d'anneau de  $B_G$ . En effet, ils sont formellement analogues aux invariants de Stiefel-Whitney des formes quadratiques sur les corps arbitraires de caractéristique 2 définis par Milnor dans [M; §3]. Bien que n'ayant un sens que pour la théorie réduite, nos invariants multiplicatifs sont, dans ce contexte, plus puissants que ceux de Milnor. Par exemple, on peut prouver:

**Proposition 6.** *Soit  $F$  un corps pythagoricien et formellement réel. Alors il existe un homomorphisme d'anneaux gradués de la  $K$ -théorie modulo 2 de  $F$  à la Milnor dans l'anneau booléen  $B_F = B_G(F)$ ,  $\Phi : k_*(F) \rightarrow B_F$ , qui envoie les invariants de Stiefel-Whitney  $w_k(\varphi)$  d'une forme quadratique  $\varphi$  sur les invariants de Horn-Tarski multiplicatifs  $\mathcal{HT}_k^*(\varphi)$  ( $1 \leq k \leq n$ ). En particulier, les  $w_k$  constituent un système complet d'invariants pour l'isométrie des formes quadratiques sur  $F$ .  $\diamond$*

**Remarque.** Sur  $B_F$  on peut prendre la graduation définie par les sous-anneaux  $B_n(F)$  engendrés par toutes les intersections d'au plus  $n$  éléments de  $F$ .  $\diamond$

Les invariants de Horn-Tarski additifs semblent être nouveaux dans le sens que, à notre connaissance, rien d'analogue n'a été considéré en théorie des formes quadratiques. Dans [DM; Thm. 7.6] nous donnons des formules assez simples qui expriment les invariants de Horn-Tarski additifs en fonction des invariants multiplicatifs, et réciproquement, en termes de la seule opération  $\Delta$ . La Proposition 6 suggère alors la manière dont on pourrait, au moins théoriquement, définir des analogues de nos invariants additifs pour la  $K$ -théorie  $k_*(F)$  de Milnor, avec peut-être certaines propriétés semblables à celles de nos  $\mathcal{HT}_k$ . Pourtant, dans ce contexte la définition de ces invariants apparaît artificielle. Par contre, dans le contexte des algèbres de Boole – qui possèdent un ordre partiel, et dont l'opération  $\vee$  est au moins aussi naturelle que l'opération  $\Delta$  – les invariants additifs sont tout à fait naturels (en fait, nous avons d'abord découvert ceux-ci, et seulement après nous sommes aperçus de l'existence de la série multiplicative).

Il s'avère que les invariants de Horn-Tarski additifs ont, en effet, des meilleures propriétés que

les multiplicatifs; les plus importantes sont:

- Les invariants additifs d'une forme forment une suite décroissante dans l'ordre de  $B_G$ .
- Pour toute forme  $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  sur  $G$ , on a  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \equiv_{B_G} \langle \mathcal{HT}_1(\varphi), \dots, \mathcal{HT}_n(\varphi) \rangle$ .

Ceci est faux pour les invariants multiplicatifs, dont la distribution en termes de l'ordre de  $B_G$  ne semble obéir à aucune loi précise. Cette régularité des invariants additifs apporte parfois des renseignements dont on peut se servir pour prouver certains résultats. Cette technique est utilisée plusieurs fois dans [DM; §7]. Ainsi, en utilisant de manière cruciale cette propriété nous avons donné une preuve très simple et purement combinatoire du résultat connu comme le "Hauptsatz" de Arason-Pfister pour les groupes spéciaux réduits en général [DM; Thm. 7.30].

## Bibliographie.

[D] A. Delzant, *Définition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2*, C.R. Acad. Sci. Paris **255**, 1366-1368 (1962).

[DM] M. Dickmann et F. Miraglia, *Special groups; applications of Boolean algebras to the theory of quadratic forms*, manuscrit, 123 pp., 1995 (soumis).

[LP] A. Lira Pérez, *Les groupes spéciaux*, dans Séminaire de Structures Algébriques Ordonnées 1992-93 (Delon, Dickmann, Gondard, eds.), Paris VII-CNRS Logique, Prepublications, No. 42; Paris, 1993.

[M] J. Milnor, *Algebraic K-Theory and Quadratic Forms*, Inventiones Math. **9**, 318-344 (1970).

[P] A. Prestel, **Lectures on Formally Real Fields**, IMPA, Rio de Janeiro, 1975; also published in Lect. Notes Math. **1093**, Springer, Berlin, 1984.