

COBORDISMO NORMAL E
APLICAÇÕES

D. Randall e J. Daccach

n.º 1

SÃO CARLOS/SP/BRASIL
setembro/1988

Estas notas foram baseadas em um mini-curso ministrado pelo Prof. Duane Randall no verão de 1988 no ICMSC-USP, com apoio financeiro da FINEP. Queremos agradecer à FINEP pelo apoio financeiro e ao Sr. Luiz Carlos Franco pelo excelente trabalho de datilografia.

INDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO II

ÁLGEBRA LINEAR DE FIBRADOS	9
----------------------------------	---

CAPÍTULO III

O TEOREMA PRINCIPAL	29
---------------------------	----

REFERENCIAS	53
-------------------	----

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos resultados fenomenais deste século é o teorema Hopf que estabelece condição necessária e suficiente para que uma variedade C^∞ compacta M sem bordo admita um campo de vetores não nulos. Precisamente, esta condição necessária e suficiente é o anulamento da característica de Euler da variedade.

De uma forma não tão geral quanto esta existem também condições necessárias e suficientes para a existência de k -campos L.I. em cada ponto de M .

A existência de k -campos L.I. numa variedade estabelece a seguinte equação de fibrados vetoriais:

$$\tau M \cong \mathcal{O}^{n-k} + \underline{R}^k \quad \text{onde}$$

$\underline{R}^k$ é o fibrado trivial vetorial sobre M de posto k , ou seja existe um monomorfismo

$$u : \underline{R}^k \rightarrow \tau(M) .$$

Esta pequena introdução induz naturalmente ao seguinte problema:

Sejam α^a e β^b fibrados vetoriais sobre uma variedade

dade C^∞ , compacta sem bordo e conexa onde $a = \dim \alpha$, $b = \dim \beta$ e suponhamos que $a \leq b$.

"Determine obstruções para que exista um monomorfismo $u : \alpha \rightarrow \beta$ ".

U. Koschorke definiu um único elemento num certo grupo de bordismo normal que representa a obstrução total no caso em que $2(b-a) > n$.

Neste sentido a questão da existência de k -campos L.I. na variedade é equivalente a existência de um monomorfismo.

$$u : \mathbb{R}^k \rightarrow \tau(M)$$

Como outro exemplo podemos citar o Teorema de Hirsch:

Seja $M \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}^{2n+1}$ uma imersão com fibrado normal ν , então:

"Existe uma imersão $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+a}$ com fibrado normal α^a se e somente se

$$\nu \equiv \alpha^a + \tilde{\mathbb{R}}^{(n+1)-a} \text{ " .}$$

Nesta nova formulação então a existência de uma imersão com fibrado normal α^a é equivalente à existência de um monomorfismo

$$u : \alpha^a \hookrightarrow \nu, \text{ cujo complementar é trivial.}$$

Vamos estabelecer agora alguns resultados

Suponhamos $\dim \beta = n = \dim M$ e $\dim \alpha = 1$.

Koschorke em 1974 [2] estabeleceu o seguinte resultado para $\beta = \tau(M)$:

Existe um monomorfismo $u : \alpha \rightarrow \tau(M)$ se e somente se

$$1^\circ) \quad \text{Se } n \equiv 0(2) \quad \chi(M) = 0$$

$$2^\circ) \quad \text{Se } n \equiv 1(2) \quad w_n(\tau M - \alpha) = 0.$$

Como aplicação deste resultado mostremos que o fibro do canônico de linhas $\lambda \rightarrow \mathbb{R}P^n$ nunca é um sub-fibrado de $\tau(\mathbb{R}P^n)$.

1) no caso par temos $\chi(\mathbb{R}P^n) \neq 0$

2) no caso ímpar temos

$$w(\tau \mathbb{R}P^n - \lambda) = (1+\alpha)^{n+1} (1+\alpha)^{-1} = (1+\alpha)^n.$$

Assim

$$w_n(\tau \mathbb{R}P^n - \lambda) = \binom{n}{n} \alpha^n = \alpha^n \neq 0,$$

e portanto a obstrução não se anula.

Uma outra aplicação deste resultado é o seguinte

Proposição I.1

Se $n \equiv 1(2)$ então o fibrado determinante de M é um sub-fibrado de $\tau(M)$.

Demonstração

Neste caso a obstrução total da existência de um mono
morfismo $\mu : \det M \hookrightarrow \tau(M)$ é a classe

$$w_n(\tau(M) - \det M) .$$

Uma vez que $W(\det M) = (1+w_1)$ temos então

$$W(\tau(M) - \det M) = (1+w_1+w_2+\dots+w_n)(1+w_1)^{-1}$$

e portanto

$$w_n(\tau(M) - \det M) = w_1^n + w_1^{n-1}w_1 + w_1^{n-2}w_2 + \dots + w_1^{n-k}w_k + \dots + w_n$$

Se mostrarmos que $w_1^{n-k}w_k = 0$ $0 \leq k \leq n$ então a pro
posição fica demonstrada. Isto será feito como consequên
cia do lema abaixo. C.Q.D.

Lema I.2

Seja M^n uma variedade topológica qualquer, compacta
sem bordo e conexa de dimensão n . Então valem as seguin
tes:

1) Para todo $0 \leq k < n$ e toda classe $x \in H^1(M, \mathbb{Z}/2)$ va
le a seguinte relação

$$(n-k-1)x^{n-k}w_k = (k+1)x^{n-k-1}w_{k+1}$$

2) Para todo $0 \leq k \leq n-2$ e toda classe $x \in H^1(M, \mathbb{Z}/2)$ vale a seguinte relação

$$\binom{n-k-2}{2} x^{n-k} w_k + (n-k)(k+1) x^{n-k-1} w_{k+1} + \binom{k-1}{2} x^{n-k-2} w_{k+2} = \\ = (n-k) x^{n-k-1} w_1 w_k + k x^{n-k-2} w_1 w_{k+1} + x^{n-k-2} w_1^2 w_k .$$

Demonstração

1) A seguinte fórmula segue do teorema de Wu

$$Sq^1(x^{n-k-1} w_k) = w_1 x^{n-k-1} w_k$$

uma vez que a primeira classe de Wu $v_1 = w_1$. Desenvolvendo obtemos:

$$Sq^1(x^{n-k-1} w_k) = (Sq^1 x^{n-k-1}) w_k + x^{n-k-1} Sq^1 w_k \\ = (n-k-1) x^{n-k} w_k + x^{n-k-1} w_1 w_k + (k-1) w_{k+1} \\ = (n-k-1) x^{n-k} w_k + w_1 x^{n-k-1} w_k + (k-1) x^{n-k-1} w_{k+1} = w_1 x^{n-k-1} w_k$$

Portanto

$$(n-k-1) x^{n-k} w_k = (k-1) x^{n-k-1} w_{k+1} .$$

2) Analogamente

$$Sq^2(x^{n-k-2} w_k) = v_2 x^{n-k-2} w_k = (w_1^2 + w_2) x^{n-k-2} w_k .$$

Por outro lado

$$Sq^2(x^{n-k-2}w_k) = Sq^2(x^{n-k-2})w_k + Sq^1x^{n-k-2}Sq^1w_k + x^{n-k-2}Sq^2w_k$$

e usando a fórmula de Wu

$$Sq^2(w_k) = \binom{k-1}{2} w_{k+2} + kw_1w_{k+1} + w_2w_k$$

e desenvolvendo de uma maneira análoga ao 1º caso obtemos a fórmula desejada. C.Q.D.

Tomando a fórmula 1 no caso n ímpar e k ímpar obtemos imediatamente

$$x^{n-k}w_k = 0, \quad \text{em particular}$$

$$w_1^{n-k}w_k = 0, \quad \text{para } n \text{ ímpar e } k \text{ ímpar.}$$

Obtemos $w_n = 0$ também pela fórmula 1.

Tomando a fórmula 2 no caso n ímpar e k ímpar obtemos

$$\binom{n-k-2}{2} w_1^{n-k} w_k = 0 \quad \text{pela fórmula 1}$$

$$(n-k)(k+1)w_1^{n-k-1}w_{k+2} = 0 \quad \text{pois } k+1 \text{ é par}$$

$$\binom{k-1}{2} w_1^{n-k-2} w_{k+2} = 0 \quad \text{pela fórmula 1}$$

$$\text{e } w_1^{n-k} w_k = 0 \quad \text{pela fórmula 1}$$

obtendo assim

$$k w_1^{n-k-1} w_{k+1} = 0 \quad \text{e portanto}$$

$$w_1^{n-(k+1)} w_{k+1} = 0 \quad 0 \leq k < n.$$

E assim fica demonstrada a proposição.

C.Q.D.

Esboçaremos uma demonstração do seguinte resultado de [4] pelo método de singularidades nestas notas.

Teorema I.3

Seja α^2 um fibrado de planos sobre M^n tal que $n \geq 5$, $n \equiv 1(2)$ e

$$w_1^2(M) + w_1^2(\alpha) + w_1(M)w_1(\alpha) \neq \binom{n}{2} w_2(\alpha).$$

Então existe $\mu : \alpha^2 \rightarrow \tau(M)$ se e somente se $w_{n-1}(\tau(M)-\alpha) = 0$ em $H^{n-1}(M, \mathbb{Z}/2)$.

Também demonstraremos um teorema (Teorema III.9) que produz o seguinte resultado essencialmente como corolário.

Teorema I.4

Seja α^2 um fibrado não orientável de planos sobre

M^n , $n \geq 8$ e $n \equiv 0 \pmod{4}$. Então existe $\mu : \alpha^2 \rightarrow \tau(M)$ se e somente se

- a) $0 = w_{n-1}(\tau(M) - \alpha) \in H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_{w_1(\alpha) + w_1(M)})$
- b) Existe $v \in H_2(M; \mathbb{Z}_{w_1(\alpha)})$ que é dual mod 2 a $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$ em $H^{n-2}(M, \mathbb{Z}/2)$ e tal que $e(\alpha) \cap v = \chi(M)$.

CAPÍTULO II

ÁLGEBRA LINEAR DE FIBRADOS

Começemos este parágrafo com a seguinte pergunta ingênua:

Quando é que uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b$ é um monomorfismo?

Consideremos $M(b \times a, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $b \times a$. Denotemos por $W^k(b \times a)$ o subconjunto das matrizes em $M(b \times a)$ de posto $\geq k$ (que é um aberto em $M(b \times a)$) e $A^k(b \times a)$ o subconjunto de $W^k(b \times a)$ constituído das matrizes de posto exatamente igual a k . Temos assim a seguinte filtração

$$\begin{array}{ccccccc} M(b \times a) & = & W^0(b \times a) & \supset & W^1(b \times a) & \supset & W^2(b \times a) & \supset & \dots & \supset & W^a(b \times a) \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ & & A^0(b \times a) & & A^1(b \times a) & & A^2(b \times a) & & & & A^a(b \times a) \end{array}$$

obviamente a resposta à pergunta formulada é que f é monomorfismo se e somente se a matriz de f pertence a W^a .

Denotando-se por $\text{cod}(M, N)$ a codimensão de M em N temos imediatamente que

$$\text{cod}(A^k, W^k) = (b - k) \cdot (a - k) .$$

Uma versão parametrizada por pontos de uma variedade

M do acima exposto segue da seguinte maneira:

Sejam α e β fibrados vetoriais sobre M de posto a e b respectivamente com $a \leq b$ e

$$\begin{array}{c} W^k(\alpha, \beta) = \bigcup_{x \in M} W^k(\alpha_x, \beta_x) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

onde $W^k(\alpha_x, \beta_x) = \{ h \in \text{Hom}(\alpha_x, \beta_x) \text{ de posto } \geq k \}$
e

$$\begin{array}{c} A^k(\alpha, \beta) = \bigcup_{x \in M} A^k(\alpha_x, \beta_x) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

onde $A^k(\alpha_x, \beta_x) = \{ h \in \text{Hom}(\alpha_x, \beta_x) \text{ de posto } = k \}$
e também temos

$$\begin{array}{c} \text{Hom}(\alpha, \beta) = \bigcup_{x \in M} \text{Hom}(\alpha_x, \beta_x) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

e assim a seguinte filtração:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(\alpha, \beta) & = & W^0(\alpha, \beta) & \supset & W^1(\alpha, \beta) & \supset & \dots \supset W^a(\alpha, \beta) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A^0(\alpha, \beta) & & A^1(\alpha, \beta) & & \dots & A^a(\alpha, \beta) \end{array}$$

Consideremos $\Gamma(\text{Hom}(\alpha, \beta))$ o conjunto das secções do fibrado $\text{Hom}(\alpha, \beta)$ e é óbvio que existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\Gamma(\text{Hom}(\alpha, \beta))$ e morfismos $u : \alpha \rightarrow \beta$. Assim sendo o conjunto dos monomorfismos $u : \alpha \rightarrow \beta$ corresponde ao conjunto dos elementos em $\Gamma(\text{Hom}(\alpha, \beta))$ cuja imagem está contida em $W^a(\alpha, \beta)$.

Definição II.1

Diremos que $u : \alpha \rightarrow \beta$ é um k -morfismo, $0 \leq k \leq a$, se a secção que a ele corresponde tem imagem em $W^k(\alpha, \beta)$, e além disso u é regular se a correspondente secção s_u for transversal a $A^k(\alpha, \beta)$.

Observemos que A^k tem codimensão $(b-k)(a-k)$, e usando resultados conhecidos de transversalidade a seguinte proposição se verifica imediatamente.

Proposição II.2

Sejam α^a e β^b fibrados vetoriais sobre M com $2(b-a) > n-4$. Então sempre existe um $(a-1)$ -morfismo regular

$$u : \alpha \rightarrow \beta.$$

Vamos neste ponto estabelecer as idéias gerais do problema a ser estudado:

Começemos com um k -morfismo regular

$$u : \alpha^a \rightarrow \beta^b$$

Se for possível evitar A^k cairemos imediatamente em W^{k+1} . Para tanto é preciso pois estudar o espaço A^k .

Consideremos s_u a secção correspondente ao u -morfismo regular u .

Como u é k -morfismo regular, s_u é transversal à subvariedade A^k . Seja $S \subset M$ a subvariedade definida por

$$S = s_u^{-1}(A^k).$$

Observemos que fora de S , s_u tem posto maior ou igual a $k+1$.

No caso em que $b = n$ e $a = 1$, S é um conjunto finito de pontos.

É a subvariedade S que fornecerá a obstrução, localizada num determinado grupo.

Consideremos os fibrados:

$$\begin{array}{c} A^k(\alpha, \beta) \\ \downarrow \bar{P} \\ \alpha \longrightarrow M \longleftarrow \beta \end{array}$$

Considerando-se fibrados sobre A^k induzidos por $\tilde{p}$, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{Ker} \oplus \hat{Coim} = \tilde{p}^* \alpha & & \tilde{p}^* \beta = \hat{Coker} \oplus \hat{Im} \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & A^k & \\
 & \downarrow \tilde{p} & \\
 \alpha \longrightarrow M \longleftarrow \beta
 \end{array}$$

Vamos explicar como esta decomposição é obtida:

Seja $h \in A^k$, $\tilde{p}(h) = x$ então para cada $x \in M$ temos

$$h : \alpha_x \rightarrow \beta_x \text{ de posto } = k$$

assim

$$\alpha_x = Ker \ h \oplus Coim \ h$$

e

$$\beta_x = Im \ h \oplus Coker$$

são respectivamente as decomposições.

Assim se $h \in A^k$ a fibra de $\hat{Ker}$ sobre h é $Ker \ h$ e a fibra de $\hat{Coim}$ sobre h é $Coim \ h$ e assim por diante.

Proposição II.3

Os fibrados $v(A^k(\alpha, \beta), W^k(\alpha, \beta))$ e $\text{Hom}(\hat{Ker}, \hat{Coker})$ são naturalmente isomorfos sobre $A^k(\alpha, \beta)$.

Demonstração (Esboço):

Definimos um morfismo de fibrados

$$v(A^k(\alpha, \beta), W^k(\alpha, \beta)) \rightarrow \text{Hom}(\hat{Ker}, \hat{Coker})$$

da seguinte maneira. Seja $h_0 \in A^k(\alpha, \beta)$ com $p(h_0) = x_0 \in M$. Um vetor normal $[\tilde{h}]$ em

$$T_{h_0}(\text{Hom}(\alpha, \beta)) / T_{h_0}(A^k(\alpha, \beta)) \quad \text{em} \quad h_0$$

pode ser representado por um morfismo $\tilde{h}_0$ tangente a fibra $\text{Hom}(\alpha, \beta)_{x_0}$. Isto é, $\tilde{h}_0$ é um morfismo linear $\tilde{h}_0 : \alpha_{x_0} \rightarrow \beta_{x_0}$. Compondo $\tilde{h}_0$ com a inclusão $\text{Ker } \alpha \subset \alpha_{x_0}$ e com a projeção $\beta_{x_0} \rightarrow \text{Coker } h_0$, obtemos o morfismo desejado em $\text{Hom}(\hat{Ker}, \hat{Coker})$.

Vamos agora definir a noção de cobordismo normal e mostrar como o esquema estabelecido anteriormente define um elemento neste grupo de cobordismo normal.

Vamos primeiramente definir o grupo $\Omega_n(X; \phi^+ - \phi^-)$ e posteriormente o grupo relativo $\Omega_n(X, A; \phi^+ - \phi^-)$ e mostrar que esta definição nos fornece uma teoria de homolo

gia generalizada.

Seja X um espaço de Hausdorff, paracompacto e $\phi = (\phi^+, \phi^-)$ um par de fibrados vetoriais sobre X .

Seja $(M, g, \bar{g})$ uma tripla formada por:

- 1) M^n é uma variedade compacta sem bordo C^∞ de dimensão n .
- 2) $g : M \rightarrow X$ uma aplicação contínua
- 3) $\bar{g} : \nu(M) \oplus g^*(\phi^-) \rightarrow g^*(\phi^+)$ um isomorfismo de fibrados onde $\nu(M)$ é o fibrado estável normal de M .

Definição:

Duas triplas $(M_1^n, g_1, \bar{g}_1)$ e $(M_2^n, g_2, \bar{g}_2)$ são cobordantes caso exista uma tripla $(W^{n+1}, G, \bar{G})$ satisfazendo

- a) W^{n+1} é uma variedade C^∞ compacta com bordo tal que $\partial W = M_1 \cup M_2$.
- b) $G : W \rightarrow X$ é uma extensão contínua de $g_1 \sqcup g_2$.
- c) $\bar{G} : \nu(W) \oplus G^*(\phi^-) \rightarrow G^*(\phi^+)$ é um isomorfismo de fibrados tal que $\bar{G}|_{\partial W} = \bar{g}_1 \sqcup \bar{g}_2$.

Técnicas elementares de topologia diferencial mostram que cobordismo entre triplas é uma relação de equivalência. Assim sendo $\Omega_n(X; \phi)$ é o conjunto das classes de equivalência.

Caso o fibrado virtual $\phi^+ - \phi^-$ possa ser concretamente realizado então é possível mostrar que

$$\Omega_n(X; \phi) \approx \pi_{n+t}(T(\tilde{\phi})) = \pi_n^S(T(\tilde{\phi}))$$

onde $\tilde{\phi}$ é o fibrado vetorial de $\dim t > n$ isomorfo a $\phi^+ - \phi^-$. Logo mais esboçaremos uma construção deste isomorfismo.

II.4 = CLASSE DE BORDISMO DEFINIDA POR K-MORFISMO REGULAR

Seja $u : \alpha \rightarrow \beta$ um k -morfismo regular e s_u sua respectiva secção em $\text{Hom}(\alpha, \beta)$. Assim sendo s_u é transversal a $A^k(\alpha, \beta)$ e $S = s_u^{-1}(A^k(\alpha, \beta))$ é uma subvariedade de M de dimensão $n - (a-k) \times (b-k)$. O elemento desejado será representado pela tripla $(S, g, \bar{g})$ que está no grupo

$$\Omega_{n-(a-k) \times (b-k)}(A^k(\alpha, \beta) ; \tilde{\phi})$$

onde os ingredientes são definidos como segue:

$$g = s_u|_S : S \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{g} = T(S) \oplus (\text{Ker} \oplus \text{Coker}) & \xrightarrow{\cong} & T(S) \oplus \nu(S, M) \\ & & \parallel \\ & & T(M)|_S \end{array}$$

onde $\alpha|_S = \text{Ker} \oplus \text{Coker}$.

Observando que temos os seguintes isomorfismos $\underline{\text{Ker}} \otimes \underline{\text{Coker}} \cong g^*(\hat{\underline{\text{Ker}}} \otimes \hat{\underline{\text{Coker}}})$ e $\underline{\text{TM}}|_S = g^*(\tilde{p}^*(\text{TM}))$ então a tripla $(S, g, \tilde{g})$ define um elemento no grupo

$$\Omega_{n-(a-k) \times (b-k)}(A^k(\alpha, \beta), \tilde{\phi})$$

onde $\tilde{\phi} = \hat{\underline{\text{Ker}}} \otimes \hat{\underline{\text{Coker}}} - p^*(\text{TM})$.

Os casos interessantes e as aplicações serão dadas em função do estudo da classe de cobordismo como foi descrita.

II.5 - BORDISMO NORMAL RELATIVO

Sejam X um complexo celular, $A \subset X$ um subconjunto, e ξ^N

$$\downarrow$$

X um fibrado vetorial de posto N .

Vamos então definir o grupo de bordismo relativo $\Omega_n(X, A; \xi^N)$ no caso em que $N \geq n+2$.

Definição:

Uma aplicação normal em (X, A) consta de uma tripla (M^n, g, G) satisfazendo:

1) $(M, \partial M)$ são subvariedades compactas C^∞ de D^{n+N} tal que M intercepta $\partial D^{n+N} = S^{n+N-1}$ transversalmente, ou seja $\partial M = S^{n+N-1} \wedge M$.

2) $g : (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$ é uma aplicação contínua.

3) $G : \nu(M \subset \mathbb{D}^{n+N}) \xrightarrow{\cong} g^* \xi^N$

e

$$G : \nu(\partial M \subset S^{n+N-1}) \xrightarrow{\cong} g^* \xi^N \Big|_{\partial M}.$$

Definição:

Um bordismo normal entre as triplas (M_0, g_0, G_0) (M_1, g_1, G_1) é uma tripla (W^{n+1}, h, H) satisfazendo:

1) $(W, \partial W)$ são subvariedades compactas de $(\mathbb{D}^{n+N} \times I, \partial(\mathbb{D}^{n+N} \times I))$ que interceptam transversalmente $\partial(\mathbb{D}^{n+N} \times I)$ e $S^{n+N-1} \times \{0, 1\}$ e tal que

$$W \cap (\mathbb{D}^{n+N} \times \{0\}) = M_0 \times \{0\}$$

$$W \cap (\mathbb{D}^{n+N} \times \{1\}) = M_1 \times \{1\}.$$

Notemos que $V = \partial W \cap S^{n+N-1} \times I$ é uma variedade compacta tal que $\partial V = \partial M_0 \sqcup \partial M_1$.

2) $h : (W, \partial W) \rightarrow (X, A)$ estende $g_0 \sqcup g_1$.

3) $G : \nu(W \subset \mathbb{D}^{n+N} \times I) \xrightarrow{\cong} h^* \xi^N$ estende $G_0 \sqcup G_1$

e o isomorfismo $\nu(V \subset S^{n+N-1}) \xrightarrow{\cong} h^* \xi \Big|_V$

estende $G_0 \Big|_{\partial M_0} \sqcup G_1 \Big|_{\partial M_1}$

Técnicas de topologia diferencial podem ser aplicadas e facilmente prova-se que esta relação é uma relação de equivalência. Assim por definição, o grupo de bordismo normal relativo é o conjunto das classes de equivalência, denotado por

$$\Omega_n(X, A; \xi^N) \quad \text{onde a soma é definida por}$$

$$\begin{aligned} [M_1, g_1, G_1] + [M_0, g_0, G_0] &= \\ &= [M_0 \sqcup M_1, g_0 \sqcup g_1, G_0 \sqcup G_1] . \end{aligned}$$

Observação:

A hipótese $N \geq n+2$ é utilizada de modo a se obter M_0 e M_1 subvariedades disjuntas de D^{n+N} .

Poderíamos construir o elemento inverso de um elemento $[M, g, G]$, porém o faremos de uma forma mais elegante utilizando o

Lema II.4

Seja $A \in O(n+N)$ um elemento qualquer. Dado um elemento $[M, g, G]$ em $\Omega_n(X, A; \xi^N)$ consideremos o elemento $[A^{-1}(M), g \circ A, G \circ A]$ onde olhemos A como um difeomorfismo $A: D^{n+N} \rightarrow D^{n+N}$. Então temos $[A^{-1}(M), g \circ A, G \circ A] = \det(A) [(M, g, G)]$ em $\Omega_n(X, A; \xi)$.

Daremos uma demonstração deste lema depois de identificar $\Omega_n(X, A; \xi)$ com um determinado grupo de homotopia estável utilizando-se a construção de Pontryagin - Thom.

II.6 - HOMOMORFISMO SUSPENSÃO

Seja $\underline{R}^t$ fibrado trivial de posto t . Nosso objetivo agora é definir o homomorfismo suspensão

$$\Sigma : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_n(X, A; \xi^N \oplus \underline{R}) .$$

Por meio da inclusão natural $D^{n+N} \subset D^{n+N+1}$ que provém da inclusão canônica $R^{n+N} \subset R^{n+N+1}$ que anula a última coordenada, podemos associar a aplicação normal (M, g, G) a aplicação normal $(M, g, G \oplus \underline{1})$ onde $G \oplus \underline{1} : \nu(M \subset D^{n+N+1}) \xrightarrow{\sim} g^*(\xi^N) \oplus \underline{R}^1$.

Consequentemente obtemos um morfismo natural $\Sigma : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_n(X, A; \xi^N \oplus \underline{R}^1)$.

Vamos mostrar em breve que sob a hipótese de $N \geq n+2$, Σ é um isomorfismo.

II.7 - CONSTRUÇÃO DE PONTYAGIN - THOM

Teorema II.8

A Construção de Pontryagin-Thom estabelece um isomorfismo entre $\Omega_n(X, A; \xi^N)$ e $\pi_{n+N}(T(\xi^N), T(\xi|_A))$.

Esboço da demonstração:

Podemos identificar o espaço total do fibrado normal $\nu(M \subset \mathbb{D}^{n+N})$ com uma vizinhança tubular de M em $\mathbb{D}^{n+N}$.

O complexo de Thom $T(\nu)$ é por definição o espaço quociente do fibrado de discos de ν pelo fibrado de esferas.

As aplicações

$$\begin{array}{ccc} \nu & \xrightarrow[\cong]{G} & g^* \xi^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \nu & \xrightarrow[\cong]{G} & g^* (\xi^N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial M & \longrightarrow & \partial M \end{array}$$

induzem a aplicação

$$\bar{G}: (T(\nu), T(\nu|_{\partial M})) \rightarrow (T(\xi), T(\xi|_A))$$

e assim a aplicação normal (M, g, G) produz uma aplicação de pares $\bar{G} \circ c: (\mathbb{D}^{n+N}, S^{n+N-1}) \rightarrow (T(\xi), T(\xi|_A))$ onde c colapsa a esfera S^{n+N-1} no ponto base.

Obviamente aplicações normais bordantes produzem aplicações homotópicas. Esta observação garante um morfismo bem definido

$$\Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \pi_{n+N}(T(\xi^N), T(\xi|_A)).$$

Usando o conceito de transversalidade vamos esboçar uma de

monstração de que o morfismo que acabamos de construir é de fato um isomorfismo.

Dada uma aplicação de pares $(D^{n+N}, S^{n+N-1}) \rightarrow (T(\xi^N), T(\xi^N|_A))$ podemos aproximá-la por uma aplicação homotópica h tal que $h \neq X$ e $h|_{S^{n+N-1}} \neq A$. Vemos X e A como as secções nulas dos fibrados $\begin{array}{c} \xi^N \\ \downarrow \\ X \end{array}$ e $\begin{array}{c} \xi^N \\ \downarrow \\ A \end{array}$.

Sendo que fibrados vetoriais são localmente triviais podemos projetar $\tilde{U} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ para $\tilde{U}$, um aberto de trivialização de ξ^N .

Usando o resultado clássico para transversalidade relativa de $\mathbb{R}^N$, obtemos $M^n = h^{-1}(X)$, uma subvariedade de D^{n+N} tal que $\partial M = M \cap S^{n+N-1}$ e isomorfismos do fibrado normal de M em D^{n+N} com $h^*(\xi^N)$ e do fibrado normal de M em S^{n+N-1} com $h^*(\xi^N|_A)$.

Aplicações homotópicas produzem aplicações normais em (X, A) que são bordantes. Assim o morfismo construído entre

$$\pi_{n+N}(T(\xi), T(\xi|_A)) \quad \text{e} \quad \Omega_n(X, A; \xi^N) \quad \text{é}$$

bem definido, e é o inverso do homomorfismo inicialmente construído.

Consequências da Construção de Pontryagin - Thom

Proposição II.9

O homomorfismo suspensão

$$\Sigma : \Omega_n(X, A; \xi) \rightarrow \Omega_n(X, A; \xi \otimes \underline{\mathbb{R}}^1)$$

é um isomorfismo.

Demonstração:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n(X, A; \xi^N) & \xrightarrow{\quad} & \Omega_n(X, A; \xi^N \otimes \underline{\mathbb{R}}^1) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \pi_{n+N}(T(\xi), T(\xi|_A)) & \simeq & \pi_{n+N+1}(\Sigma T(\xi), \Sigma T(\xi|_A)) = \\ & & = \pi_{n+N+1}(T(\xi^N \otimes \underline{\mathbb{R}}^1), T((\xi^N \otimes \underline{\mathbb{R}}^1)|_A)) \end{array}$$

C.Q.D.

Técnicas usuais de topologia algébrica garantem as seguintes propriedades:

A) Sequência exata do par (X, A)

Dado um par (X, A) consideremos as identificações A com (A, ϕ) e X com (X, ϕ) e sejam $i : A \rightarrow X$ e $j : X \rightarrow (X, A)$ as inclusões naturais de pares.

Definamos $\partial : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_{n-1}(A; \xi^N)$ da seguinte maneira:

$S^{n+N-1} - \{e_1\}$ é homeomorfo a D^{n+N-1} com orientação correspondendo a $\{e_2, \dots, e_{n+N}\}$. Dado $[(M, g, \bar{G})]$ em $\Omega_n(X, A; \xi^N)$ seja $\partial[(M, g, G)]$ o elemento $[\partial M, g, G|_{\partial M}]$ em $\Omega_{n-1}(A; \xi^N|_A)$. Temos uma sequência

$$\begin{aligned} \longrightarrow \Omega_n(A; \xi^N|_A) &\xrightarrow{i_*} \Omega_n(X; \xi^N) \xrightarrow{j_*} \Omega_n(X, A; \xi^N) \xrightarrow{\partial} \\ \longrightarrow \Omega_{n-1}(A; \xi^N|_A) &\longrightarrow \dots \end{aligned}$$

que facilmente prova-se que é uma sequência exata.

B) Excisão: Se $U \subset A$ é um subespaço satisfazendo $\bar{U} \subset \bar{A}$ então a inclusão

$i : (X-U, A-U) \rightarrow (X, A)$ induz isomorfismo entre

$$\Omega_n(X-U, A-U; \xi^N) \cong \Omega_n(X, A; \xi^N).$$

C) Se $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma aplicação satisfazendo $f^*(\eta) = \xi$ então f induz um morfismo bem definido

$$f_* : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_n(Y, B; \eta^N).$$

D) Homotopia: Sejam $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ aplicações satisfazendo $f_0^*(\eta) = f_1^*(\eta) = \xi$. Então se f_0 é homotopi

ca a f_1 teremos $f_{0*} = f_{1*} : \Omega_n(X, A; \xi) \rightarrow \Omega_n(Y, B; \eta)$.

E) O grupo de bordismo reduzido $\tilde{\Omega}_n(X; \xi)$ é por definição o grupo relativo $\Omega_n(X, *; \xi)$ para todo $n \geq 0$.

Proposição II.10

Seja ξ um fibrado trivial sobre X . Então

$$\Omega_n(X; \xi) \cong \tilde{\Omega}_n(X; \xi) \oplus \pi_n^S$$

Demonstração:

Uma vez que ξ é trivial, a aplicação $r : X \rightarrow *$ constante, satisfaz $r^*(\xi|_*) = \xi$. Desta forma temos bem definido o morfismo $r_* : \Omega_n(X; \xi) \rightarrow \Omega_n(*; R^N)$ que é um splitting para o morfismo

$$i_* : \Omega_n(*, R^N) \rightarrow \Omega_n(X; \xi^N).$$

A afirmação segue então da sequência exata

$$\longrightarrow \Omega_n(*, R^N) \xrightleftharpoons[i_*]{r_*} \Omega_n(X; \xi) \longrightarrow \Omega_n(X, *, \xi) \xrightarrow{\partial} \longrightarrow$$

C.Q.D.

Notemos que $\Omega_n(*; \text{trivial}) \cong \Omega_n(*; R^N)$ para $N \geq n+2$. Assim a construção de Pontryagin-Thom fornece um isomorfismo

entre $\Omega_n(*; \mathbb{R}^N)$ e $\pi_{n+N}(S^N)$ pois $S^N = T(\mathbb{R}^N)$.

Proposição II.11

Seja ξ um fibrado estável qualquer sobre S^m .
Então $\tilde{\Omega}_n(S^m; \xi) \cong \pi_{n-m}^S$.

Demonstração:

Seja ΣX uma suspensão qualquer, e a decomposição canônica

$$\Sigma X = C_+ X \cup C_- X \quad \text{com} \quad C_+ X \cap C_- X = X.$$

Observando que $C_+ X$ é contrátil temos:

$$\tilde{\Omega}_n(\Sigma X; \xi) = \Omega_n(\Sigma X, *; \xi) = \Omega_n(\Sigma X, C_+ X; \xi)$$

e por excisão temos $\Omega_n(\Sigma X, C_+ X; \xi) \cong \Omega_n(C_- X, X; \xi)$ e a sequência exata da tripla fornece $\Omega_n(C_- X, X; \xi) \cong \Omega_{n-1}(X, *; \xi)$ e portanto $\tilde{\Omega}_n(\Sigma X; \xi) \cong \tilde{\Omega}_{n-1}(X; \xi)$. Consequentemente temos:

$$\tilde{\Omega}_n(S^m; \xi) \cong \tilde{\Omega}_{n-1}(S^{m-1}; \xi) \cong \dots \cong \tilde{\Omega}_{n-m}(S^0; \xi) \cong$$

$$\cong \Omega_{n-m}(*, \text{trivial}) \cong \pi_{n-m}^S$$

C.Q.D.

Observação:

Não é verdadeiro que $\Omega_n(S^m; \xi) \cong \pi_{n-m}^S \oplus \pi_n^S$. Obviamente

te isto é verdadeiro caso ξ seja trivial. Se ξ não for trivial isto pode não ocorrer. Como exemplo tomemos λ o fibrado de Hopf sobre $S^1 = \mathbb{R}P^1$.

Temos:

$$\Omega_0(S^1; \lambda \otimes \mathbb{R}^1) = \pi_2(T(\lambda \otimes \mathbb{R}^1)) = \pi_2(\mathbb{R}P^2) = H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2.$$

Proposição II.12

Seja ξ um fibrado sobre X, X conexo.

$$\Omega_0(X; \xi) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } \xi \text{ for orientável} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{se } \xi \text{ for não orientável} \end{cases}$$

Demonstração:

$\Omega_0(X; \xi) = \Omega_0(X; \xi^N) = \pi_N(T(\xi^N)) = H_N(T(\xi^N); \mathbb{Z})$ e o resultado segue pelo Teorema do Isomorfismo de Thom.

C.Q.D.

Proposição II.13

Se (X, A) é um par de complexos celulares então $\Omega_n(X, A; \xi)$ depende somente do $(n+1)$ esqueleto.

Demonstração:

O $(n+1)$ esqueleto do par (X, A) denotado por $(X, A)^{[n+1]}$ é por definição o par $(X^{[n+1]} \cup A, A)$. O $N+n+1$ esqueleto

de $T(\xi^N)$ é determinado pelo $(n+1)$ esqueleto de X . Os grupos de homotopia em dimensão j são determinados pelo $(j+1)$ esqueleto do complexo. Consequentemente a inclusão

$$T(\xi|_{X^{[n+1]} \cup A}) \longrightarrow T(\xi^N)$$

induz isomorfismo nos grupos de homotopia até dimensão $n+N$, isto é

$$\Omega_n((X,A)^{[n+1]}; \xi) = \Omega_n(X, A; \xi)$$

C.Q.D.

Definição II.14

Dois fibrados vetoriais ξ^r e η^s possuem o mesmo tipo de homotopia estável de esferas, caso exista uma aplicação

$$f : S(\xi^r \oplus \mathbb{R}^{N-r}) \rightarrow S(\eta^s \oplus \mathbb{R}^{N-s})$$

entre os fibrados em esferas tal que a restrição em cada fibra é uma equivalência de homotopia.

Observemos que isto acontece se e somente se $J(\xi) = J(\eta)$ onde J denota o J -morfismo

$$J : [, BO] \rightarrow [, BF] \quad \text{onde} \quad BF = \Omega^\infty S^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega^n S^n.$$

Proposição II.15

Sejam ξ^r e η^s dois fibrados vetoriais que possuem o mesmo tipo de homotopia estável de esferas. Então

$$\Omega_n(X; \xi) = \Omega_n(X; \eta) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Demonstração:

$$\Omega_n(X; \xi^r) = \pi_{n+N}(T(\xi^r \oplus \mathbb{R}^{N-r}))$$

e

$$\Omega_n(X; \eta^s) = \pi_{n+N}(T(\eta^s \oplus \mathbb{R}^{N-s}))$$

uma vez que $T(\xi^r \oplus \mathbb{R}^{N-r})$ é o cone da projeção, então uma equivalência de homotopia estável de esferas entre os fibrados fornece uma equivalência de homotopia entre os espaços de Thom, donde portanto segue o resultado.

C.Q.D.

CAPÍTULO III

O TEOREMA PRINCIPAL

O nosso objetivo é demonstrar o teorema principal, que identifica a obstrução total à existência de um $(k+1)$ -morfismo regular, homotópico ao k -morfismo regular $u : \alpha \rightarrow \beta$ dado, como um elemento do bordismo normal do espaço $A^k(\alpha, \beta)$. Primeiro, vamos formular condições para que dois k -morfismos regulares sejam homotópicos por k -morfismos regulares.

Proposição III.1

Sejam $u_0 : \alpha \rightarrow \beta$ e $u_1 : \alpha \rightarrow \beta$ dois k -morfismos regulares entre os fibrados vetoriais α^a e β^b sobre a variedade M^n . Então eles são homotópicos por k -morfismos regulares caso $(a-k+1)(b-k+1) > n+1$.

Demonstração:

Seja $\pi : M \times I \rightarrow M$ a projeção no primeiro fator. Queremos construir um k -morfismo regular entre $\pi^*(\alpha)$ e $\pi^*(\beta)$ que coincide com $\pi^*(u_0)$ em $M \times \{0\}$ e com $\pi^*(u_1)$ em $M \times \{1\}$. Por indução, seja $U : \pi^*(\alpha) \rightarrow \pi^*(\beta)$ um j -morfismo regular que coincide com $\pi^*(u_0)$ em $M \times \{0\}$ e com $\pi^*(u_1)$ em $M \times \{1\}$. Aqui j é um inteiro satisfazendo

$0 \leq j \leq k-1$. Afirmamos que a secção

$$s_U : M \times I \rightarrow W^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$$

não intercepta $A^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$, pela seguinte razão:

Por hipótese, $n+1 < (a-k+1)(b-k+1)$. Mas $(a-k+1)(b-k+1) \leq (a-j)(b-j)$, a codimensão de $A^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$ em $W^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$.

Consequentemente, s_U não intercepta $A^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$; isto é, s_U é um $(j+1)$ -morfismo. Tomamos um $(j+1)$ -morfismo regular que é homotópico a s_U e coincide com s_U em $M \times \{0,1\}$. Repetimos a demonstração acima até conseguirmos um k -morfismo regular entre $\pi^*(\alpha)$ e $\pi^*(\beta)$ que coincide com $\pi^*(u_0)$ em $M \times \{0\}$ e com $\pi^*(u_1)$ em $M \times \{1\}$.

C.Q.D.

O nosso objetivo agora é demonstrar o Teorema Principal. Lembremos da situação: $u : \alpha \rightarrow \beta$ é um k -morfismo regular entre α e β , cujas dimensões são a e b sobre M^n . Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\alpha, \beta) = W^0(\alpha, \beta) \supset \dots \supset W^k(\alpha, \beta) & & \\ \downarrow p & \nearrow s_U & \cup \\ M & & A^k(\alpha, \beta) \\ \cup & \nearrow g = s_U|_S & \\ S & & \end{array}$$

$S = \pi_u^{-1}(A^k(\alpha, \beta))$ é uma subvariedade de codimensão $(a-k)(b-k)$ em M , e consta dos pontos onde u tem posto $= k$. Temos também um isomorfismo G de fibrados estáveis sobre S .

$$\begin{aligned} G : v(S) &= v(S \subset M) \oplus v(M|_S) = \\ &= g^*(v(A^k(\alpha, \beta) \subset W^k(\alpha, \beta)) \oplus v(M)|_S = \\ &= g^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker} - \hat{p}^*(\tau M)) . \end{aligned}$$

Consequentemente, temos um elemento $\tilde{\omega}_{k+1}(\alpha, \beta, u) = [S, g, G]$ em $\Omega_{n-(a-k)(b-k)}(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$ onde $\tilde{\phi} = \hat{Ker} \oplus \hat{Coker} - \hat{p}^*(\tau M)$.

Teorema Principal III.2

Seja $u : \alpha^a \rightarrow \beta^b$ um k -morfismo regular entre os fibrados vetoriais sobre M , tal que $n+2 < 2(a-k)(b-k)$. Então existe um $(k+1)$ -morfismo regular $v : \alpha \rightarrow \beta$ que é homotópico a u por k -morfismos se e somente se $\tilde{\omega}_{k+1}(\alpha, \beta, u) = 0$ em $\Omega_{n-(a-k)(b-k)}(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$.

Demonstração:

Sabemos que dois k -morfismos regulares que são homotópicos por k -morfismos produzem o mesmo elemento em bordismo

normal. Suponhamos que $v : \alpha \rightarrow \beta$ existe.

Sendo que v é $(k+1)$ -morfismo, então segue que $s_v^{-1}(A^k(\alpha, \beta)) = \emptyset$. Isto é, $\tilde{w}_{k+1}(\alpha, \beta, u)$ tem que ser zero.

Suponhamos agora que $\tilde{w}_{k+1}(\alpha, \beta, u) = 0$. Queremos construir um $(k+1)$ -morfismo $v : \alpha \rightarrow \beta$ homotópico a u . Temos os seguintes dados:

- a) Uma variedade W tal que $\partial W = S$.
- b) Uma aplicação $h : W \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$ que estende $g : S \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$.
- c) Um isomorfismo $H : v(W) = h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker}) + h^*(\tilde{p}(v(M)))$ que estende o isomorfismo:

$$G : v(S) = v(S \subset M) \oplus v(M)|_S = g^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker}) \oplus v(M)|_S$$

Vamos construir um k -morfismo $\bar{u} : \pi^*(\alpha) \rightarrow \pi^*(\beta)$ sobre $M \times I$ tal que $\bar{u}$ coincide com u em $M \times \{0\}$ e $\bar{u}$ define um $(k+1)$ -morfismo em $M \times \{1\}$.

Passo I

Podemos mergulhar W em $M \times I$ de forma tal que $\partial W = W \cap \partial(M \times I) = S \subset M \times \{0\}$, e além disso W é da forma $S \times \{0, \epsilon\}$ numa vizinhança de $M \times \{0\}$ em $M \times I$.

Notemos que a dimensão de W é $n+1 - (a-k)(b-k)$. Consequentemente,

$$2 \dim W + 1 = 2(n+1) - 2(a-k)(b-k) + 1 < 2(n+1) - (n+2) + 1 = n+1.$$

Pelo Teorema clássico de Whitney, existe tal mergulho. Inclusive, quaisquer dois mergulhos são isotópicos, isto é, homotópicos por mergulhos. Portanto, podemos considerar W como subvariedade de $M \times I$ com as propriedades desejadas.

Passo II

Início da construção de $\bar{u}$.

Definamos $\bar{u} = u$ em $M \times \{0\}$. Estendamos u sobre toda a variedade W por meio da aplicação $h: W \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$. Desta maneira $\bar{u}$ tem posto k em W . O isomorfismo H pode ser escrito da seguinte maneira

$$H: \nu(W \subset M \times I) \oplus \nu(M \times I)|_W = h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker}) \oplus h^*(\tilde{p}^*(\nu(M))).$$

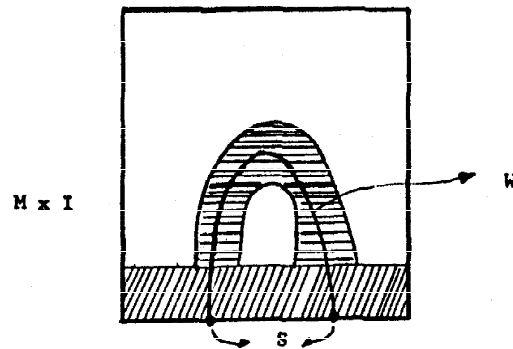
$H: \nu(M \times I)|_W$ é isomorfo a $h^*(\tilde{p}^*(\nu(M)))$. Sendo que $n+1 - (a-k)(b-k) < (a-k)(b-k)$, $h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker})$ é um fibrado estável sobre W . Concluimos que a classe de homotopia do isomorfismo H se restringe a um isomorfismo

$$\bar{H}: \nu(W \subset M \times I) = h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker})$$

Notemos que os pontos numa vizinhança tubular de $A^k(\alpha, \beta)$ em $W^k(\alpha, \beta)$ correspondem a $(k+1)$ -morfismos entre α e β . Por meio do isomorfismo $\bar{H}$, podemos agora estender $\bar{u}$ a uma vizinhança tubular de W em $M \times I$, tendo o próprio W como singularidade. Isto é, podemos definir

$\bar{u}$ tal que $\bar{u}$ tem posto k somente em W .

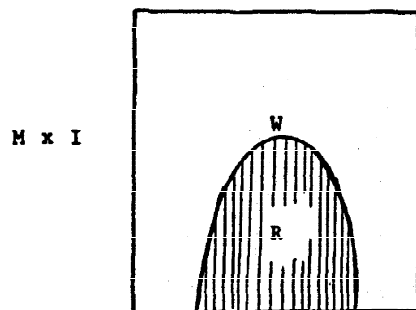
Adicionando um colarinho a $M \times \{0\}$ se for necessário, podemos também definir $\bar{u}$ de maneira óbvia em $M \times [0, \varepsilon/2]$.



Passo III

Seja $i_2 : M \times I \rightarrow I$ a projeção no segundo fator. Seja a região R "abaixo da singularidade W " definida por

$$R = \{(\pi(y), t) \in M \times I \mid y \in W \text{ e } 0 \leq t \leq i_2(y)\}$$



A região R onde $\bar{u}$ ainda não está definida é localmente homeomorfo ao espaço euclidiano cuja dimensão é $\dim W + 1 = n + 2 - (a-k)(b-k)$. Sendo que por hipótese $n + 2 - (a-k)(b-k) < (a-k)(b-k)$, podemos estender $\bar{u}$ sobre R todo com posto $\geq k+1$ fora de W , pois a codimensão de $A^k(\alpha, \beta)$ em $W^k(\alpha, \beta)$ é maior que a dimensão de R .

Notemos agora que o k -morfismo $\bar{u}$, que tem posto $\geq k+1$ fora de W , está definido numa região de $M \times I$ suficientemente "gordo" para conter o gráfico de uma aplicação diferenciável $r : M \rightarrow (0,1)$, onde $r(x) > 0$ para todo $x \in M$, tal que a parte que fica abaixo do gráfico de r é homeomorfa a $M \times I$ e contém W no interior. Portanto conseguimos um $(k+1)$ -morfismo v em $M \times \{1\}$ por meio do homeomorfismo.

Observação:

Esta demonstração que apresentamos é uma adaptação da demonstração no caso complexo na tese de doutoramento de Mário Olivero Marques da Silva [5].

Acabamos de demonstrar o Teorema Fundamental, que identifica a obstrução à existência de um $(k+1)$ -morfismo regular $v : \alpha^a + \beta^b$ entre fibrados vetoriais α^a e β^b sobre M^n com um único elemento $\tilde{w}_{k+1}(\alpha, \beta) \in \Omega_{n-(a-k)(b-k)}(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$,

caso sejam satisfeitas as condições $n+2 < 2(a-k)(b-k)$ e $n+1 < (a-k+1)(b-k+1)$. Mas o espaço $A^k(\alpha, \beta)$ é complicado. Veremos que sob certas condições podemos substituir o bordismo normal de $A^k(\alpha, \beta)$ pelo bordismo normal de uma variedade Grassmanniana $G_{a-k}(\alpha)$, cuja topologia algébrica pode ser expressa melhor em termos dos fibrados α e β e da variedade M^n .

Seja $G_{a-k}(\alpha) = \bigcup_{x \in M} G_{a-k}(\alpha_x)$ a variedade Grassmanniana de α . Aqui $G_{a-k}(\alpha_x)$ é a variedade cujos pontos são os planos de dimensão $(a-k)$ no espaço euclidiano R^a .

Seja $\pi : G_{a-k}(\alpha) \rightarrow M$ a projeção canônica. Obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\alpha, \beta) \supset A^k(\alpha, \beta) & \xrightarrow{\bar{p}_k} & G_{a-k}(\alpha) \\ & \searrow \bar{p} \quad \swarrow \pi & \\ & M & \end{array}$$

onde $\bar{p}_k$ leva o morfismo $h : \alpha_x \rightarrow \beta_x$ de posto k à $\text{Ker } h \in G_{a-k}(\alpha_x)$.

Existem os fibrados canônicos $\gamma \in \pi^*(\alpha)$ e $\gamma^\perp = \pi^*(\alpha) \mid \gamma$ sobre $G_{a-k}(\alpha)$ cujas dimensões são $a-k$ e k respectivamente. Dado um plano de dimensão $a-k$ em α_x , a fibra de γ sobre este plano consta de todos os vetores contidos neste plano.

Lema III.3

O espaço $A^k(\alpha, \beta)$ é homeomorfo ao espaço $A^k(\gamma^\perp, \pi^*(\beta)) = \text{Mono}(\gamma^\perp, \pi^*(\beta))$.

Demonstração:

Seja $h : \alpha_x \rightarrow \beta_x$ um morfismo de posto k . Escrevamos $\alpha_x = \text{Ker } h \oplus \text{Coim } h$. A restrição de h a $\text{Coim } h$ é um monomorfismo, portanto, produz um elemento de $A^k(\gamma_{\tilde{p}_k(h)}^\perp, \pi^*(\beta)_{\tilde{p}_k(h)})$.

Por outro lado, seja $i : \gamma_L^\perp \rightarrow \pi^*(\beta)_L$ um monomorfismo onde $L \in G_{a-k}(\alpha_x)$ para algum $x \in M$. Então $\alpha_x = L \oplus L^\perp$ e definimos $h : \alpha_x \rightarrow \beta_x$ por $h|_{L^\perp} = i$, $h|_L = 0$. Isto é, $h \in A^k(\alpha_x, \beta_x)$ e $\tilde{p}_k(h) = L$.

C.Q.D.

Proposição III.4

A projeção $\tilde{p}_k : A^k(\alpha, \beta) \rightarrow G_{a-k}(\alpha)$ induz um isomorfismo

$$(\tilde{p}_k)_* : \Omega_1(A^k(\alpha, \beta); \phi) \rightarrow \Omega_1(G_{a-k}(\alpha); \phi)$$

para $i < b-k$ e um epimorfismo para $i = b-k$, onde ϕ denota o fibrado estável

$$\gamma \otimes \pi^*(\beta) + \gamma \otimes \gamma - \gamma \otimes \pi^*(\alpha) - \pi^*(\tau(M)).$$

Demonstração:

Notemos que $\tilde{p}^*(\beta) - \tilde{p}^*(\alpha) / \hat{Ker}$ é isomorfo a $\hat{Coker}$ como fibrados estáveis sobre $A^k(\alpha, \beta)$. Consequentemente

$$\begin{aligned} (\tilde{p}_k)^*\phi &= \hat{Ker} \otimes \tilde{p}^*(\beta) + \hat{Ker} \otimes \hat{Ker} - \hat{Ker} \otimes \tilde{p}^*(\alpha) - \tilde{p}^*(\tau(M)) \\ &= \hat{Ker} \otimes \hat{Coker} - \tilde{p}^*(\tau(M)) = \tilde{\phi}. \end{aligned}$$

Pelo Lema III.3, deduzimos que $\tilde{p}_k$ é uma fibração cuja fibra é a variedade de Stiefel $V_k(R^b) = \text{Mono}(R^k, R^b)$. Sendo que $V_k(R^b)$ é $(b-k-1)$ -conexa, sabemos que $\tilde{p}_k$ induz isomorfismos em homologia até dimensão $b-k$ e um epimorfismo em dimensão $b-k$. O resultado segue-se deste facto, da identificação de bordismo normal com homotopia estável de complexos de Thom, do isomorfismo de Thom, e do Teorema de Whitehead [6].

C.Q.D.

Exemplo:

Seja $b = \dim \beta = n$. Existe um $(a-1)$ -morfismo regular $u: \alpha \rightarrow \beta$ caso $n < 2(b-a) + 4$, isto é, caso $2a < n + 4$. A obstrução $\tilde{w}_a(\alpha, \beta)$ detecta a existência de um monomorfismo entre α e β caso $n+2 < 2(n-a+1)$, isto é, $2a < n$, pelo Teorema Fundamental.

Seja $G_1(\alpha) = RP(\alpha)$ o fibrado projetivo associado a α . Então $\tilde{p}_{a-1}: A^{a-1}(\alpha, \beta) \rightarrow RP(\alpha)$ induz um isomorfismo

entre $\Omega_{a-1}(A^{a-1}(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$ e $\Omega_{a-1}(RP(\alpha); \phi)$ pela proposição.

Concluimos que $\omega_a(\alpha, \beta) = (\tilde{p}_{a-1})_*(\tilde{\omega}_a(\alpha, \beta)) = 0$ se e somente se existe um monomorfismo de α em β , caso $2a < n$. Tomemos $\alpha = \mathbb{R}^a$, o fibrado trivial de dimensão a . Para $2a < n = \dim \beta$, a obstrução $\omega_a(\mathbb{R}^a, \beta)$ é $\Omega_{a-1}(RP^{a-1} \times M; \phi)$ onde $\phi = \lambda \otimes \beta - \lambda \otimes \alpha - \tau(M)$.

Consideremos brevemente o problema da existência de um monomorfismo $u: \alpha^1 \rightarrow \tau(M)$ onde α^1 é um fibrado qualquer de linhas sobre M^n , $n > 2$. A obstrução $\tilde{\omega}_1(\alpha^1, \tau(M))$ pertence ao grupo $\Omega_0(A^0(\alpha, \tau(M)); \tilde{\phi})$ onde $\tilde{\phi} = \alpha \otimes \tau(M) - \tau(M)$.

Já vimos que este grupo é isomorfo a $\mathbb{Z}$ caso $w_1(\tilde{\phi}) = 0$ e a $\mathbb{Z}/2$ caso $w_1(\tilde{\phi}) \neq 0$ onde $w_1(\tilde{\phi}) = nw_1(\alpha) + w_1(M) + w_1(M) = nw_1(\alpha)$.

Além disso, podemos identificar $A^0(\alpha, \beta)$ com a base M por meio da secção nula.

Então a singularidade S é obtida como a intersecção transversal de M com a secção nula (M também) em $\text{Hom}(\alpha, \tau(M))$.

Este conjunto finito S representa $\tilde{\omega}_1(\alpha, \tau(M))$.

Caso o grupo de bordismo normal seja $\mathbb{Z}/2$, a classe representada por S é apenas o número de pontos de S contados módulo 2.

Caso o grupo seja o grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros, é necessário associar $+1$ ou -1 à cada singularidade, dependendo

das orientações locais e somar estes números.

O seguinte resultado foi obtido por U. Koschorke [2].

Teorema III.5

Para n ímpar α^1 é um subfibrado de $\tau(M)$ se e somente se a classe de Stiefel-Whitney $w_n(\tau(M) - \alpha)$ é nula.

Para n par e $n > 2$, α^1 é um subfibrado de $\tau(M)$ se e somente se o número de Euler $\chi(M)$ é nulo.

Demonstração (Esboço):

Caso n seja ímpar, $w_1(\tilde{\phi}) = w_1(\alpha)$. A obstrução $\tilde{w}_1(\alpha, \tau(M))$ portanto pertence ao grupo $\mathbb{Z}/2$ para $w_1(\alpha) \neq 0$. Além disso, sabemos que S em homologia é o dual de Poincaré da classe de Stiefel-Whitney $w_n(\tau(M) - \alpha)$, a obstrução primária em cohomologia. Notemos que α^1 é trivial se e somente se $w_1(\alpha) = 0$.

Para n ímpar e α trivial, o número de Euler é 0, mas também representa a obstrução para que R^1 seja um subfibrado. Neste caso $w_n(\tau(M)) = 0$ claramente.

Consideremos n par. Neste caso, o fibrado $\tilde{\phi}$ é sempre orientável. Estamos buscando uma condição necessária e suficiente para que o fibrado vetorial $\text{Hom}(\alpha, \tau(M))$ de dimensão n possua uma secção não-nula.

Pela teoria clássica de obstruções, sabemos que a clas

se de Euler $e(\text{Hom}(\alpha, \tau(M)) = e(\alpha \otimes \tau(M))$ representa a obstrução total. Isto é, $e(\alpha \otimes \tau(M)) \in H^n(M; \mathbb{Z}_{w_1(M)})$ é dual no sentido de Poincaré à classe $[S] \in H_0(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Afirmamos que $e(\alpha \otimes \tau(M)) = e(\tau(M)) = \chi(M)$ gerador.

Esta afirmação segue-se da identificação da classe de Euler do fibrado universal $\gamma^n \otimes \gamma^1$ sobre $BO(n) \times BO(1)$ com $e(\gamma^n)$ para n par. Aqui γ^n denota o fibrado universal de dimensão n sobre $BO(n)$. Consequentemente, $\tilde{w}_1(\alpha, \tau(M)) = 0$ se e somente se $\chi(M) = 0$ para n par.

Observação:

A teoria não se aplica ao estudo de subfibrado de linhas nos fibrados tangentes de superfícies, mas neste caso os resultados podem ser obtidos diretamente.

Como vimos o Teorema Principal de Koschorke produz uma única obstrução num grupo de bordismo normal para a existência de um monomorfismo entre fibrados vetoriais α^a e β^b sobre uma variedade M^n caso $b-a > n/2$. Ulrich Koschorke desenvolveu uma sequência exata pelo método de singularidades que envolve os grupos de bordismo normal em dimensões baixas. Esta sequência exata é a ferramenta principal utilizada por Koschorke [3]. Vamos considerar nestas notas uma parte da sequência exata. O nosso objetivo é explicar como é que esta sequência exata pode ser aplicada ao seguinte problema:

"Seja α^2 um fibrado vetorial qualquer de planos sobre uma variedade diferenciável, compacta, sem bordo, conexa de dimensão n . Determinar condições necessárias e suficientes em termos de números característicos para que α seja um subfibrado do fibrado tangente $\tau(M)$ ".

III.6 - A SEQUÊNCIA EXATA EM BORDISMO NORMAL

Sejam X um complexo celular qualquer e ϕ um fibrado vetorial estável qualquer sobre X . Koschorke derivou a seguinte sequência exata, descrita na página 94 em [3].

$$\rightarrow \Omega_2(X; \phi) \rightarrow \bar{\Omega}_2(X; \phi) \xrightarrow{\sigma \circ j_2} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\delta_1} \Omega_1(X; \phi) \xrightarrow{f_1} \bar{\Omega}_1(X; \phi) \rightarrow 0$$

Os grupos $\bar{\Omega}_m(X; \phi)$ utilizam menos informação do que os grupos $\Omega_m(X; \phi)$ de bordismo normal. $\bar{\Omega}_m(X; \phi)$ consta de classes de equivalência de triplas $(N^m, g: N^m \rightarrow X, \text{or})$ onde or é um isomorfismo entre os fibrados de linhas dados pelo determinante. Isto é, denotemos por ξ_ϕ o fibrado de determinante associado a qualquer fibrado vetorial (inclusive estável) ϕ .

Então ξ_ϕ é um fibrado vetorial de linhas com $w_1(\xi_\phi) = w_1(\phi)$ or: $\xi_{\vee(N)} = \xi_{g*\phi}$ é um isomorfismo. Existe o morfismo de Hurewicz $\mu: \bar{\Omega}_m(X; \phi) \rightarrow H_m(X; \mathbb{Z}_{w_1(\phi)})$ que leva $[(N^m, g, \text{or})] \rightarrow g_*[N] \in H_m(X; \mathbb{Z}_{w_1(\phi)})$.

Aqui $[N]$, a classe fundamental, gera $H_m(N; \mathbb{Z}_{w_1(N)}) = \mathbb{Z}$. O morfismo de Hurewicz é um isomorfismo para $m = 1$.

Em particular, $\bar{\Omega}_1(X; \phi)$ coincide com o grupo $\Omega_1(X)$ de bordismo orientado de X que é isomorfo a $H_1(X; \mathbb{Z})$ caso $w_1(\phi) = 0$.

Os morfismos f_2 e f_1 na sequência acima provêm de restrição. Isto é, um isomorfismo $G : v(N) \rightarrow g^*(\phi)$ certamente fornece um isomorfismo $or : \xi_{v(N)} \rightarrow \xi_{g^*(\phi)}$ entre os fibrados determinantes. O morfismo $\sigma \circ j_2$ leva uma classe $[(N^2, g : N \rightarrow X, or : \xi_{v(N)} \rightarrow \xi_{g^*(\phi)})]$ qualquer em $\bar{\Omega}_2(X; \phi)$ ao elemento em $\mathbb{Z}/2$ dado pelo número $w_2(g^*(\phi))[N] \in \mathbb{Z}/2$.

Isto é, avaliamos a segunda classe de Stiefel-Whitney do fibrado induzido $g^*(\phi)$ sobre N na classe fundamental mod 2 de N .

A cópia de $\mathbb{Z}/2$ corresponde ao grupo $\pi_1^S = \pi_{N+1}^S(S^N)$ para $N > 2$. A imagem do gerador por δ_1 corresponde à classe da tripla $(S^1, c : S^1 \rightarrow X, \text{ trivialização canônica estável de } \tau(S^1))$ onde $c : S^1 \rightarrow X$ é a aplicação constante. É extremamente difícil detectar a imagem de $\mathbb{Z}/2$ por δ_1 em geral, como veremos. Consequentemente sempre buscamos condições para que $\sigma \circ j_2$ seja sobrejetora e, equivalentemente, o morfismo δ_1 seja nulo.

Voltaremos ao problema de mergulhar α^2 em $\tau(M)$ como subfibrado. O Teorema Fundamental de Koschorke produz um elemento $\omega_2(\alpha, \tau(M))$ em $\Omega_1(RP(\alpha); \Psi)$ que representa a

obstrução total. Aqui $RP(\alpha)$ denota o fibrado projetivo associado ao fibrado vetorial α^2 . O fibrado estável $\bar{\nu}$ sobre $RP(\alpha)$ é o fibrado $\lambda \otimes \pi^*(\tau(M)) - \lambda \otimes \pi^*(\alpha) - \pi^*(\tau(M))$ onde λ é o fibrado canônico de linhas sobre o espaço total $RP(\alpha)$, $\pi : RP(\alpha) \rightarrow M$ é a projeção canônica. Relembramos que a cohomologia $H^*(RP(\alpha); \mathbb{Z}/2)$ é um módulo sobre $H^*(M; \mathbb{Z}/2)$ gerado pela classe $x = w_1(\alpha)$ módulo a relação

$$x^2 + x \cdot \pi^*(w_1(\alpha)) + \pi^*(w_2(\alpha)) = 0.$$

Conseqüentemente, escreveremos

$$H^*(RP(\alpha); \mathbb{Z}/2) = H^*(M; \mathbb{Z}/2)[x] / (x^2 + xw_1(\alpha) + w_2(\alpha))$$

e omitiremos o morfismo π^* para classes que provêm da base M .

Os dois lemas a seguir nos fornecerão expressões para $w_1(\Psi)$ e $w_2(\Psi)$.

Lema III.7

$$w_1(\Psi) = nx + w_1(\alpha)$$

Demonstração:

Os fibrados $\Psi + \lambda \otimes \alpha + \tau(M)$ e $\lambda \otimes \tau(M)$ são isomorfos estavelmente.

Tomando a primeira classe de Stiefel-Whitney de cada fibrado, temos que

$$w_1(\Psi) + w_1(\lambda \otimes \alpha) + w_1(M) = w_1(\lambda \otimes \tau(M))$$

mas $w_1(\lambda \otimes \alpha) = w_1(\alpha)$ e $w_1(\lambda \otimes \tau(M)) = w_1(M) + nw_1(\lambda)$.
(Ver a fórmula na página 98 [3] para as classes de Stiefel-Whitney do produto tensorial). Segue-se então que $w_1(\Psi) = nx + w_1(\alpha)$.

C.Q.D

Seja λ^1 o fibrado complementar a λ em $\pi^*(\alpha)$. Isto é, $\lambda \otimes \lambda^1 = \pi^*(\alpha)$ sobre $RP(\alpha)$.

Pelo Lema III.7 temos que

$$\pi^*(w_1(\alpha)) = w_1(\lambda) + w_1(\lambda^1). \text{ Isto é } w_1(\lambda^1) = x + w_1(\alpha).$$

Lema III.8

$$w_2(\Psi) = xw_1(M) + \binom{n+1}{2} xw_1(\alpha) + \binom{n}{2} w_2(\alpha) + w_1^2(\alpha).$$

Demonstração:

$\Psi + \lambda \otimes \alpha$ é isomorfo estavelmente ao fibrado virtual $\lambda \otimes \tau(M) - \tau(M)$. Pelo cálculo feito na página 98 de [3] sabemos que $w_2(\lambda \otimes \tau(M) - \tau(M)) = \binom{n}{2} x^2 + xw_1(M)$. Além disso $w_2(\lambda \otimes \alpha) = w_1^2(\lambda) + w_1(\lambda)w_1(\alpha) + w_2(\alpha) = x^2 + xw_1(\alpha) + w_2(\alpha) = 0$ em $H^2(RP(\alpha); \mathbb{Z}/2)$.

$$\begin{aligned} \text{Já sabemos que } w_1(\Psi)w_1(\lambda \otimes \alpha) &= (nx + w_1(\alpha)) \cdot w_1(\alpha) = \\ &= n \times w_1(\alpha) + w_1^2(\alpha). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} w_2(\Psi) &= w_2(\lambda \otimes \tau(M) - \tau(M)) + w_2(\lambda \otimes \alpha) + w_1(\Psi)w_1(\lambda \otimes \alpha) = \\ &= \binom{n}{2} [xw_1(\alpha) + w_2(\alpha)] + xw_1(M) + nxw_1(\alpha) + w_1^2(\alpha) = \\ &= xw_1(M) + \binom{n+1}{2} xw_1(\alpha) + \binom{n}{2} w_2(\alpha) + w_1^2(\alpha). \end{aligned}$$

C.Q.D.

Podemos agora reparar a seguinte situação: Seja α^2 o fibrado trivial $\mathbb{R}^2$ de planos sobre uma variedade M^n orientável qualquer. Então as classes $w_1(\alpha)$, $w_2(\alpha)$ e $w_1(M)$ são classes triviais. Segue-se portanto que $w_2(\Psi) = 0$, e conseqüentemente, $\delta_1 : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Omega_1(\mathbb{R}P(\alpha); \Psi)$ é um monomorfismo.

Já sabemos pelo trabalho de Atiyah-Dupont que a obstrução total $w_2(\mathbb{R}^2, \tau(M))$ possui uma componente não trivial em geral em $\delta_1(\mathbb{Z}/2)$ para $n \equiv 0 \pmod{4}$ e $n \equiv 1 \pmod{4}$. As componentes em $\delta_1(\mathbb{Z}/2)$ são dadas por

a) $1/2 (\chi(M) - (-1)^S \sigma(M)) \pmod{2}$ onde $n = 4s$, $\sigma(M)$ denota a assinatura de M e

b) $R(M) \in \mathbb{Z}/2$ a semi-característica para $n \equiv 1 \pmod{4}$.

A semi-característica é definida por

$$R(M) = \left\{ \left(\sum_{i \geq 0} \text{posto } H_{2i}(M; \mathbb{Z}/2) \right) \bmod 2 + (w_2(M) \cup w_{n-2}(M)) [M] \right\} \bmod 2$$

Já sabemos que $\bar{\Omega}_1(RP(\alpha); \Psi)$ é isomorfo a $H_1(RP(\alpha); \mathbb{Z}_{w_1(\Psi)})$. Isto é, $f_1(w_2(\alpha, \tau(M)))$ é detectado por homologia, enquanto a obstrução $w_2(\alpha, \tau(M))$ de Koschorke pode ser mais complicada. O seguinte teorema fornece muitas situações onde o anulamento da imagem é equivalente ao anulamento da obstrução.

Teorema III.9

Seja M^n uma variedade diferenciável, compacta sem bordo e conexa, que é não-orientável e cuja dimensão $n \equiv 0 \bmod 4$, $n \geq 8$. Seja α^2 um fibrado vetorial qualquer de planos sobre M . Então existe um monomorfismo de α^2 em $\tau(M)$ se e somente se

$$f_1(w_1(\alpha, \tau(M))) = 0 \text{ e } \bar{\Omega}_1(RP(\alpha); \Psi)$$

Demonstração

Queremos construir explicitamente um elemento em $\bar{\Omega}_2(RP(\alpha); \Psi)$ cuja imagem por soj_2 é não nula, portanto δ_1 será nulo.

Temos 2 casos a considerar:

Caso I

$$w_1(\alpha) = w_1(M) = 0$$

Tomemos uma aplicação qualquer $g : S^1 \rightarrow M$ tal que $g^*(w_1(M)) \neq 0$. Consequentemente, $g^*(\alpha) = \xi \otimes \underline{R}^1$ onde ξ denota o fibrado de Hopf de linhas sobre S^1 .

Consideremos o seguinte diagrama entre os fibrados projetivos associados aos fibrados α e $g^*(\alpha) = \xi \otimes \underline{R}^1$.

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{\text{id}} & S^1 \\
 \searrow & & \searrow \\
 \text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1) & \xrightarrow{h} & \text{RP}(\alpha) \\
 \downarrow p & & \downarrow \pi \\
 S^1 & \xrightarrow{g} & M
 \end{array}$$

Notemos que $\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1)$ é a garrafa de Klein. Sabemos que o fibrado tangente $\tau(\text{RP}(\alpha)) = \pi^*(\tau(M)) \otimes \lambda \otimes \lambda^1$ enquanto que $\tau(\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1)) = p^*(\tau(S^1)) \otimes h^*(\lambda \otimes \lambda^1)$. Sendo que $w_1(\alpha) = w_1(M) = w_1(\lambda \otimes \lambda^1)$, concluímos que $h^*(w_1(\Psi)) = h^*(w_1(\alpha)) = w_1(h^*(\lambda \otimes \lambda^1)) = w_1(\nu(\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1)))$.

Assim obtemos um elemento $[\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1), h, \text{or}]$ em $\bar{\Omega}_2(\text{RP}(\alpha), \Psi)$.

A imagem deste elemento por soj_2 é detectada por $h^*(w_2(\Psi))$. Agora $h^*(w_2(\Psi))$ pelo Lema III.8 é dada por $h^*(xw_1(M) + w_1^2(M))$ pois $\binom{n+1}{2} \equiv \binom{n}{2} \equiv 0 \pmod{2}$. Portanto $h^*(w_2(\Psi)) = h^*(x) \cdot p^*(g^*(w_1(M)))$, que gera $H^2(\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1); \mathbb{Z}/2)$.

Caso II

$w_1(\alpha) \neq w_1(M)$ e $w_1(M) \neq 0$. Tomemos uma aplicação $g: S^1 \rightarrow M$ tal que $g^*(w_1(M)) \neq 0$, mas $g^*(w_1(\alpha)) = 0$. Tal aplicação existe, pois $H^1(M; \mathbb{Z}/2) = \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}/2), \mathbb{Z}/2)$.

O fibrado induzido $g^*(\alpha) = \mathbb{R}^2$, cujo fibrado projetivo $\text{RP}(g^*(\alpha))$ sobre S^1 é o toro $S^1 \times S^1$. Outra vez, nós consideramos o seguinte diagrama de fibrados projetivos associados a α e $g^*(\alpha)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} S^1 \\ \searrow \\ S^1 \times S^1 \\ \downarrow p \\ S^1 \end{array} & \xrightarrow{h} & \begin{array}{c} S^1 \\ \searrow \\ \text{RP}(\alpha) \\ \downarrow \pi \\ M \end{array} \\
 & & \xrightarrow{g}
 \end{array}$$

Notemos que $h^*(w_1(\Psi)) = h^*(\pi^*(w_1(\alpha))) = p^*(g^*(w_1(\alpha))) = 0 = w_1(S^1 \times S^1)$. Conseqüentemente, obtemos um elemento

$$[(S^1 \times S^1, h, \text{or})] \in \bar{\Omega}_2(\text{RP}(\alpha), \Psi).$$

A imagem deste elemento roj_2 é detectada por $h^*(w_2(\Psi))$. Agora $h^*(w_2(\Psi))$ pelo Lema III.8 é dada por $h^*(xw_1(M) + w_1^2(\alpha)) = h^*(x) \cdot p^*(g^*(w_1(M))) + p^*(g^*(w_1^2(\alpha))) = h^*(x) \cdot p^*(g^*(w_1(M)))$, que gera $H^2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}/2)$. Segue-se que f_1 é um isomorfismo entre $\Omega_1(\text{RP}(\alpha); \Psi)$ e $\bar{\Omega}_1(\text{RP}(\alpha); \Psi)$.

C.Q.D.

Podemos esboçar agora uma demonstração do seguinte resultado.

Teorema III.10

Seja M^n uma variedade diferenciável, compacta sem bordo e conexa, que é não-orientável e cuja dimensão $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq 8$. Seja α um fibrado vetorial qualquer de planos sobre M . Então existe um monomorfismo de α em $\tau(M)$ se e somente se existe uma classe v em $H^{n-2}(M; \mathbb{Z}_{w_1(\alpha)+w_1(M)})$ tal que v reduz módulo 2 à classe de Stiefel-Whitney $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$ e, além disso,

$$v \cdot e(\alpha) = e(\tau(M)) \quad \text{em} \quad H^n(M; \mathbb{Z}_{w_1(M)}) .$$

Demonstração (esboço):

Pelo Teorema III.9, basta provar que

$$f_1(\omega_2(\alpha, \tau(M))) = 0 \quad \text{em} \quad \bar{H}_1(RP(\alpha); \psi) .$$

Já vimos que $\bar{H}_1(RP(\alpha); \psi) \cong H_1(RP(\alpha); \mathbb{Z}_{w_1(\alpha)})$. Considere mos primeiro a classe $\pi_*(f_1(\omega_2(\alpha, \tau(M))))$ em $H_1(M; \mathbb{Z}_{w_1(M)})$ onde $\pi: RP(\alpha) \rightarrow M$ é a projeção natural. Esta classe é Poincaré dual à classe de Whitney torcida $w_{n-1}(\tau(M) - \alpha)$. Consequentemente, ela é nula se e somente se existe uma classe u em $H^{n-2}(M; \mathbb{Z}_{w_1(M)+w_1(\alpha)})$ que reduz módulo 2 à

$$w_{n-2}(\tau(M) - \alpha) .$$

Façamos agora a seguinte observação. Caso $\tau(M)$ admita alguma decomposição $\tau(M) = \alpha \oplus \eta$, então claramente obtemos a seguinte equação envolvendo classes de Euler

$$e(\tau(M)) = e(\alpha) \cdot e(\eta) .$$

Além disso, $e(\eta)$ reduz módulo 2 à $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$, pois o fibrado η é estavelmente equivalente ao fibrado estável $\tau(M) - \alpha$. Esta condição necessária para o anulamento da obstrução $f_1(\omega_2(\alpha, \tau(M)))$ é também suficiente. Isto é, a obstrução $f_1(\omega_2(\alpha, \tau(M))) = 0$ se e somente se existe uma classe v que reduz módulo 2 à $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$ e satisfaz a equação $v \cdot e(\alpha) = e(\tau(M))$. Tal classe v será a classe de Euler $e(\eta)$ para algum fibrado η satisfazendo $\alpha \oplus \eta = \tau(M)$. (Uma demonstração deste fato por meio de torres de Postnikov foi publicada em [4]).

REFERÊNCIAS

- [1] J. P. Dax, Etude homotopique des espaces de plongements, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 5 (1972), 303-377.
- [2] U. Koschorke, Concordance and bordism of line fields, Inventiones Math. 24 (1974), 241-268.
- [3] U. Koschorke, Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms - A Singularity Approach . Lecture Notes # 847 , Springer-Verlag (1981).
- [4] M. H. P. L. Mello, Two-plane Sub-bundles of nonorientable real vector bundles , Manuscripta Math. 57 (1987), 263-280.
- [5] M. Olivero, Morfismos entre fibrados vetoriais complexos, tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1987).
- [6] H. A. Salomonsen, Bordism and geometric dimension, Math. Scand. 32 (1973), 87-111.