

Antônio Augusto dos Santos Nogueira

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO  
DA INFLUÊNCIA DA DECLIVIDADE  
NAS CARACTERÍSTICAS DOS ESCOAMENTOS LIVRES



Tese  
apresentada à Comissão Jul-  
gadora do Concurso de pro-  
vimento efetivo da Cátedra  
nº 11 - HIDRÁULICA GERAL -  
da Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO  
- 1966 -

fl-390

PT-290

DEDALUS - Acervo - EPBC



31200030942

627.13  
N 689c  
PT e.4

A

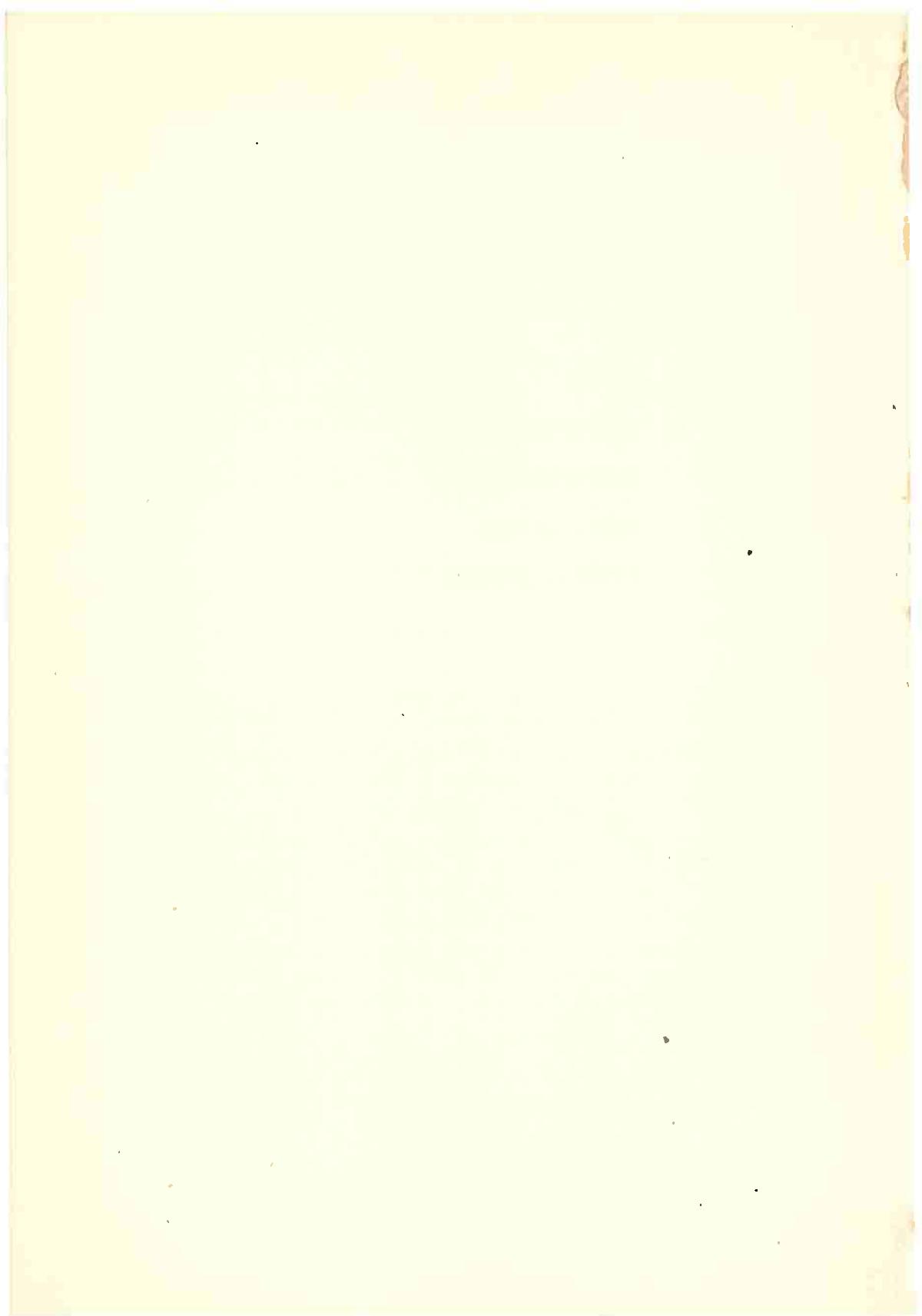
MARIA

MARIA CLAUDIA

MARIA AUGUSTA

MARIA SÍLVIA

ANTÔNIO AUGUSTO



SUMÁRIO



O Autor selecionou bibliografia sobre o assunto, a partir das clássicas experiências de L. Standish-Hall, Keulegan G.H. e G.W. Paterson, Halbronn até os estudos de Mikio Hino baseados na teoria da turbulência e alguns trabalhos apresentados no 11º Congresso da Associação Internacional de Pesquisas Hidráulicas, realizado em 1965 em Leningrado, tais como os de Ghambarian H. H., Haindl K., Anderson Alvim G., Iwaza Yoshiaki, Abecasis F.M., e Fasso Constantino A.

Apresenta uma interpretação das correntes secundárias, nas secções transversais de canais retangulares, a partir do círculo de Mohr.

Partindo das equações de Reynolds chega a quatro adimensionais para estudo da semelhança.

A partir da integração das equações de Reynolds apresenta um critério de estabilidade do movimento turbulento.

Sugere um programa de pesquisa, em laboratório.

Tece considerações sobre secções transversais de canais que proporcionem escoamento não ondular.

Apresenta um estudo sobre dispersores de energia de "roll waves", a jusante de canais, em regimes super-rápidos.

Apresenta analogias existentes entre um ressalto hidráulico, em canais de baixa declividade (a rigor de declividade nula, nas vizinhanças do ressalto) e uma onda de choque, na aerodinâmica.

Sugere amplo programa de pesquisas sobre o assunto, por parte das equipes de diferentes Cátedras da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

\* \* \* \* \*



## RESUME

L'Auteur a fait une sélection bibliographique sur ce sujet, depuis les classiques expériences de L. Standish-Hall, Keulegan G.H., Paterson G.W., Halbronn jusqu'à les études de Mikio Hino, basés dans la théorie de la turbulence et quelques rapports présentés dans le Onzième Congrès de la Association Internationale de Recherches Hydrauliques, réalisé en 1965, dans la ville de Leningrado, par exemple: Ghambarian H.H., Haindl K., Anderson Alvim G., Iwaza Yoshiaki, Abecasis F.M. e Constantino A. Fasso.

L'Auteur présente une interprétation des courantes secondaires dans les sections transversaux des canaux rectangulaires, basée dans le cercle de Mohr.

Basé dans les équations de Reynolds, détermine quatre nombres adimensionaux pour l'étude des marquées hydrauliques.

Basé dans la intégration des équations de Reynolds présente un critérium de stabilité du mouvement turbulent.

Présente un programme de recherches dans Laboratoire, sur ce sujet.

Développe des études sur sections transversaux des canaux avec conditions d'écoulement non-ondulé.

Présente un étude sur les disperseurs d'énergie de "roll waves", en aval des canaux, em regime super-rapide.

Présente les analogies parmi un ressaut hydraulique, en canaux de douce pente et une onde de choc normal, dans l'aérodynamique.

Déclare la opportunité de la élaboration de vaste programme de recherches, sur ce sujet, par les équipes de plusieurs secteurs didactiques de l'École Polytechnique de la Université de São Paulo - Brésil.

\* \* \* \* \*



## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO E AGRADECIMENTOS



### 1.1. Objetivo do trabalho

O estudo de escoamento livre de correntes hídricas, em canais prismáticos, com baixas velocidades médias, se baseia em equações da Cinemática e da Dinâmica dos fluidos incompressíveis.

Experiências realizadas em Laboratórios de Hidráulica têm confirmado boa aproximação com as equações obtidas com os recursos da Cinemática e Dinâmica dos fluidos incompressíveis.

Instalações industriais, redes de águas pluviais, redes de esgotos sanitários, funcionando em regime de escoamento livre, permanente e uniforme têm funcionado a contento, com baixas declividades. À medida, porém, que tais instalações são implantadas em regiões que condicionam declividades mais altas, como, por exemplo, em regiões montanhosas, ou em barragens-vertedor, o fenômeno de escoamento começa a apresentar uma complexidade crescente. Os projetos de irrigação em regiões montanhosas requerem também um estudo acurado da influência da declividade de tais canais nas características do escoamento. A superfície livre da corrente hídrica que era bem definida nos canais com baixa declividade, passa a ser ondulante, apresentando uma região de escoamento dominante hídrico, outra região de arrastamento de ar, contendo partículas líquidas e uma região intermediária em que ocorrem bôlhas de ar no seio da corrente líquida. Este tipo de movimento acarreta, como é óbvio, um aumento de altura da corrente no canal, para uma dada vazão; esta altura deve ser levada em conta, no projeto da altura das paredes laterais do canal.

Outro problema importante da Engenharia Hidráulica, ligado ao nosso tema, é o da elaboração de projetos de dissipadores de energia, para correntes super rápidas, com ondulação.

O projeto de dissipadores de energia, quando o escoamento em canais super-rápidos não for ondular, porém com energia suficiente para requerer certos cuidados específicos, também pode ser dado como exemplo de aplicação das considerações que iremos apresentar a res-

peito do tema em estudo.

Apresentamos, inicialmente, o problema de escoamentos hídricos livres, em canais, de forma global, para a determinação da altura do canal; a seguir apresentamos as equações de distribuição de velocidades, no canal, levando-se em conta a forma da secção. Um estudo de grandezas adimensionais ligadas ao escoamento é apresentado subsequentemente. As condições de formação das ondas de Fronde e das ondas cilíndricas (roll waves) são também apresentadas.

### 1.2. Motivação do trabalho

#### 1.2.1. Projetos de vertedores de soleira espessa, longos.

São projetos em que se objetiva obter um conjunto de boas condições de funcionamento hidráulico, boas condições estáticas e obviamente também econômicas. Ora, nestes projetos, visa-se obter os melhores coeficientes de vazão possíveis; assim, segundo Manzanares Abecasis F.M. do Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa, o funcionamento de uma soleira do tipo do Bureau of Reclamation, permite u'a melhoria de aproximadamente 8% no coeficiente de vazão para uma carga uma vez e meia superior à carga do projeto; esta melhoria era de 12 % com uma carga dupla da do dimensionamento.

O funcionamento hidráulico destas estruturas apresenta grande turbulência, que alcança a superfície da corrente com suficiente intensidade para provocar os fenômenos de instabilidade de superfície e de intenso arrastamento de ar. Pode ainda ocorrer o fenômeno de cavitacão provocada quer para valores médios da pressão, quer para valores instantâneos da pressão. Nêstes escoamentos demonstra-se teórica e experimentalmente a existência de um ponto crítico em que a turbulência começa a fazer sentir seu efeito na superfície, ocasionando, consequentemente, arrastamento de ar.

#### 1.2.2. Projetos de canais longos, de declividade constante.

No projeto de canais longos, com declividade conveniente, observa-se, igualmente, a existência de um ponto crítico, a partir do qual a turbulência da camada

limite do canal atinge a superfície da corrente, com suficiente energia para provocar ondas superficiais (roll waves), transversais ao canal, e que ocasionam, na arrebentação, importante arrastamento de ar. É necessário ainda que a energia cinética das partículas fluidas da superfície, energia essa devida à turbulência local, seja suficiente para vencer os efeitos estabilizadores da tensão superficial da água.

Estudos teórico-experimentais visam obter secções transversais destes canais que eliminem o efeito das "roll waves".

### 1.2.3. Dissipadores de energia.

Nos projetos de dissipadores de energia que recebem correntes líquidas de canais super-rápidos, com "roll waves", leva-se em devida conta o ar contido na corrente líquida, na secção de montante, através de um adimensional  $\beta$  que representa a proporção de água, no volume da mistura.

Se o ressalto hidráulico se formar dominante mente no trecho de declividade super-rápida do canal, na equação dos "momenta", segundo Kindsvater, leva-se em conta a componente do peso do líquido na direção do movimento e determina-se a relação entre as alturas conjugadas do ressalto:

$$x^3 - b_2 x^2 - b_1 x + b_0 = 0 \quad (1)$$

em que:

$$x = \frac{h_2}{h_1} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} h_2 \\ h_1 \end{array} \right\} \text{alturas conjugadas do ressalto} \quad (3)$$

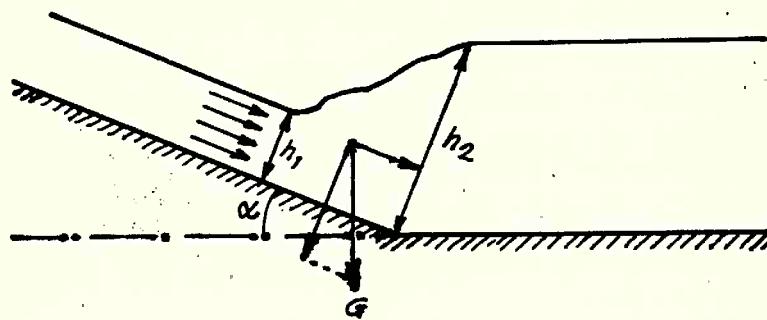
$$b_2 = \frac{f(\lambda) \operatorname{tg} \lambda}{1 - f(\lambda) \operatorname{tg} \alpha} \quad (4)$$

$$b_1 = \frac{1 + 2\lambda}{1 - f(\lambda) \operatorname{tg} \alpha} \quad (5)$$

$$b_0 = \frac{2\lambda}{1 - f(\lambda) \operatorname{tg} \alpha} \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{v_1^2}{g h_1 \cos \alpha} \quad (7)$$

- fig. 1 -



É de importância prática o problema da ação dinâmica desenvolvida por este jato contra a soleira do dissipador de energia. Um levantamento meticoloso das pressões junto ao fundo do dissipador, por meio de equipamento eletrônico adequado, é de grande interesse para o cálculo estrutural do dissipador. O comprimento deste ressalto é também diferente, do ressalto em piso de baixa declividade; assim, Yarnell e Kindsvater indicam que o comprimento  $L_r$  do ressalto, nos leitos de forte inclinação, é dado por:

$$L_r = f(\lambda) h_2 \quad (8)$$

em que:  $h_2$  = altura conjugada do ressalto, a jusante

$$\lambda = F^2 = \frac{v^2}{g h} \quad (9)$$

Assim podemos citar, por exemplo, o dissipador de fendas e o dissipador celular.

### 1.3. Desenvolvimento da investigação

Iniciamos nossa pesquisa por um estudo da literatura correspondente ao tema que irá ser desenvolvi-

do.

Partimos de trabalhos, envolvendo estudos globais da corrente em escoamento, como o trabalho "Cana--les de Fuerte Pendiente", do Eng<sup>o</sup> Gandolfo José S, trabalho publicado em Buenos Aires em 1945; neste trabalho o Eng<sup>o</sup> Gandolfo apresenta um estudo global de correntes em regime de escoamento super-crítico, com formação de ondas de Froude superficiais, nas regiões de fortes curvaturas ou com mudanças bruscas de direção ou com a presença de arestas vivas.

Passamos aos estudos de L. Standish-Hall sôbre escoamento em canais, com alta velocidade, estudos êsses relacionados nas Transactions of the American Society of Civil Engineers, vol.108/1943. Examina o problema de projetos de canais e vertedores muito inclinados, com arrastamento de ar. Indica em que condições pode ser utilizada a fórmula normal de Chézy, nos escoamentos super-rápidos em canais. Indica que a relação do ar, na água, deve ser conhecida antecipadamente. Passa a indicar os critérios seguidos, para o cálculo do coeficiente  $n$  da fórmula de Manning, indicando como calcular o menor valor de  $n$  ( $n_c$ ) e o máximo valor de  $n$  ( $n_0$ ).

A seguir, aplicando o teorema de Bernoulli à corrente em escoamento chega a uma equação relacionando a variação da velocidade ao longo do canal, com a variacão do comprimento considerado. Descreve as experiências de Kittitas e de Hat Creak n<sup>o</sup> 2.

Apresenta, finalmente, a equação das alturas correspondentes ao ressalto hidráulico, formado em canais de declividades super-rápidas, levando em conta o ar contido na água, em escoamento.

Citamos o trabalho de Einstein H.A., e Sibul 0., em que o problema de arrastamento de ar pelas correntes líquidas livres é analisado por analogia com o transporte de sedimentos. Analisam os Autores, também, o problema da distribuição vertical de ar, na massa de água turbulenta, indicando a analogia com as leis de distribuição de partículas sólidas em suspensão, numa corrente líquida. Descrevem como o ar penetra nas correntes líquidas super-rápidas, sob a forma de bôlhas, escapando, também, através de bôlhas. Tecem, ainda, consi-

derações sobre escolha conveniente de escalas em modelos, funcionando no regime de escoamento em estudo.

O trabalho de pesquisa desenvolvido por G. H. Brom realizou-se sobre um vertedor longo, levando em conta as forças viscosas atuantes no escoamento. Faz o cálculo das velocidades locais e das profundidades em regime laminar e turbulento. Demonstra a existência de um ponto crítico em que a turbulência começa a se fazer sentir na superfície da corrente e que dá origem ao arrastamento do ar (formação de água branca). Descreve as verificações experimentais realizadas.

Resumimos os estudos de M. Chen-Che-Pen sobre a diferença de perdas de carga, num escoamento em conduit circular, de uma parte, e num escoamento em canal aberto, com baixa altura de água, de outra parte. Estes estudos visam, principalmente, o estudo da influência da forma, no coeficiente adimensional  $f$ , de perda de carga.

Informa o Autor que as medidas de distribuição de velocidades, perto da parede de um canal retangular liso, mostram que não existe nenhuma diferença, relativamente ao observado junto à parede de um conduto circular. A lei de distribuição da velocidade, longe da parede é, porém, mais complexa e provavelmente da forma:

$$\frac{(n - n_m)}{n^*} = G \left[ F, \frac{P}{b}, f, \frac{y}{D_H}, \frac{z}{D_H} \right] \quad (10)$$

em que:

$$f = \text{número de Froude} = \frac{n}{\sqrt{g h}}$$

$P$  = perímetro molhado da secção

$b$  = largura na superfície livre

$f$  = coeficiente adimensional de perda de carga nos canais.

$h$  = profundidade de água, no canal

$y$  = distância à parede.

Apresentamos, a seguir, os estudos teórico-experimentais apresentados pelo pesquisador Manzanares Abecasis F.M. - soleiras descarregadoras e alguns problemas de estabilidade da veia líquida descarregada e de

cavitação nos paramentos de tais soleiras.

Apresentamos um resumo dos estudos teórico-experimentais de Arsenishvili K.I. sobre efeitos de formação de ondas em estruturas de Engenharia Hidráulica.

Desenvolve o Autor um estudo sistemático da formação das "roll waves" em canais retilíneos muito inclinados e sua influência nas estruturas de Engenharia Hidráulica. Propõe um critério de passagem de regime estável para instável, em canais de grande inclinação. Apresenta estudos de secções transversais de canais que não dão origem à formação de ondas.

Um estudo apresentado que proporciona um tratamento adequado, global, do problema, sob forma de discussão de um adimensional é de autoria de Vedernikov, que define o adimensional  $V$  que é, como veremos a seguir, uma relação entre o número de Froude do escoamento e um número de Froude crítico, definido em função de um dos expoentes da equação de perda de carga unitária e um outro adimensional que expressa o efeito da forma da secção transversal do canal. Para  $V > 1$  o escoamento passa a ser super-rápido, com formação das "roll waves". Estas conclusões são apresentadas nas Transactions da American Geophysical Union, vol. 29, nº 6, de Dezembro de 1948.

Quanto à parte experimental, apresentamos um resumo dos trabalhos realizados pelo pesquisador Viparelli, Michele.

Faz um relato detalhado das experiências por ele realizadas; define três camadas nítidas neste escoamento:

- água com bôlhas de ar em suspensão;
- estratos intermediários, com ondulação;
- ar, com gôtas de água em suspensão.

Nas conclusões, apresenta um conjunto de sugestões para o dimensionamento de canais, em regime super-rápido. Sugere, ainda, como primeiro controle do dimensionamento de um canal do tipo que estudou, o cálculo do mesmo mediante o abacô de Moody.

A seguir, apresentamos um resumo dos estudos de Mikio Hino.

Dedica particular atenção ao aumento aparente

da altura do escoamento causado pelo ar arrastado pela água. Neste trabalho inicialmente o Autor trata das condições necessárias para a auto-aeração da corrente e depois desenvolve, com base na teoria estatística da turbulência, algumas considerações particulares sobre o mecanismo do escoamento. Apresentamos, em continuação, uma exposição sucinta das teorias da turbulência e cama da limite turbulenta.

No desenvolvimento da pesquisa, partiremos das hipóteses formuladas para se chegar à expressão de Chézy, nos escoamentos livres, permanentes e uniformes. Citamos as leis de distribuição de velocidades, na secção transversal de um canal em regime permanente e uniforme, em escoamento turbulento liso e turbulento rugoso.

Focalizamos a influência de alguns afastamentos das hipóteses antes citadas, no coeficiente de Chézy, destes escoamentos. Faremos um estudo sucinto do ressalto hidráulico, com seus diversos tipos bem definidos em função do número de Froude de inicio do ressalto, quer em canais de baixa declividade, quer em canais de alta declividade; falaremos do ressalto como dissipador de energia.

A seguir falaremos das "roll waves", teoria de sua formação e características principais.

Falaremos finalmente das ondas de Froude, em canais.

Quanto ao capítulo 4 - Resultados de pesquisas, faremos um estudo comparativo da formação das ondas de Froude, do ressalto hidráulico e das "roll waves", num canal com mesma forma, mesma rugosidade equivalente, mesma altura de lámina de água, mesmas condições de alimentação de entrada e com declividades crescentes.

Apresentaremos as equações do escoamento turbulento de Reynolds e teceremos comentários sobre as mesmas.

Apresentaremos sugestões de um programa de experiências a serem realizadas em Laboratório de Pesquisas, em canais de escoamento super-rápido.

Teceremos, a seguir, comentários gerais, no capítulo IV, sobre a pesquisa por nós elaborada e a literatura apresentada.

Finalmente, no capítulo V, apresentaremos uma série de conclusões.

#### 1.4. Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Lucas Nogueira Garcez, de quem temos recebido preciosos ensinamentos há quase trinta anos e de quem recebemos a honrosa incumbência de ministrar aulas na antiga Cadeira 11 - Hidráulica e Saneamento desde 1949; que organizou numerosa equipe de docentes e pesquisadores, da qual me orgulho de ser modesto colaborador e que nos tem sempre incentivado na carreira do magistério.

Ao Prof. Dr. Paulo de Menezes Mendes da Rocha, Chefe do Departamento de Engenharia Civil (Hidráulica e Transportes) da Escola Politécnica, que me tem propiciado também preciosos ensinamentos e me incentivado na carreira do magistério.

Ao Prof. Dr. José Augusto Martins, que vem trabalhando com alta eficiência, na Sub-Chefia de nosso Departamento, tendo se empenhado no aperfeiçoamento do nível de nossos Professores-Instrutores através de Cursos de Pós-graduação, de que tem participado como coordenador e colaborador; que tem conseguido melhoria sensível nas instalações gerais de nosso Departamento, na encomenda de extensa bibliografia científica, ora em fase de compra; conseguiu recentemente autorização para proceder a encomenda de extensa relação de equipamentos para aulas práticas, o que, por certo, elevará sensivelmente o nível dos cursos práticos.

A todos os Colegas do Departamento de Engenharia Civil (Hidráulica e Transportes), que muito nos têm incentivado em nossa carreira de magistério.

A todos os Colegas da Cátedra de Mecânica dos Fluidos, do Departamento de Física da Escola Politécnica e, em particular, ao Prof. Dr. Tuffi Mamede Assy pelo incentivo e colaboração recebidos na nossa carreira de magistério.

Aos Colegas do Laboratório de Hidráulica, pela colaboração recebida em nossas atividades didáticas.

A todos os que, de uma ou outra forma, colaboraram, na Escola Politécnica, para a datilografia, dese

nho e impressão deste trabalho.

À Maria, companheira de todas as horas, pela compreensão e incentivo permanentemente recebidos e pelos imensos sacrifícios sofridos.

A todos, enfim, o meu mais profundo reconhecimento e eterna gratidão.

CAPÍTULO 2 - LITERATURA

Passamos a apresentar uma seqüência de trabalhos tecno-científicos sobre o tema em estudos.

Iniciaremos apresentando um resumo dos estudos elaborados por L. Standish-Hall. Foram publicados tais estudos nas *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 108/1943.

O título desse trabalho é: *Open Channel Flow at High Velocities*.

Informa Hall que o arrastamento de ar, pela corrente líquida, em alta velocidade, é problema encontrado nos projetos de vertedores inclinados e quedas. Os cálculos das dimensões do canal devem também ser modificados, com respeito à aplicação de fórmulas para o cálculo da perda de carga, ao longo do escoamento, que é também afetado pelo arrastamento de ar. O ar é misturado com a corrente líquida e o fenômeno de água branca aparece.

Apresenta, a seguir: Teoria do escoamento em quedas.

O objetivo colimado nos testes realizados por Hall era a determinação de fórmula para o cálculo de arrastamento de ar em projetos de canais de grande declividade e canais vertedores, de grande capacidade.

O método preenche três requisitos:

- a) Deve estar de acordo com os métodos estabelecidos para cálculos hidráulicos congêneres.
- b) Deve ser de fácil aplicação.
- c) Deve conduzir a resultados facilmente confirmados pela experiência.

Indicou Hall que a velocidade, a distância percorrida e a rugosidade do canal influem no fenômeno de arrastamento de ar.

Concluiu, também, que o volume de ar dissolvido era diminuído por meio de secções transversais de grande largura de água, na superfície e para grandes descargas.

Apresenta Hall as seguintes considerações:

- a) O valor do coeficiente de rugosidade  $n$  da fórmula de Manning ou de Kutter é constante para o material de revestimento do canal.
- b) O ar, acima da corrente líquida, não causa perda adicional de energia, pois a redução da gravidade específica compensa a área adicional.
- c) Para o cálculo do raio hidráulico utiliza-se a expressão:

$$R_c = \frac{Q}{V P_c} \quad (11)$$

calculado com o mesmo valor de  $n$ .

- d) O termo cinético  $h_v$  pode ser calculado através da velocidade média, sem erro substancial.

Observação: os símbolos utilizados em (11) representam:

$Q$  = vazão líquida em pés cúbicos/segundo

$V$  = velocidade média na secção em pés/segundo

$P_c$  = perímetro molhado da secção (corresponde só ao perímetro de contacto com a corrente líquida, em pés)

$$A_c = \frac{Q}{V} \quad (12)$$

A verdadeira altura da velocidade  $h_v$  é maior do que a calculada pela velocidade média; temos, pois:

$$h_v = \frac{\alpha V^2}{2 g} \quad (13)$$

em que:

$$\alpha = \frac{\iint_{(s)} v^3 dA}{V^3 A} \quad (14)$$

O sentido dos símbolos utilizados em (14) é:

$v$  = velocidade através de um elemento de área  $dA$

$A$  = área da secção transversal do canal

$g$  = aceleração da gravidade

$\alpha$  é maior do que 1, variando entre: 1,02 a 1,20

Nos testes realizados, Hall considerou despre

zível o efeito de correção do térmo cinético  $V^2/2g$ .

Nos projetos, porém, de vertedores em queda, muito largos, recomenda a inclusão de  $\alpha$  no térmo cinético, pois valores entre 1,07 a 1,10 são habitualmente adotados.

Quando as condições de escoamento são tais que o ar é arrastado pela água, a equação da continuidade aplicada à corrente toma a seguinte forma:

$$Q = \rho A V \quad (15)$$

em que  $\rho$  é a relação de água, na mistura de ar e água.

Admitindo-se que o escoamento de água, no canal, alcançou velocidade uniforme, a relação entre a força representando o peso da água é a resistência de atrito ( $f$ ) das paredes do canal, num trecho de canal de secção transversal  $A$ , num comprimento  $d\ell$ :

$$\rho A d\ell \gamma \operatorname{sen} \theta = f P d\ell \quad \therefore \quad f = \frac{\rho A \gamma \operatorname{sen} \theta}{P} \quad (16)$$

em que:

$\gamma$  é o peso específico da água

$\theta$  é a inclinação do leito do canal, em relação à horizontal do local, em gráus

$P$  é o perímetro molhado, para a mistura ar-água.

Nos problemas do tipo do estudado em que o ar é arrastado pela corrente hídrica, a hipótese normalmente admitida é que a relação entre a tensão de atrito e a velocidade média para o movimento uniforme deve ser modificada pelo ar arrastado que reduz a densidade da mistura e o atrito correspondente

$$f = K \rho V^2 \quad (17)$$

em que:  $|K| = |F| |T|^2 |L|^{-4}$

Fazendo-se:

$$R = \frac{A}{P} \quad (\text{raio hidráulico da secção})$$

$$S_1 = \operatorname{sen} \theta$$

e substituindo-se em (16)

$$K \rho V^2 = l R f S_1 \quad \therefore \quad V = \sqrt{\frac{l}{K}} \sqrt{R S_1}$$

em que:

$$C = \text{coeficiente de Chézy} = \sqrt{\frac{l}{K}} \quad \therefore \quad |C| = L^{1/2} T^{-1}$$

Temos, pois:

$$V = C \sqrt{R S_1} \quad (18)$$

O raio hidráulico  $R_o$ , calculado a partir da área observada  $A_o$  e do perímetro molhado da mistura de ar e água, pode ser utilizado. Então a fórmula normal de Chézy pode ser aplicada.

Uma dificuldade que aparece na aplicação dessa fórmula é que a relação do ar, na água ( $1 - \rho$ ) deve ser conhecida, a priori. Esta relação varia com: velocidade média, dimensões do canal e rugosidade das paredes laterais. É, pois, mais simples substituir  $R_o$  por  $R_c$ . Temos, pois:

$$A_c = \frac{Q}{V} \quad \text{e} \quad R_c = \frac{A_c}{P_c}$$

Os valores de  $n$  de Kutter devem ser calculados para a inclinação do gradiente de energia,  $S$ , usando a fórmula de Manning:

$$S = \frac{n^2 V_o^2}{2,2082 (R_o)^{4/3}} \quad (19)$$

Se  $R_c$  é usado em vez de  $R_o$ , os diversos valores de  $n$  podem ser utilizados na equação (19) em vez de valores nominais. A relação existente entre os valores  $n_c$  e  $n$  da fórmula de Manning é a seguinte:

$$n_c = n \left( \frac{R_c}{R_o} \right)^{2/3} \quad (20)$$

Ora, se  $R_c$  for sempre menor do que  $R_o$ ,  $n_c$  deve ser menor do que  $n$ .

Segundo Hall, o procedimento mais lógico parece ser o de calcular a velocidade atual, a partir do cál

culo da altura, sem o ar e a determinação da altura real da corrente de água e da corrente de ar, a partir da percentagem do ar arrastado.

A relação entre o volume de ar arrastado e a velocidade média, o raio hidráulico e a rugosidade do canal, é determinada experimentalmente segundo Hall.

Usando-se a equação (19), os valores de  $n$  calculados são aproximadamente os mesmos, nos canais de rugosidades similares, com velocidades abaixo da crítica.

Usando-se as velocidades observadas  $V_o$ , a correspondente declividade do gradiente de energia (linha de carga)  $S_o$  e o raio hidráulico  $R_c$  calculado, o menor valor de  $n$  é calculado; é designado  $n_c$ :

$$n_c = \frac{1,486 (R_c)^{2/3} S_o^{1/2}}{V_o} \quad (21)$$

Se, por outro lado, utilizarmos o raio hidráulico observado  $R_o$ , a velocidade calculada  $V_c$  e a correspondente declividade do gradiente de energia  $S_c$ , o maior valor de  $n$  é calculado e será designado como  $n_o$ :

$$n_o = \frac{1,486 (R_o)^{2/3} (S_c)^{1/2}}{V_c} \quad (22)$$

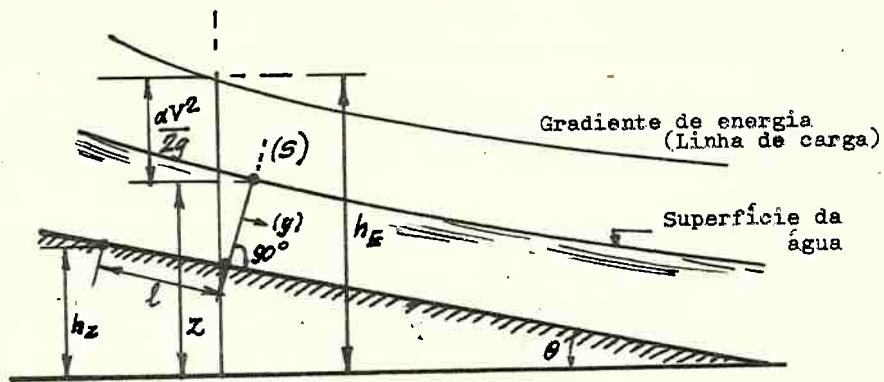
Apresenta, a seguir, Hall, uma solução teórica para o problema, expressando o aumento da velocidade como função da distância percorrida. Considerou um canal, de secção retangular de largura uniforme  $b$  (muitos canais e canais vertedores têm esta forma) (v. figura nº 2).

Aplicando-se o teorema de Bernoulli à fig. 2, sob forma global à corrente apresentada na figura, resulta:

$$h_E = h_z - \ell \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (23)$$

em que  $\alpha$  é o coeficiente de Coriolis que leva em conta a distribuição de velocidades na secção  $S$  do canal, indicado na figura. (Equação 14)

Figura 2



Derivando-se a função (23), resulta:

$$\frac{dh_E}{dl} = -\sin \theta + \cos \theta \frac{dy}{dl} + \frac{\alpha V}{g} \cdot \frac{dV}{dl} \quad (24)$$

No canal retangular, em estudo, calcula-se  $y_c$  em função da altura  $y$  de água e ar:

$$y_c = \varphi y \quad (25)$$

Temos, pois, a partir de (24):

$$\frac{d \left[ z + \frac{\alpha V^2}{2g} \right]}{dl} = -\sin \theta + \cos \theta \frac{dy}{dl} + \frac{\alpha V}{g} \cdot \frac{dV}{dl} \quad (24a)$$

Seja  $q$  a vazão no canal por metro de largura. Temos, pois:

$$q = V y_c \quad (26)$$

Logo:

$$dy_c = -\frac{q}{V^2} \frac{dV}{dl} = -\frac{V y_c \frac{dV}{dl}}{V^2} = -y_c \frac{dV}{V} \quad (27)$$

Substituindo-se (27) em (24) resulta:

$$\frac{d h_e}{d \ell} = - \operatorname{sen} \theta - \frac{\cos \theta q}{V^2 d \ell} + \frac{\alpha V}{g} \cdot \frac{d V}{d \ell} \quad (28)$$

$$S = \frac{d h_e}{d \ell} \quad (29)$$

$$S = \frac{d h_e}{d \ell} = - \frac{\frac{n^2}{c} V^2}{2,2082 R_c^{4/3}} = - \operatorname{sen} \theta - \frac{\cos \theta q}{V^2 d \ell} + \frac{\alpha V}{g} \cdot \frac{d V}{d \ell}$$

O sinal menos indica que  $h_e$  decresce quando cresce. Resulta, pois:

$$\frac{d \ell}{d V} = \frac{\frac{\alpha V}{g} - \frac{q \cos \theta}{V^2}}{\operatorname{sen} \theta - \frac{\frac{n^2}{c} V^2}{2,2082 (R_c)^{4/3}}} \quad (30)$$

em que  $V$  é dado em pés/segundo,  $q$  em pés cúbicos por segundo, por pé de largura,  $R_c$  em pés.

Porém  $R_c$  é função de  $V$  (secção retangular)

$$R_c = \frac{\frac{b q}{V}}{b + \frac{2 q}{V}} = \frac{q}{V + \frac{2 q}{b}} \quad (30a)$$

Fazendo-se:

$$B = \frac{2 q}{b} \quad \therefore \quad R_c = \frac{q}{V + B} \quad (30b)$$

Logo a equação (30) toma a seguinte forma:

$$\frac{d \ell}{d V} = \frac{\frac{\alpha V}{g} - \frac{q \cos \theta}{V^2}}{\operatorname{sen} \theta - \frac{\frac{n^2}{c} V^2}{2,2082} \left( \frac{V + B}{q} \right)^{4/3}} \quad (31)$$

Esta é a equação fundamental apresentada por Hall para o cálculo dos escoamentos em canais super-rá-

pidos, de secção retangular. A solução para  $\frac{dV}{dV}$ , utilizando-se um valor constante de  $n_c$  não é exata, como indica a equação (20)

$$n_c = n \left( \frac{R_c}{R_o} \right)^{2/3}$$

Para se determinar o valor adequado de  $n$ , para canais super-rápidos, várias hipóteses são formuladas por Hall, entre as quais:

a) Imagina-se  $\rho = \text{const.}$ , para um dado valor de  $\theta$ . A relação, em canais muito inclinados, entre a declividade e o ar arrastado, variando com o raio hidráulico, foi determinada em 1930 por Ehremberger, R. A equação

$$(26) \quad q = V y_c$$

$$(25) \quad y_c = \rho y \quad \therefore \quad q = \rho V y \quad (32)$$

De (32) resulta:

$$\rho y dV + \rho V dy = 0 \quad (33)$$

Neste caso o raio hidráulico  $R_o$  deve ser usado na equação (30b); para declividades similares obtém-se:

$$R_c = \frac{q}{V + B} \quad \therefore \quad R_o = \frac{q}{\rho V + B} \quad (34)$$

em que  $R_o$  é, como já foi visto, o raio hidráulico calculado em função da área observada  $A_o$  e do perímetro molhado  $P_o$ , da mistura ar e água.

Segundo Hall, esta solução é melhor porque  $\rho$  não é constante para um dado valor de  $\theta$ , mas varia com a velocidade. Em muitos canais inclinados a velocidade é aumentada positivamente, ao longo do canal. A solução mais satisfatória para o problema, porém, segundo Hall é obtida usando-se o número de Froude. O ar, arrastado na água, deve estar associado ao número de Froude do escoamento; é essencialmente ligado à energia cinética da corrente. Esta aplicação de parâmetros adimensionais aos fenômenos hidráulicos foi empreendida por Backmeteff e Atzke.

No caso de canais super-rápidos, a resistência de atrito conjuntamente com a energia cinética da corrente condicionam o fenômeno de arrastamento de ar. Por tal motivo, segundo Hall, não é incongruente usar o raio hidráulico  $R_c$  como grandeza representativa de dimensão linear da seção transversal considerada.

A partir de inúmeras experiências realizadas chegou-se a uma relação experimental, ligando a relação ar-agua, na mistura  $(\frac{1-\rho}{\rho})$  ao quadrado do número de Froude, na seção transversal do escoamento  $(\frac{V^2}{g R_c})$ .

A relação obtida é:

$$\frac{1-\rho}{\rho} = K \frac{V^2}{g R_c} - K_1 \quad (35)$$

$K$  é um coeficiente, dí Hall alguns valores para diversos canais rápidos, variando de 0,0035 até 0,0104 nas quedas de Hat Creek, Rapid Flume, South Canal, Kittitas.

$K_1$  é um adimensional que assume o valor zero para a maioria das quedas ensaiadas por Hall; apenas cita um valor não nulo,  $K_1 = 0,276$  para a queda de Kittitas (trecho superior).

Considerando-se  $K_1 = 0$ , temos:

$$\frac{1-\rho}{\rho} = \frac{K V^2}{g R_c} \quad \therefore \quad \rho = \frac{1}{1 + \frac{K}{g} \cdot \frac{V^2}{R_c}} \quad (35a)$$

Substituindo-se  $R_c$  por  $\frac{q}{V + B}$  (30b), resulta:

$$\rho = \frac{1}{1 + \frac{K}{g} \cdot \frac{V^2}{q} (V + B)} \quad (35b)$$

Dividindo-se  $R_c$  por  $R_o$  (expressões respectivamente 30b e 34), resulta:

$$\frac{R_c}{R_0} = \frac{\frac{q}{V + B}}{\frac{q}{\rho V + B}} = \frac{\rho V + B}{V + B} \quad (36)$$

Substituindo-se o valor de  $R_c/R_0$  da equação anterior, na equação (20), e substituindo-se  $\rho$  pelo seu valor, na equação (35b), resulta:

$$(20) \quad \therefore n_c = n \left( \frac{R_c}{R_0} \right)^{2/3} \quad \therefore n_c = n \left[ \frac{\rho V + B}{V + B} \right]^{2/3}$$

$$\therefore n_c = n \left[ \frac{\frac{1}{1 + \frac{K}{g} \cdot \frac{V^2}{q} (V + B)}}{V + B} \right]^{2/3}$$

$$\therefore n_c = n \left[ \frac{1 + \frac{B K V^2}{q \cdot g}}{1 + \frac{K V^2}{g} \left( \frac{V + B}{q} \right)} \right]^{2/3} \quad (37)$$

Esta equação (37) e a equação (35a) são as fórmulas básicas para a solução de arrastamento de ar, em vertedores longos, em quedas

$$\rho = \frac{1}{1 + \frac{K V^2}{g R_c}} \quad (35a)$$

A equação (37) nos fornece os valores de  $n_c$  que vão ser aplicados na equação (31), anteriormente vista; a equação (35) nos fornece o valor de  $K$  adequado a um dado canal. Temos, pois:

$$\frac{d\ell}{dV} = \frac{\frac{\alpha}{g} V - q \frac{\cos \theta}{V^2}}{\frac{\sin \theta}{2,2082} \left( \frac{V + B}{q} \right)^{4/3}} \quad (31)$$

No projeto de canais super-rápidos com secção

transversal trapezoidal ou outra forma que não a retangular, a equação (31) não pode ser aplicada. Parte Hall do teorema de Bernoulli, aplicado a duas secções (1) e (2) do canal, equacionando a declividade do gradiente de energia pela fórmula de Manning.

Com condições adequadas de alimentação dos vertedores-canais, os cálculos podem ser iniciados na secção crítica do escoamento. Quando o coeficiente de Coriolis  $\alpha$  é diferente de 1,0, resulta

$$Q \sqrt{\frac{\alpha}{g}} = A_c \sqrt{\frac{A_c}{b_c}} \quad (38)$$

ou:

$$\frac{Q^2 \alpha}{g} = \frac{A_c^2 A_c}{b_c} \quad \therefore \quad \frac{Q^2 \alpha b_c}{g A_c^3} = 1 \quad (38a)$$

expressão que pode ser comparada com a já conhecida dos manuais de Hidráulica, para  $\alpha = 1$

$$\frac{Q^2 L}{g A^3} = 1 \quad (38b)$$

Passa a falar sobre princípios que devem ser seguidos no cálculo de dispersores de energia, ligados a canais super-rápidos. Passa, a seguir, a tecer comentários sobre a determinação das trajetórias das partículas líquidas nas curvas verticais e horizontais. Passa a falar sobre os problemas de ataque ao concreto das estruturas dos canais e dissipadores, pelo fenômeno da cavitação.

Fala sobre as observações realizadas em Hat Creek que indicam que o espalhamento do jato em toda a secção transversal do dissipador aumenta o atrito, auxiliando a dissipação de energia. Informa, também, que mudanças de direção em planos horizontais funcionam de forma mais complexa e devem ser evitadas. Aconselha, para esta finalidade, a construção de modelos na fase anterior à complementação do projeto.

Passa a falar, depois, das experiências in-loco realizadas em Canal Maior, Kittitas, vertedor para o canal Yakima River. Estas experiências foram realizadas

pelo Bureau of Reclamation. Foram realizadas medidas de altura de água, de velocidades; foram calculados coeficientes  $n_c$  de Manning e valores de Froude  $F^2$ .

Passa a seguir a descrever a campanha de medidas realizadas no Hat Creek n° 2, em que foram medidas altura e velocidades e determinados os coeficientes de escoamento de Chézy e os coeficientes  $n$  e  $n_c$  das fórmulas de Kutter e Manning.

Apresenta, a seguir, os gráficos obtidos experimentalmente

$$\frac{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}{\rho} = F \left( \frac{V^2}{g R_c} \right) = F (\frac{f^2}{2})$$

para as estruturas de South Fork, Kittitas II e III, Kittitas I e II, Hat Creek e Rapid Flume. Estas retas médias obtidas não se aplicam a canais muito curtos em que a distância de percurso é muito curta para a entrada de ar (em geral essa distância deveria ser superior a 30 m).

Finalmente apresenta as conclusões que procuraremos resumir:

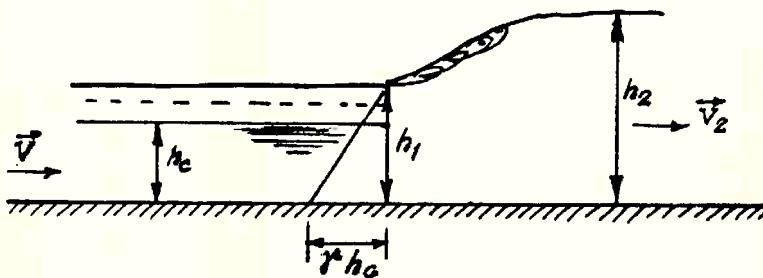
- a) O escoamento de água em canais super-rápidos é essencialmente diferente do dos canais de declividade comum;
- b) As velocidades médias são maiores do que a crítica, o término linear correspondente à energia cinética da corrente excedendo, em muito, a pressão estática do prisma de água;
- c) O arrastamento de ar depende do espaço percorrido pelas partículas fluidas e das condições de entrada. O arrastamento de ar processa-se, de início, junto às paredes laterais e gradualmente aparecem bôlhas de ar em toda a largura da seção;
- d) A área observada na corrente A deve ser reduzida em virtude da percentagem de ar, na mistura. Os valores de  $n$  das fórmulas de Manning ou de Kutter, obtidos pelo uso das velocidades observadas e áreas observadas, concordam com os obtidos em escoamentos normais, com rugosidades similares;
- e) As alturas reais atingidas pela mistura água-ar ob-

têm-se, dividindo-se as alturas  $h_c$  calculadas pela concentração  $\rho$  de água na mistura água-ar. Em correspondência com essas alturas é que vão ser projetadas as alturas das paredes laterais do canal super-rápido;

- f) A energia da corrente que passa num canal super-rápido deve ser absorvida (parcialmente) na base da barragem, por meio de uma bacia de tranquilização, com ressalto hidráulico. A equação deste ressalto difere da equação do ressalto comum pelo termo correspondente às pressões reinantes a montante; a força correspondente às pressões correspondentes é:

$$\gamma h_c \cdot \frac{1}{2} = \frac{\gamma h_c^2}{2\rho} \quad (39)$$

Figura 3



Estudos de Keulegan G.H. e Paterson G.W.:

Os Autores definem escoamento instável num canal se as condições forem tais que uma perturbação da superfície livre cresça em grandeza, quando ela se move para jusante.

Um critério de instabilidade do movimento pode ser deduzido da equação de Boussinesq, para a velocidade de propagação de um elemento de volume de uma onda e de uma fórmula adequada para a variação de perda de carga, com a profundidade. Consideraram os Autores um canal retangular largo e um perfil de onda que esteja sempre acima da superfície não perturbada (como mostra a fig. 4).

A velocidade média em qualquer secção é  $U = \frac{1}{2}(u_0 + u)$ , em que  $u$  é o desvio da velocidade média, numa secção transversal sob a onda, em relação à velocidade média, não perturbada.

Consideremos um elemento de volume  $d\sigma$  ( $d\sigma \cdot 1m$ ). Este elemento se move, para a jusante, com uma velocida de  $u$  que se chama celeridade de um elemento de volume da onda. A altura  $h$  é função do tempo e escreve-se:

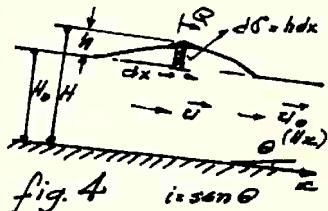
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + a \frac{\partial h}{\partial x} \quad (40)$$

De fato:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

com:

$$\frac{dx}{dt} = a$$



Uma vez que  $h > 0$ , o critério de instabilidade será:

$$\frac{dh}{dt} > 0 \quad (41)$$

Calculemos esta condição em função das características do canal.

## Equação da Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial x} (h \cdot a) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (42)$$

Combinando-se (40) e (42):

$$\frac{dh}{dt} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (ha) + a \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad , \quad \frac{dh}{dt} = -h \frac{\partial a}{\partial x} \quad (43)$$

Usando-se o método de Boussinesq é obtida a fórmula seguinte:

$$a = a_0 \left[ 1 + \left[ (2 + K_1) : 4 \right] \left( \frac{h}{H_0} \right) + \left( K_2 \frac{H_0^2}{h} : 6h \right) \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right] + \\ + a_0 \left\{ 1 : \left[ 2 h a_0 (a_0 - U_0) \right] + \int_x^{\infty} \left[ g H_i - (\lambda/2) u^2 \right] dx \right\} \quad (44)$$

em que  $a_0$  é a velocidade de propagação da onda de pe-

quena altura e curvatura, movendo-se sem mudança de forma e que é dada por:

$$a_0 = U_0 + \sqrt{g H_0} \quad (45)$$

$$K_1 = 1 - (3 U_0 / a_0) \quad K_2 = 1 - U_0 / a_0$$

$i$  é a declividade do canal.

$\lambda$  é o coeficiente de atrito do canal que, em geral, é função da altura de água, no canal, e que é definido implicitamente, através da fórmula que permite calcular a tensão de cisalhamento média, no perímetro molhado

$$\tau_0 = \lambda \cdot \frac{\rho}{2} \cdot U^2$$

$\rho$  é a massa específica do líquido, em escoamento.

No escoamento uniforme, a tensão de cisalhamento  $\tau_0$  dá origem a uma força resistente que deve equilibrar a componente do peso do líquido, na direção do escoamento. Temos pois:

$$\rho g H_0 i - \lambda_0 \frac{\rho}{2} U_0^2 = 0 \quad \therefore \quad g H_0 i - (\lambda_0 / 2) U_0^2 = 0 \quad (46)$$

(para secções retangulares, muito largas),

sendo  $\lambda_0$  o valor do coeficiente, quando a profundidade do canal for  $H_0$ .

A equação (44) só é aplicável quando  $a$  é a proximadamente igual a  $a_0$ . É o caso da onda curta. Se admitirmos que o perfil da onda é simétrico, temos, então, na crista da onda, pelas relações (43), (44) e (45):

$$\frac{dh}{dt} = [g H i - (\lambda/2) U^2] + 2 \sqrt{g H_0} ,$$

uma vez que

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0 ,$$

na crista (ponto de máximo relativo).

Logo o critério indicado em (41) passa a ser:

$$\frac{dh}{dt} > 0 \quad \therefore \quad g H i - (\lambda/2) U^2 > 0 \quad (47)$$

Calculemos a desigualdade (47), em função das características do canal.

$$\text{Sendo } H = H_0 + h$$

$$U = U_0 + u$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{d\lambda}{dH} \cdot h ,$$

temos, usando (46) e negligenciando os têrmos pequenos:

$$g H i - (\lambda/2) U^2 = g h i - \left[ \frac{d\lambda}{dH} \cdot \frac{1}{2} \right] h U_0^2 - \lambda_0 U_0 U > 0 \quad (48)$$

O valor de  $\frac{d\lambda}{dH}$  depende da escolha das fórmulas de escoamento:

a) Fórmula de Manning:

$$U_0 = c R_0^{1/6} \sqrt{R_0 i g}$$

em que  $R_0$  = raio hidráulico que, para canais retangulares muito largos, é igual a  $H_0$ ; da equação (46)

$$\frac{U_0}{\sqrt{H_0 i g}} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_0}} ;$$

comparando as equações acima, temos:

$$\lambda = C H^{-1/3} \quad \therefore \quad d\lambda + dH = - (\lambda_0 + 3 H) \quad (49)$$

De acordo com as equações (47) e (48), temos:

$$g H i - \left( \frac{\lambda}{2} \right) U^2 = (g h i)^{4/3} - (2 g H_0 i u / U_0) \quad (50)$$

$\lambda_0$  podendo ser eliminado a partir da equação (46) (para ondas de pequena altura)

A expressão seguinte para  $u$  pode ser obtida a partir da equação da continuidade:

$$u = \frac{(a - u_0)}{H_0 + h} \cdot h$$

que é, aproximadamente:

$$u \approx \left[ \frac{a_0 - u_0}{H_0} \right] \cdot h$$

Substituindo-se este valor de  $u$  na equação (50), resulta:

$$[g H i - \left( \frac{1}{2} \right) u^2] = g h i \left[ \frac{4}{3} - 2 \left( \frac{a_0 - u_0}{u_0} \right) \right]$$

Como  $h > 0$ , o critério indicado em (47)

$$g H i - \left( \frac{1}{2} \right) u^2 > 0 \quad \therefore \quad \frac{4}{3} > 2 \left( \frac{a_0 - u_0}{u_0} \right)$$

Logo, teremos, como critério de instabilidade:

$$5 u_0 > 3 a_0 \quad (51)$$

Expressando a condição acima em função da declividade  $i$ , utilizando-se a equação (45)

$$u_0^2 > \left( \frac{9}{4} \right) g H_0 \quad (52)$$

Da equação (46) tem-se que:

$$u_0^2 = \frac{2 g H_0 i}{\lambda_0} ;$$

logo a equação (52) torna-se:

$$i > \left( \frac{9}{8} \right) \lambda_0 \quad (53)$$

Este é o critério de instabilidade do escoamento, em canais rápidos, baseado na fórmula de Manning.

Jeffreys e Thomaz, usando métodos diferentes mas ambos baseados na fórmula de Chézy, obtiveram o seguinte resultado:

$$i > 2 \lambda_0 \quad (54)$$

Se houvesse sido adotada a fórmula de Chézy, a equação (49) teria dado origem a:

$$\frac{d\lambda}{dH} = 0 \quad [\text{pois} \quad \lambda = \frac{2 g}{c^2}]$$

A relação (51) seria, pois:

Da equação (48)

$$g H i - \left(\frac{\lambda}{2}\right) u^2 = g h i - \lambda_0 u_0 \quad u > 0$$
$$g h i - \frac{2 g H_0 i}{u_0} u > 0 \quad \therefore g h i - \frac{2 g H_0 i}{u_0} \left(\frac{a_0 - u_0}{H_0}\right) h$$
$$\therefore 3 u_0 > 2 a_0 \quad \therefore (45) \quad \left. \begin{array}{l} a_0 = u_0 + \sqrt{g H_0} \\ u_0^2 > 4 g H_0 \end{array} \right\} \quad \therefore \frac{2 g H_0 i}{\lambda_0} > 4 g H_0$$

Da equação (46)  $u_0^2 = \frac{2 g H_0 i}{\lambda_0}$

Logo, teremos:  $i > 2 \lambda_0$

Concorda, pois, este critério de instabilidade com o critério obtido por Jeffreys e Thomaz. Jeffreys admite alguma dúvida, quanto à validade de sua teoria, pois, segundo ele, roll waves não se observam até que a declividade seja de cerca de 1/10.

Estas observações não dão conclusões definitivas sobre a grandeza  $\lambda$ ; sm, pois, necessários muitos dados experimentais, no estudo da deformação dos perfis de onda.

Referências:

- Jeffreys, Harold - The flow of water in an inclined channel of rectangular section - Phil. Mag. , sec. 6, v. 49 - pg. 793 - 1925
- Thomas, Harold A. - Roll waves in steep channels (1939- Trans. 7th Gen. Assembly Int. Assoc. Sci. Hydrology, Washington 1939) pg. 235.

Estudos de Einstein H.A. e Sibul O.:

O problema de arrastamento de ar em canais abertos, com mistura água-ar, e com grandes declividades, é analisado pelos Autores, por analogia com o problema de transporte de sedimentos. Até pouco tempo não foi possível predizer o volume de ar contido na mistura água-ar para um dado estado de escoamento ou de turbulência. Afirman que a distribuição do ar, segundo uma ver-

tical do canal, é estudada, baseando-se nas leis conhecidas da distribuição de materiais sólidos em suspensão, na corrente líquida. A velocidade média do escoamento, a altura de água no canal para uma dada vazão, num canal aberto com mistura de água e ar, são função da concentração de ar, na mistura água/ar.

O problema foi levantado quando os Autores de sejavam prever as variações de nível de água num canal de fuga de turbinas, sob o impulso da corrente emergente das máquinas hidráulicas em estudo. Quando a turbina é operada, normalmente a energia do jato é quase totalmente dissipada nas pás da turbina e a água penetra no canal, com baixa velocidade; no caso em que ocorra, porém, variação de carga, parte ou toda a vazão é desviada das pás da turbina por defletores e o canal recebe água com alta velocidade. Como resultado da alta turbulência na água do canal, conjuntamente com a ação direta dos jatos de água, o ar entra largamente na água, sob forma de bôlhas, ficando em suspensão, até que a turbulência seja suficiente para permitir que esse ar seja libertado.

Segundo os Autores, o ar entra na água sob a forma de bôlhas e escapa também assim, através da superfície. Estas bôlhas de ar têm densidade muito diferente da água que as cerca e podem ser levadas à superfície pela alta turbulência do escoamento.

Este comportamento é muito parecido com o observado com os sedimentos na água; essas partículas sólidas que, em geral, ocorrem na água, se movem ao longo do escoamento do fluido em estudo, em várias direções.

No escoamento turbulento, o fluido desloca um grande ou pequeno número de partículas depositadas, dependendo das características do escoamento e das características dos sedimentos. Essa mistura água/sedimento é, sob condições de alta turbulência, misturada com o escoamento remanescente. Então as partículas de sedimentos com velocidade suficientemente baixa ficam em suspensão. Estas partículas em suspensão passam a deslocar-se na direção das velocidades médias da água circundante; podendo percorrer grandes distâncias até alcançar o leito do canal.

O escoamento do fluido também é influenciado

pelo movimento de sedimentos.

Condições de estabilidade de água, na superfície:

Quando as velocidades da turbulência são suficientemente altas, as massas de água aproximam-se ao caso da superfície, com velocidades tais que permitem o irrompimento de bôlhas de água, na camada de ar, sobrepujando a ação da gravidade, tensão superficial, sob a influência de sua inércia.

Suspensão das bôlhas de ar: A descrição da suspensão é diferente, para cada tipo de escoamento. Quando o sedimento é suspenso por uma corrente do escoamento, a turbulência originária das velocidades do escoamento vertical é criada pelo escoamento com atrito ao longo dos sedimentos do leito. Esta turbulência padrão é determinada pelas condições de semelhança de Von Karman e varia, portanto, com as condições de escoamento. A turbulência visualizada no problema de arrastamento de ar, de outro lado, tem origem na ação dos jatos. Esta turbulência tem caráter isotrópico e é uniformemente distribuída, em toda a altura do escoamento. O comprimento de mistura  $l$  e a velocidade de troca  $q_e$  podem ser considerados consequentemente constantes na altura de águia.

Se considerarmos à distância vertical  $y$  um ponto abaixo da superfície da água, podemos indicar para a troca de ar  $q_a$  através de uma área unitária horizontal à distância  $y$ :

$$q_a = q_e (C \pm \Delta C) = q_e (C \pm 0,5 l \frac{dC}{dy}) \quad (55)$$

em que o sinal positivo se refere à troca no sentido ascendente e o sinal negativo se refere à troca no sentido descendente;  $l$  é a constante, comprimento de mistura.

A condição de equilíbrio para a troca de ar pode ser estabelecida de forma que a troca descendente menos a troca ascendente deva ser compensada pela geral elevação de todas as bôlhas com a velocidade  $V_s$  com respeito à água circumvizinha. Temos, pois:

$$q_e (C - 0,5 \ell \frac{dC}{dy}) - q_e (C + 0,5 \ell \frac{dC}{dy}) = C V_s \quad (56)$$

Desprezando-se  $C$  em face de  $0,5 \ell \frac{dC}{dy}$ , resulta:

$$q_e \ell \frac{dC}{dy} = - C V_s \quad (57)$$

$$\frac{dC}{C} = \left[ - \frac{(V_s)}{q_e \ell} \right] dy \quad (58)$$

Integrando-se, resulta:

$$\log_e \frac{C}{C_0} = - \frac{V_s y}{q_e \ell} \quad (59)$$

em que  $C_0$  é a concentração na superfície da água ( $y = 0$ ). Temos, pois:

$$\log_e C = \log_e C_0 - \frac{V_s y}{q_e \ell} \quad (60)$$

Esta equação nos mostra que a representação das variáveis  $C$  e  $y$  em gráfico semi-logarítmico é uma reta.

Os Autores realizaram medidas da concentração de ar, ponto a ponto, numa vertical e os resultados foram colocados sobre um gráfico semi-logarítmico. A primeira medida, numa amostra retirada com aparelho adequado foi obtida numa profundidade  $a = 0,2$  pés da superfície da água e as outras concentrações comparadas com a correspondente a 0,2 pés.

A equação (59) fica, então:

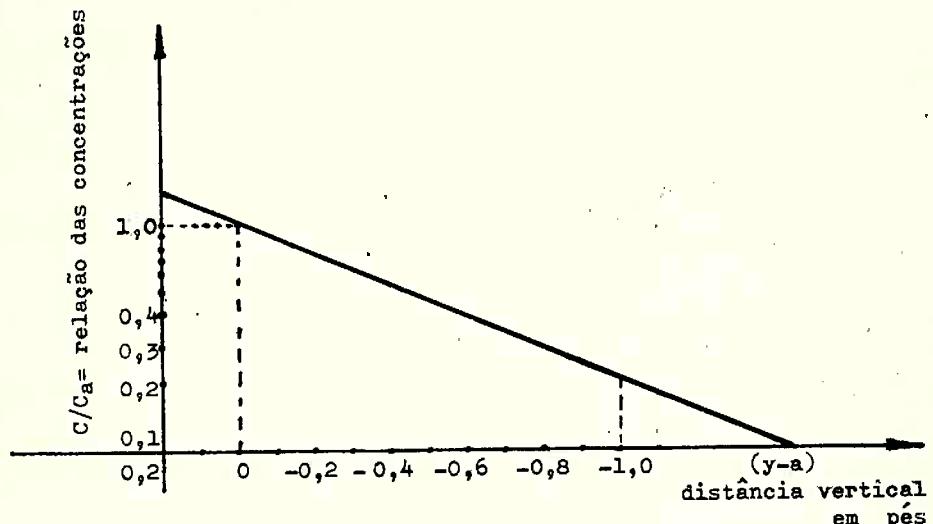
$$\log_e \frac{C}{C_a} = - \frac{V_s (y - a)}{e} \quad (59a)$$

em que:  $e = q_e \ell$  é o coeficiente de difusão.

Condições de semelhança de escoamento, em canais abertos, com mistura ar-água:

Conhecendo-se as leis que governam as relações de semelhança entre modelos e protótipos, os Autores completaram algumas experiências num modelo em escala  $\lambda =$

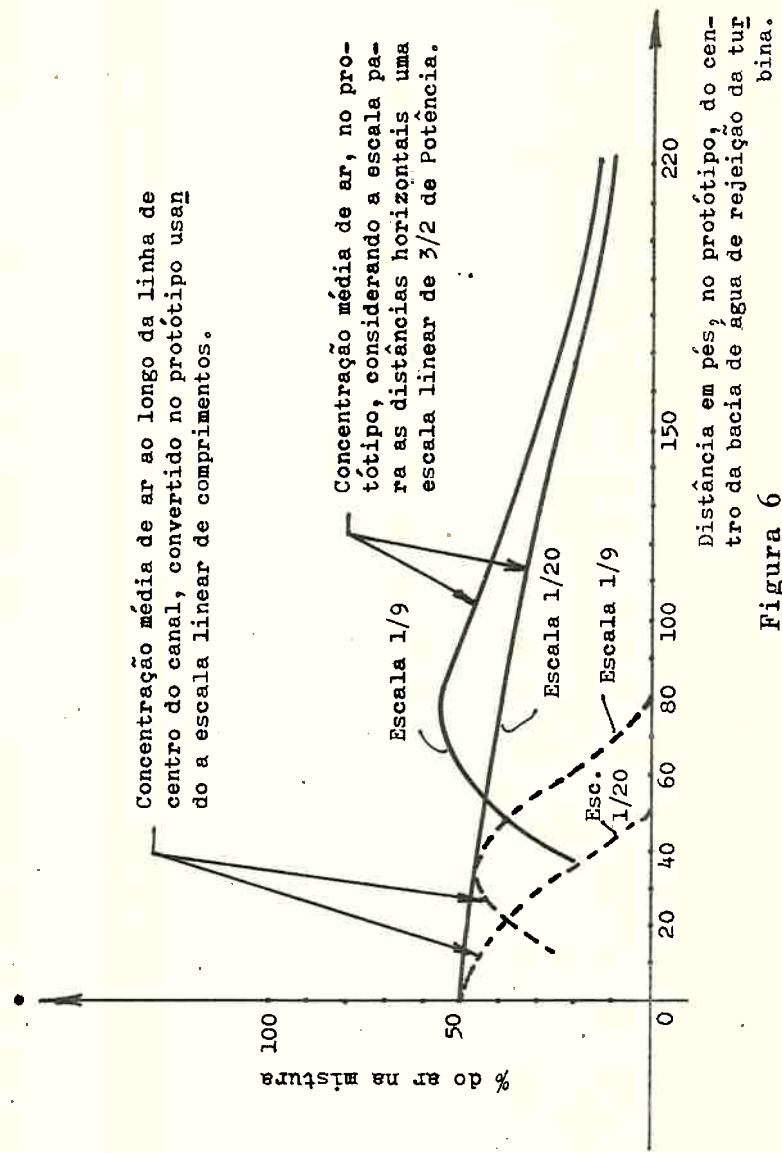
Figura 5



= 1/9 e compararam os resultados obtidos com os alcançados noutro modelo, na escala 1/20. Foram medidas as concentrações de ar em três verticais da corrente líquida fluindo no canal. Os resultados são indicados no gráfico, fig. 6, nas escalas 1/9 e 1/20. A forma dos dois gráficos é análoga, exceto no início do canal; este desvio parece ser oriundo de forte circulação no canal de fuga de turbina, no modelo em escala 1/9 onde as pás são usadas, defletindo o escoamento.

Parece que, neste caso, a lei de escoamento dos canais abertos no modelo e no protótipo não é governada pela semelhança de Froude. O desvio da semelhança normal, distorsão, é causado por algumas outras distorções que são negligenciadas no estabelecimento da semelhança. A semelhança de Froude que é utilizada nos escoamentos nos canais abertos satisfaz a condição de semelhança com respeito à gravidade, inércia e alguns efeitos de viscosidade, porém o ar arrastado depende do padrão interno de turbulência, no escoamento que é provavelmente afetado, de algum modo, pelo número de Reynolds e a tensão superficial, que determina parcialmente o tamanho das bolas individuais de ar e seu comportamento no escoamento e perto da superfície. A viscosidade e a tensão superficial não têm reduzido corretamente a escala do modelo, de modo a evitar que uma distorção significativa exista, com respeito ao tamanho e ao

Concentração média de ar ao longo da linha de centro do canal, convertido no protótipo usando a escala linear de comprimentos.



comportamento das bôlhas de ar. O carater desta distorsão, que é complicado pela troca de gôtas de diversas formas e tamanhos, não pôde ser até agora expresso matemàticamente.

Existe a possibilidade de existência de uma semelhança, se as distâncias, ao longo do canal, forem reduzidas à escala que é igual à escala  $3/2$  de potência (linhas cheias na figura 6).

Todavia, a generalização desta regra a outros problemas parece não ser aconselhável, por enquanto.

#### Referência:

Einstein H.A. - The bed-load function for sediment transportation in open channel flows, U.S. Dept. Agri. Soil Cons., Serv. Tech. Bull. 1026-1950.

Estudo da colocação em regime dos escoamentos  
sobre obras de forte dedividade - Aplicação  
ao problema de arrastamento de ar

Autor: Halbronn G. - La Houille Blanche nº 1-  
1952, Janeiro-fevereiro Hº Bº 1 - 7º ano.

Foi realizado este estudo por Halbronn G., que fez aplicações da teoria desenvolvida às experiências realizadas no Laboratório Nacional de Hidráulica sobre modelo do vertedor de Bort-les-Orgues.

Os escoamentos sobre vertedores de soleira espessa têm sido objeto de numerosos estudos téórico-expe  
rimentais, com o fim de determinar, em função do traçado, o coeficiente de vazão, a distribuição de pressões sobre o fundo e a distribuição de velocidades. Estes estudos mostraram que os fenômenos são bem representados por leis de escoamento a potencial de velocidades dos fluidos perfeitos. Se o traçado da superfície livre for conhecido, métodos gráficos clássicos permitem obter os valores das velocidades e das pressões em cada ponto; se a linha de água não for conhecida, é, ainda, possível, por aproximações sucessivas, resolver o problema, caindo no caso anterior. Estas conclusões são, porém, limitadas a obras curtas.

Se considerarmos, por exemplo, um vertedor de soleira espessa, muito largo, alimentado sem perturba-

ção e prolongado a jusante por um canal plano de inclinação constante, a velocidade de um fluido perfeito cresceria indefinidamente enquanto que, na realidade, em regime uniforme, tende a estabilizar-se.

A explicação desta discordância encontra-se nos efeitos da viscosidade; para um fluido real, a velocidade é nula em contacto com a parede sólida; atinge o valor calculado pela teoria do escoamento a potencial de velocidade a uma certa distância de fundo que determina a espessura da camada limite em que se concentra, praticamente, a dissipaçāo de energia devida à viscosidade. Com altura muito fraca, próximo à crista do vertedor, o que justifica o estudo do escoamento pela Hidrodinâmica dos fluidos perfeitos, nesta região esta camada (que pode ser laminar) aumenta de importância para jusante, torna-se geralmente turbulenta e ocupa toda a altura do escoamento. Após esta secção, a distribuição de velocidades pode, ainda, modificar-se para tender à do regime uniforme em que o efeito acelerador da gravidade compensa, exatamente, o efeito retardador da viscosidade.

Descreve Halbronn G. o aspeto da corrente líquida nas proximidades da crista em que a superfície livre da corrente tem um aspeto bem liso, parecendo imóvel a água, nesta região. Este aspeto se prolonga até uma certa distância a jusante que depende da profundidade (vasão e declividade) do estado da superfície do vertedor e do tranquilizador de alimentação.

Bruscamente a superfície livre deixa de ser transparente, parecendo rugosa coberta de pequenas rugas móveis. Este fenômeno ocorre em torno de uma posição média que é chamada "ponto crítico" por Halbronn.

As flutuações deste fenômeno fazem prever a estreita ligação entre "o ponto crítico" e os fenômenos de turbulência. Um dos objetivos do estudo de Halbronn será o de mostrar que este "ponto" em que a superfície limuda de aspeto, é precisamente aquele em que a turbulência criada pela interface água-parede faz sentir sua influência até à superfície; a camada limite turbulenta alcança, pois, uma altura igual à profundidade do escoamento, no "ponto crítico".

Nas vizinhanças deste "ponto fixo" produz-se

o fenômeno de "água branca", que é explicado pelo arrastamento de ar, sob forma de bôlhas, pela água em movimento. Enquanto que gotículas de água são projetadas a grandes alturas, bôlhas gasosas penetram no seio da massa líquida e se escoam com ela, dando origem a um aspecto leitoso característico.

Passa, então, a demonstrar que a água branca não pode aparecer a montante do ponto crítico. Nas vizinhanças do "ponto crítico" as flutuações turbulentas começam a fazer sentir seu efeito na superfície; imprimem às partículas superficiais velocidades transversais que, em certos casos, são suficientes para lhes permitir escapar da massa líquida sob forma de gôtas que caem mais longe, arrastando com elas ar, por compressão na frente e por atrito sobre os lados. Esta explicação leva em consideração o fato, de que, no contacto das paredes laterais, a "água branca" produz-se desde a crista do vertedor e sobre uma largura crescente para jusante, visualizando-se, assim, a camada em que existe turbulência. Se o canal for estreito, as duas zonas laterais de arrastamento de ar acabam por se reunir no eixo, e dão, então, origem ao fenômeno generalizado de arrastamento de ar, em toda a corrente líquida. Do mesmo modo um obstáculo isolado sobre o fundo aumenta a turbulência em sua vizinhança e pode dar lugar a um arrastamento de ar local.

É necessário, ainda, para que se forme a água branca, que a energia cinética transversal conferida pela turbulência às partículas superficiais seja suficiente para vencer os efeitos estabilizadores devidos, em particular, às forças de capilaridade.

Explica-se assim que o arrastamento de ar, constatado sobre uma obra não apareça, sempre, sobre um modelo em semelhança de Fronde.

A condição exprimindo a possibilidade de arrastamento de uma partícula superficial poderá ser cumprida no protótipo, sem o ser no modelo. Se esta condição não for verificada, as partículas serão incapazes de escapar e deformarão mais ou menos a superfície, conferindo-lhe forte rugosidade. Neste caso o ar será arrastado, na vizinhança da superfície livre e a partir do "ponto crítico" por um mecanismo análogo à de uma bomba de viscosidade. Divide, a seguir, o seu estudo em três

partes:

a) Estabelece as equações gerais da camada limite, sobre um canal infinitamente largo, equações que permitem o estudo detalhado do escoamento a montante do ponto crítico e mesmo a jusante, quando a água branca não se produz; discute mais especialmente o caso em que a camada limite é turbulenta.

Na parte b) estabelece a comparação dos resultados teóricos e experimentais de que dispõe: cita as experiências realizadas num modelo de um vertedor liso, muito largo, formado de um perfil adequado, prolongado por um trecho plano.

c) Nesta terceira parte aborda o estudo das deformações da superfície livre a jusante do ponto crítico, afirmando que a colocação sob forma de equação desse problema é complexo, ligado que está ao conhecimento da estrutura da turbulência superficial, da ação do vento sobre o escoamento, dos efeitos de capilaridade e pressões. Apresenta uma tentativa, na via da pesquisa, do critério de instabilidade da superfície livre, sob o efeito dos diferentes fatores.

A partir da relação integral de Von Karman passa a desenvolver a teoria da camada limite laminar e turbulenta. Passa ao estudo da semelhança de posição dos pontos críticos sobre um protótipo e um modelo em semelhança de Froude, afirmado que o regime de escoamento do protótipo será muitas vezes diferente do modelo, em geral mais rugoso. Passa a falar sobre a posição do ponto crítico, demonstrando que o ponto crítico se desloca para jusante, quando aumenta a vazão sobre um canal dado.

Explica-se assim o fato, à primeira vista paradoxal, que a "água branca" possa aparecer sobre uma obra de vazão dada e não aparecer quando a vazão for aumentada, embora as velocidades sejam maiores. Passa à discussão das condições iniciais da camada limite turbulenta, demonstrando que a semelhança de Froude é mais verificada quando a escala de Froude for menor.

Passa a seguir a descrever as verificações experimentais realizadas em:

Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique  
Laboratoire National d'Hydraulique,

passando a seguir a falar sobre os resultados experimentais publicados por N. Hickox.

Conclusões apresentadas sobre as experiências realizadas no Laboratoire Duaphinois:

- a) Boa concordância entre as profundidades medidas e calculadas, até às proximidades do "ponto crítico"; em seguida a profundidade calculada torna-se muito fraca e o afastamento cresce para jusante. A água branca não aparece, no entanto as fotografias tiradas mostram que a jusante do ponto crítico as gotículas superficiais se elevam acima do nível livre médio, sem escapar da massa líquida; a vazão nas camadas superiores é variável e seu valor médio real é inferior ao que se calcula, supondo o movimento permanente.
- b) A concordância entre os perfis de velocidades medidas e calculadas é boa, a montante do "ponto crítico". Pelo contrário, a jusante deste ponto, as velocidades medidas são sistematicamente inferiores às velocidades calculadas, o afastamento sendo máximo no fundo e praticamente nulo na superfície. Poder-se-ia pensar que, na vizinhança do ponto crítico, se passa do regime liso  $[R_* < 5,08]$  ao regime de transição  $T_1$ :  $[5,08 < R_* < 14,1]$

(61)

(62)

Teríamos, pois, neste ponto:

$$R_* = \frac{u_* \mathcal{E}}{\nu} = 5,08 \quad (63)$$

$u_*$  é a velocidade junto à parede:  $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$

$\mathcal{E}$  = rugosidade equivalente da parede (rugosidade de Nikuradse)

$\nu$  = coeficiente cinemático de viscosidade do líquido.  
No regime de transição  $T_1$ , a distribuição de velocidades seria da forma

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{K} \left[ \log_e D + \log_e \frac{Y}{\mathcal{E}} \right] \quad (64)$$

$D$  é constante cujo valor depende do regime na camada limite determinado por  $R_*$

$K$  = constante universal cujo valor é vizinho de 0,4.

Temos, pois:

$$u = a_{T_1} + b \log y \quad (65)$$

Traçando-se as retas através de pontos experimentais, determinam-se  $a_{T_1}$  e  $b$ , donde se tira  $u_*$  e  $\delta$ , pois:

$$a_{T_1} = (9,56 - 5,75 \log \delta) u_* \quad (66)$$

$$b = 5,75 u_* \quad (67)$$

Os resultados obtidos são um pouco dispersos, pois os pontos experimentais não se alinham rigorosamente; calculando  $\delta$  encontrou valor diferente do calculado anteriormente.

Não se trata de u'a mudança de regime análoga às que se encontram em condutos. A explicação deve ser procurada na influência da superfície livre sobre a mecânica do escoamento turbulento. Este efeito já havia sido assinalado por R. Powell, nos escoamentos, para os quais o número de Froude é superior (2). Este autor constatou uma brusca diminuição do coeficiente de Chézy, isto é, um aumento brusco de perda de carga unitária. Sabe-se que  $\delta > 2$  é o critério de estabilidade das ondulações acidentais da superfície livre, sob a influência da gravidade e do atrito turbulento. Parece, pois, que o mecanismo do escoamento turbulento em canal seja o mesmo que no conduto, quando a superfície livre for estável; pelo contrário, quando for instável a distribuição de velocidades é diferente nos dois casos e a perda de carga unitária aumenta.

Dá, a seguir, as equações para cálculo de  $\lambda$ , da equação:

$$\tau_0 = \rho \lambda_E u^2 \quad (68)$$

e chega a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} = 3 + 5,75 \log R_0 \sqrt{\lambda_N} \quad (69)$$

em que

$$R_0 = \frac{u_* y}{V} .$$

Esta equação foi obtida por Nikuradse.

De outro lado, Powell deduziu de sua experiência

cia uma fórmula que relaciona  $\lambda_p$ ,  $f$  e  $R$  (número de Reynolds):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} = - 38,75 + 5,28 f + 10,56 \log R_o \sqrt{\lambda_p} \quad (70)$$

$f$ : Keulegan propõe uma fórmula, independente de

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_K}} = - 8,85 + 7,06 \log R_o \sqrt{\lambda_K} \quad (71)$$

Constata-se que as fórmulas (70) e (71), estabelecidas para  $f$  vizinho de 3,0, dão maus resultados para valores superiores a 3,0.

Passa a falar sobre os resultados obtidos por M. Hickox na obra, em verdadeira grandeza, na barragem de Norris. A posição do aparecimento da água branca foi medida sobre fotografias para quatro valores da vazão, dos quais três correspondem a vazões ensaiadas no modelo.

Estabelecendo a comparação entre vazões circulando e respectivas alturas de água, notou-se uma grande concordância entre os resultados calculados pela teoria da camada limite e os obtidos das fotografias tiradas do escoamento.

#### Bibliografia:

Powell R. - Flow in a channel of definitive roughness .  
Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., vol. III -1946  
- pg. 531.

#### Estudo de M. Chen Che-Pen:

"Diferença das perdas de carga, num escoamento em conduto circular, de uma parte e um escoamento em canal a céu aberto, de fraca altura de água, de outra parte" - La Houille Blanche, Novembro de 1959.

Após a experiências de Nikuradse e os trabalhos de Von Karman, o problema do escoamento, nos condutos cilíndricos está praticamente equacionado. Porém, o escoamento, em canais abertos, está ainda em estado estacionário, com suas fórmulas empíricas. Todavia, o

mecanismo destes dois tipos de escoamento não deve ser diferente. Ensaio-se transportar a lei de escoamento nos condutos circulares ao escoamento nos canais descobertos; mas o coeficiente de perda de carga  $\lambda$ , assim obtido, tomando-se o diâmetro hidráulico  $D_H$  em vez de  $D$ , representa o caso limite mais favorável.

O Autor trata o problema, inicialmente no caso de escoamentos lisos teórica e experimentalmente; de poi estende esses resultados aos canais com escoamento rugoso.

Passa a apresentar as leis de variação da velocidade com a distância à parede  $[u(y)]$  em condutos circulares, próximo à parede e longe da parede.

Passa a descrever uma zona comum situada no limite das duas zonas acima mencionadas, chegando finalmente a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda'}} = 2 \log R \sqrt{\lambda'} - 0,8 \quad (72)$$

$(R > 10^5)$

Passando, a seguir, para o caso de canais abertos, estuda as leis de distribuição das velocidades:

- Perto da parede: as leis de distribuição de velocidades são as mesmas observadas nos canais circulares.
- Longe da parede: a viscosidade não intervém diretamente no fenômeno. A lei de distribuição de velocidades é mais complexa, em virtude da natureza do escoamento e da forma de sua secção.

Analisa, a seguir, o caso de um canal retangular infinitamente largo, que permite estabelecer uma fórmula de  $\lambda$ , a partir da distribuição das velocidades (regime hidráulicamente liso).

Chegou, experimentalmente, à seguinte equação:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} = - 41,5 \lambda \frac{\chi}{b} \mathcal{F}^2 + 3,2 \mathcal{F} - 2,92 \quad (73)$$

$\chi$  = perímetro molhado da secção

$b$  = largura, na superfície livre.

enquanto que, teóricamente, havia chegado a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} = 2 \log \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} + A_3 \quad (74)$$

$\lambda$  = coeficiente de perda de carga em canais abertos.

Empreendeu duas séries de ensaios, no Laboratório Nacional de Hidráulica em Chatou, num canal de paredes laterais com vidro, de secção retangular de 1,02 m de largura e com 21 m de comprimento. Os números de Reynolds obtidos variam de 150.000 a 750.000; verificou que o 2º membro da equação (73) é negativo ou nulo, no limite.

#### Referências:

Fortier, A. - Curso de Hidrodinâmica Superior na Sorbonne.

Bakhmeteff, Boris A. - Mecânica do escoamento turbulento dos fluidos - Dunod.

Na discussão do estudo acima referido, M. Fortier indica que as fórmulas do tipo Strickler foram estabelecidas num domínio limitado de números de Reynolds e não podem, pois, ser extrapoladas para grandes números de Reynolds.

O primeiro termo da equação (73) é desprezível em muitos casos, mas não é desprezível quando se tratar de escoamentos torrenciais.

#### Estudo de Manzanares Abecasis F.M.:

Soleiras descarregadoras - Alguns problemas especiais - 1961 - Laboratório Nacional de Engenharia Civil (Lisboa)

Neste trabalho Abecasis, entre outros, examina o problema de estabilidade da veia descarregadora.

A importância destes problemas acentua-se devido à tendência, cada vez maior, em dimensionar soleiras descarregadoras, para cargas inferiores às máximas que se podem verificar. É, nessas circunstâncias, que os fenômenos de instabilidade e de cavitação tomam importância fundamental e, por vezes, decisiva.

No capítulo II apresenta a história do dimen-

sionamento de soleiras descarregadas retilíneas em planta, sem comportas.

No capítulo V analisa o problema de estabilidade da veia descarregada por uma soleira, dotada ou não de pilares, funcionando com cargas superiores às do dimensionamento. Apresentam-se as conclusões de ensaios, realizados em canal de vácuo, com redução da pressão ambiente à escala do modelo ensaiado.

Os ensaios realizados o foram em modelos, nas escalas 1/2,5; 1/5; 1/7,5; 1/10; 1/12,5; 1/15; 1/17,5; 1/20; 1/22,5 e 1/25.

A instabilidade da veia líquida podia verifi-car-se de duas maneiras:

- a) Instabilidade do próprio escoamento que tende a aban-donar o paramento do descarregador
- b) Qualquer circunstância externa facilita ou provoca a admissão de ar na zona deprimida da veia descarregada.

Foram também realizados ensaios, com pilares sobre o coroamento da obra. Verificou que só se deu a separação da veia para um pilar não hidrodinâmico, mu-ito pouco esbelto e com a extremidade de jusante situada em zona em que a pressão no paramento era da ordem de grandeza de - 2 m a - 2,5 m.

#### Estudos de Mikio Hino:

Aplications of the Statistical Theory of Tur-bulence.

Trabalho apresentado na 9a. Assembléia Geral da Associação Internacional de Pesquisas Hi-dráulicas em Dubrovnik (1961)

On the mechanism of self-aerated flow on steep slope channels.

Apresenta, inicialmente, características tur-bulentas de escoamento em canais abertos.

Elabora um sumário de algumas características do escoamento turbulento em canais abertos:

- a) As intensidades turbulentas  $\sqrt{\bar{u}^2}$ ,  $\sqrt{\bar{v}^2}$  e  $\sqrt{\bar{w}^2}$ , quando são divididas pela velocidade de atrito  $V_*$ , são representadas, exceto para regiões junto às pare

des, por funções da altura relativa do escoamento:

$$\frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{V_*} = f_1 \left( \frac{y}{h} \right) \quad (75)$$

b) A macro-escala de turbulência  $L$ , dividida pela altura de escoamento  $h$ ,  $\frac{L}{h}$  é também função de  $\frac{y}{h}$

$$\frac{L}{h} = f \left( \frac{y}{h} \right) \begin{cases} = C_1 \frac{\frac{y}{h}}{1 - \frac{y}{h}} \left[ \frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{V_*} \right]^3 \quad (0 < \frac{y}{h} < 0,5) \\ = C_2 \left[ \frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{V_*} \right]^3 \quad 0,8 < \frac{y}{h} \leq 1,0 \end{cases} \quad (76)$$

c) A micro-escala de turbulência  $\lambda$ , no que concerne à energia de dissipação da turbulência é aproximadamente constante em toda a maior parte do escoamento próximo à superfície e parece existir, aproximadamente, a seguinte relação entre outras quantidades estatísticas:

$$\frac{\lambda^2 \sqrt{\bar{u}'^2}}{\nu L} = \text{const} \quad (78)$$

$\nu$  é o coeficiente cinemático de viscosidade do líquido. Portanto, a micro-escala de turbulência na região vizinha à superfície pode ser dada, aproximadamente, por:

$$\lambda^2 = \text{const} \frac{\nu h}{V_*} \quad (79)$$

Estas relações são previstas, estimadas teoricamente e testadas através de experiências em escoamentos turbulentos a duas dimensões, não isotrópicos.

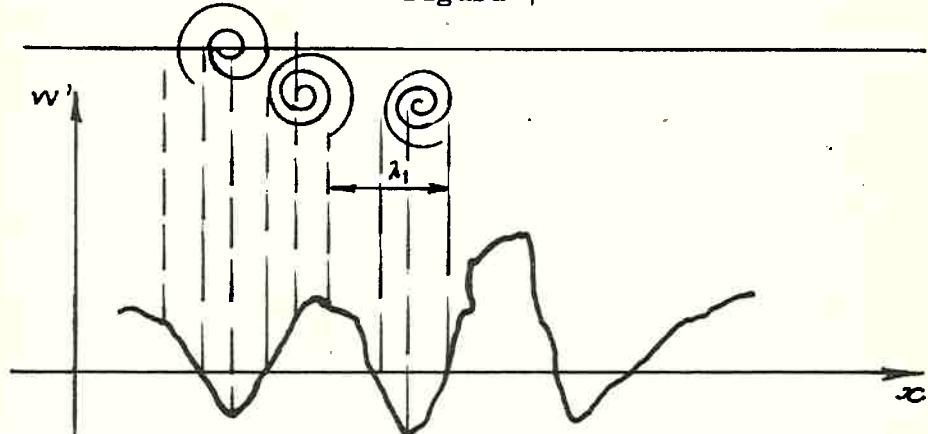
Se o escoamento suspender algumas partículas heterogêneas, que sejam sedimentos ou bôlhas de ar, as características do escoamento devem mudar e algumas das relações devem ser necessariamente modificadas, isto é, enquanto as intensidades turbulentas permanecem inalteradas, as escalas dos turbilhões decrescem, compensando o aumento de consumo de energia necessário à suspensão

das partículas. Todavia, a redução do tamanho dos turbilhões pode ser considerada pequena e desprezível. Para escoamentos, com arrastamento de ar, a viscosidade cinemática  $\gamma$  deve ser tomada para a água, porque a energia de turbulência é contida e dissipada pela água sózinha, o papel do ar sendo desprezível.

#### Início da aeração:

O fenômeno da aeração em canais, com declividades fortes, ocorre em condições que a camada limite desenvolve a partir do leito do canal, estendem-se à superfície livre e a intensidade turbulenta do escoamento é suficientemente alta. Mikio Hino desenvolve a segunda condição. O escoamento turbulento é formado por diversos turbilhões, de tamanhos diferentes, que aparecem representados esquemáticamente, na figura 7.

Figura 7



A grandeza média das gôtas de água, projetadas na atmosfera  $\lambda_1$ , é proporcional à micro-escala dos turbilhões. A ondulação de água, movendo-se para cima, é afetada pela tensão superficial e pela força gravitacional.

Define o começo da aeração como correspondendo a uma superfície ondulada "scarified flow". Concluiu que, colocando resultados das diversas condições de arrastamento de ar num gráfico  $h = f(I)$ , pode-se estabelecer a comparação com a fórmula empírica de Pavel.

( $h$  é a altura de água no canal e  $I$  o seno da declividade média do canal).

Construiu uma reta média, em escala bi-logarítmica da função  $hI = \text{constante}$ , baseado nas experiências de Hickox, Michels e Lovely, Straub e Anderson e Bauer.

Características do equilíbrio do escoamento auto-arejado:

Os escoamentos auto-arejados em equilíbrio apresentam duas regiões:

- A região superior que é formada por gótas projetadas para cima, através da superfície de transição e percorrendo superfícies planas;
- a região inferior, que contém bólhas de ar, dispersas na água.

O estudo da distribuição de concentração de ar em ambas as regiões é resolvido com base em considerações fenomenológicas.

A teoria estatística da turbulência é aplicada para explicar os parâmetros das equações ligadas às concentrações.

A) Parâmetro da concentração na região superior:

A concentração  $C$  nesta região foi dada por L.G. Straub e A.G. Anderson

$$\frac{1 - C}{1 - C_T} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\pi}} \int_{y'}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y'}{\sigma}\right)^2} dy' \quad (80)$$

em que:

$C_T$  representa a concentração de ar, na altura de transição

$y'$  é a distância normal exterior, acima da altura de transição  $d_T$

$\sigma$  é o desvio padrão da distribuição do ar acima de  $d_T$

Cita as equações

$$\sigma = F \left\{ \left[ \frac{V_*^2}{\cos \theta} \right]^{0,596} \right\} \quad (81)$$

em que:

$$V_* \approx \sqrt{g d_T \operatorname{sen} \theta} \quad (82)$$

(velocidade de atrito)

e também:

$$\sigma = \psi \left\{ \left[ \frac{V_{*m}^2}{\cos \theta} \right]^{0,578} \right\} \quad (83)$$

em que:

$$V_{*m} = \sqrt{g d_T (1 - C_T) \sin \theta} \quad (84)$$

$\theta$  = ângulo do leito do canal com a horizontal.

Cita, a seguir, os parâmetros de concentração obtidos por Viparelli M. em função de  $V_*^2/\cos \theta$  e em função de  $V_*^2$ .

### B) Parâmetro da concentração na região inferior:

A partir das mesmas considerações fenomenológicas que são desenvolvidas nos escoamentos, com sedimentos em suspensão, a concentração do ar é dada por:

$$C = C_1 \left[ \frac{y}{d_T - y} \right]^z \quad (85)$$

em que:

$$z = \frac{V_b}{\beta K V^*} \quad (86)$$

$C_1$  é a concentração do ar a  $y = d_T/2$  ( $y$  tomado sobre a normal ao fundo do canal)

$V_b$  é a velocidade de subida das bôlhas de ar

$K$  = constante de Karman

$\beta$  = const.

$z$  é uma função das características do escoamento.

Nas conclusões, o Autor informa que a hipótese de Kolmogoroff da isotropia local é aplicada para explicar o mecanismo das bôlhas de ar, em suspensão na região inferior do escoamento arejado.

### Estudo de Powell Ralph W. - Critério de Vedernikov

Foi publicado nas Trans. Amer. Geophysical Union - volume 29 - nº 6 - Dez. 1948.

Assunto: Critério de Vedernikov para escoamentos super-rápidos.

Este é um dos critérios de estabilidade do escoamento uniforme, em canais abertos. Quando este número ( $V$ ) é maior do que 1, o escoamento é super-rápido, formam-se ondas cilíndricas (roll waves) e o escoamento não é estável. Segundo Powell este critério é o mais

compreensivo e exato relativamente a outros critérios existentes até à época do estudo:

Em dois interessantes documentos (1945-1946), Vedernikov desenvolveu a teoria de um critério de estabilidade de escoamento em canais. Quando  $V = \text{número de Vedernikov} < 1$ , as ondas superficiais tendem ao amortecimento, porém quando  $V \geq 1$  as ondas superficiais amplificam-se de modo que o escoamento estável é impossível; temos, então, um escoamento super-rápido, com "roll waves".

Utilizando as equações de Saint-Venant, obtém a seguinte expressão para o escoamento instável

$$V = (1 + \beta) M V : p (u - V) \quad (87)$$

em que:

$V$  é a velocidade média, na secção transversal

$u$  é a celeridade da onda superficial

$\beta$  e  $p$  são expoentes da equação de perda de energia.

$$S = K V^p : R^{(1+\beta)} = I \quad (88)$$

em que  $S$  é a declividade da linha de carga, do escoamento

$R$  é o raio hidráulico da secção em estudo

$M$  é um adimensional que representa a influência da forma da secção transversal no escoamento

$$M = 1 - R \frac{dP}{dA} \quad (89)$$

$P$  é o perímetro molhado da secção.

Da equação de Saint-Venant, para o cálculo da celeridade das ondas de translação, resulta:

$$u - V = \sqrt{\frac{g A}{\alpha B}} \quad (90)$$

em que:

$B$  é a largura da corrente líquida, na superfície do canal

$\alpha$  é o coeficiente de Coriolis que leva em conta a distribuição real das velocidades na secção em estudo

$A$  é a superfície molhada da secção em estudo.

Consideremos os seguintes casos:

a) Canais com escoamento hidráulicamente rugoso

Se o escoamento se processar com números de Reynolds e de Froude convenientes, o coeficiente de Chézy  $C$  é constante para cada rugosidade relativa.

Logo em (88), teremos:

$$S = I = \frac{K V^2}{R}$$

Logo, teremos:  $p = 2$  e  $\beta = 0$ .

O número de Verdenikov será, pois:

$$V = \frac{M V}{p(u - V)} = \frac{M V}{2(u - V)} = \frac{V^2}{C^2 R} \quad (91)$$

b) Nos escoamentos hidráulicamente lisos, em canais, o coeficiente de Chézy  $C$  é função do número de Reynolds, o que exige que:

$$p + \beta = 2 \quad (92)$$

Teremos, pois, a seguinte expressão, para o número  $V$  de Vedernikov:

$$V = \frac{M V (1 + \beta)}{(2 - \beta)(u - V)} \quad (93)$$

Número de Froude, crítico:

Das expressões (90), (87) e (92) resulta:

$$V = \frac{(1 + \beta) M V}{(2 - \beta) \sqrt{\frac{g A}{\alpha B}}} \quad (94)$$

Ora, o número de Froude correspondente à velocidade média, na secção transversal, é:

$$\mathcal{F} = \frac{V}{\sqrt{\frac{g A}{\alpha B}}} \quad (95)$$

Substituindo-se (95) em (94):

$$V = \frac{(1 + \beta) M \mathcal{F}}{2 - \beta} \quad (96)$$

Ora, no escoamento em estudo, a condição de o corréncia das "roll waves" é  $V = 1$  e o número de Froude de correspondente denomina-se  $\bar{F}_c$  (número de Froude critico). De (96) resulta, pois:

$$\bar{F}_c = \frac{2 - \beta}{(1 + \beta) M} \quad (97)$$

Substituindo-se em (96), resulta:

$$V = \frac{\bar{F}}{\bar{F}_c} \quad (98)$$

- c) Escoamentos não turbulentos (laminares); temos:  
 $\beta = 1$  e  $p = 1$ .

$$(87) \quad V = \frac{2 M V}{u - V} = 2 M \bar{F} \quad (99)$$

Partindo da equação de perda de carga unitária (I ou S) dos movimentos turbulentos lisos e da fórmula de Chézy, chegou Powell à seguinte equação:

$$\log_e C = \frac{3}{2} \log \bar{R} + \text{const.} \quad (100)$$

Powell indica, finalmente, a seguinte equação para escoamentos rápidos em canais lisos:

$$C = 41,2 \log \left( \frac{R}{C} \right) + 17,9 \beta_K \quad (101)$$

em que  $\beta_K$  é a correção de forma, usada por Keulegan (1938).

Equação do Coeficiente de Chézy em escoamentos super-rápidos:

Parece natural supor que a lei de perda de carga para escoamentos super-rápidos inclua o número de Védernikov. Um estudo estatístico testado até à data desse estudo, apresenta um termo em  $\bar{F}$  e um termo em  $V$ . A equação obtida é a seguinte:

$$C = 41,2 \log \left( \frac{R}{C} \right) + 42,3 \bar{F} - 21,8 V - 113,7 \quad (102)$$

Levando-se em conta a equação (98), a equação (102) toma a forma:

$$C = 41,2 \log \left( \frac{R}{C} \right) + 42,3 V \left( \frac{F_c}{C} - 0,515 \right) - 113,7 \quad (103)$$

Apresenta, a seguir, numa tabela em que compara os valores de  $C$  observados e os calculados ( $C$  coeficiente de Chézy) pela equação (102).

Observação: Os valores calculados ( $C$ ) o foram com  $g = 32,16$  pés por segundo.

Conclui afirmando ser inteiramente possível que uma equação de forma diferente seja encontrada. Parece certo, porém, que a lei de perda de carga é diferente em escoamentos super-rápidos e rápidos e que o coeficiente de Chézy  $C$  depende do número de Vedernikov ( $V$ ).

#### Estudos de Viparelli M.:

Estes estudos foram publicados na Revista L' Energia Elétrica, vol. XXXV - Julho de 1958.

Relaciona os resultados de uma pesquisa experimental sobre escoamentos rápidos, realizada no Instituto de Hidráulica e Construções Hidráulicas da Universidade de Nápoles; foram realizados ensaios nos escoamentos em três canaletas de fundo liso, inclinadas de  $45^\circ$ ,  $23^\circ$  e  $11^\circ$  (relativamente ao plano horizontal); a canaleta de  $11^\circ$  foi também ensaiada, com dois tipos diferentes de revestimento rugoso.

Foram comparados os dados obtidos com os recolhidos pelo Engº Niciporovic no vertedor (tipo salto de esqui), na instalação de Grizeldon, na Grécia. Na canaleta de  $45^\circ$  Viparelli evidenciou que, nas correntes rápidas, se distinguem duas regiões distantes:  
a) uma, inferior, constituída dominanteamente de água  
b) outra, superior, formada de ar e água.

Nos estratos superiores de água e ar que constituem a superfície livre das correntes normais observa-se uma espessura proporcional ao produto da altura cinética, correspondente à velocidade máxima, por um parâmetro  $\sigma_*$ , assimilável ao afastamento quadrático médio da teoria estatística.

Tal parâmetro depende da rugosidade das paredes e não varia de modo seguramente apreciável, em fun-

ção nem da velocidade, nem da declividade da corrente.

Observada a lei que regula a perda de carga devida à rugosidade das paredes, pôs-se em evidência que não se diferencia, substancialmente, da lei vigente nas correntes hídricas comuns, desde que se considere só a camada hídrica inferior.

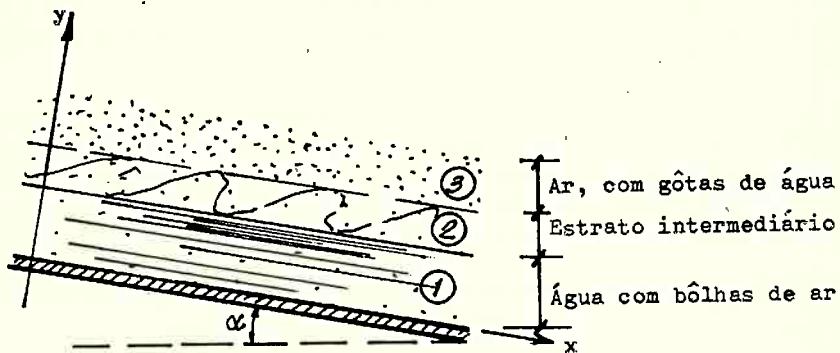
Ao examinar os dados relativos à perda de carga se evidenciou a necessidade de estender a fórmula de duzida da distribuição logarítmica de velocidades também aos casos em que a constante  $K$  de Von Karman seja diferente de 0,40.

O Autor elabora algumas normas para o dimensionamento de canais de declividade muito forte.

Faz o Autor a descrição física do fenômeno.

A corrente arejada que se forma num canal de declividade muito forte, contanto que a embocadura, singularidades do canal e excessiva rugosidade das paredes não o tornem extremamente irregular, é indicada na fig. 8.

Figura 8



- Um estrato inferior (1) de água que apresenta em suspensão pequenas bôlhas de ar.
- Um estrato superior (3) de ar, em movimento, em que se movimentam gotas de água.
- Um estrato intermediário (2), extremamente heterogê-

neo em que ocorre uma contínua troça de ar e água.

No estrato de ar e água, avançam cristas de onda, acompanhadas de espuma.

Se a embocadura for inadequada e se as paredes apresentarem descontinuidades, ainda que pequenas, ocorrem distúrbios, cujo efeito se prolonga notavelmente para jusante, seja sob a forma de pequenas ondas superficiais pouco inclinadas a respeito do eixo do canal, seja sob a forma de anomalias locais na distribuição de velocidades e das percentagens de ar, presentes na corrente.

Afirma Viparelli que, nas experiências em estudo, o fenômeno alcançara condições de regularidade e simetria que permitiam conclusões de caráter geral.

Passa a descrever os ensaios realizados, a aparelhagem de medida e os resultados obtidos.

Afirma que a presença de bôlhas de ar, na água em pequena percentagem, não altera o íntimo mecanismo da turbulência, de que depende a distribuição de velocidades, no escoamento.

Passa a explicar o movimento nas camadas de água e de ar/água.

As partículas superficiais de água, sob o efeito de elevada turbulência, destacam-se da corrente (1); sob o efeito da velocidade  $V$  reinante, estas partículas de água se movimentam na camada de ar envolvente e voltam, finalmente, a penetrar na corrente (1) (fig. 8).

Portanto, as partículas de água, no ar, são distribuídas segundo a mesma lei que rege a variação das componentes transversais da velocidade de agitação.

Logo, em virtude da constância de  $V$ , no sentido do movimento, a vazão hídrica  $q$ , através de um elemento de área unitária, é proporcional ao número de partículas presentes; logo é distribuída segundo a lei de casualidade.

$$q = q_{\max} \ell \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{y-h'}{\sigma_*} \right)^2 \quad (104)$$

$y > h'$

Sendo  $h'$  correspondente a  $q_{\max}$ :

$$\frac{y - h'}{\sigma_*} = \xi \quad (\text{afastamento reduzido}) \quad (105)$$

Podem ser obtidos, através da tabela, os valores de duas funções:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{1}{2}} \xi^2 \quad \text{e} \quad \phi(\xi) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{1}{2}} \xi^2 d\xi$$

$\sigma_*$  é o afastamento quadrático médio da Estatística.

Fala, a seguir, Viparelli, sobre sistemática divergência entre os valores da constante  $K$ , de Von Karman ( $K = 0,40$  usualmente admitido); sugere que na equação da velocidade se leve em conta os valores de  $K$  efetivamente obtidos.

Passando às conclusões, afirma que:

- a) Nas camadas hídricas inferiores o movimento é regulado, segundo o que foi observado, no âmbito da incerteza experimental, só pela perda de carga provocada pela rugosidade das paredes. Na água, as bôlhas de ar são dispersas em concentrações que variam pouco ao longo de normais ao fundo e notavelmente com a declividade.
- b) No fluido ar-água, o ar se movimenta com velocidade igual ou pouco menor do que a máxima velocidade  $V$  dos filetes superiores do estrato inferior. A água é aí dispersa, em forma de gôtulas, segundo a lei do caso. As partículas de água que se destacam da corrente, por efeito da turbulência não se afastam a distâncias maiores que  $\sigma_* V^2/2g$  (isto com uma freqüência estatisticamente considerável), em que  $\sigma_*$  depende das características da turbulência das camadas hídricas inferiores. ( $\sigma_*$  é o afastamento quadrático médio).

Trabalho do Engº José S. Gandolfo:

Boletim da Administração Nacional de Água -  
nº 95 - Maio 1945 - Buenos Aires.

Canales de furte pendiente.

Assinala, neste estudo, os caracteres hidráu-

licos especiais que correspondem ao movimento das correntes superficiais em regime veloz, sob altura crítica. Proporciona normas e processos da literatura hidráulica com o objetivo de auxiliar os projetistas de canais em tal regime de escoamento.

Estudos de Arsenishvili:

Título do livro: Effect of Wave Formation on Hydro-Engineering Structures - 1965.

Desenvolve o Autor uma série de estudos e apresenta a análise dos resultados das pesquisas e conclusões.

No Capítulo I apresenta a formação de ondas e as relações fundamentais teóricos dos escoamentos ondulares, aplicáveis às "roll waves".

Faz observações sobre água escoando em canais abertos, muito inclinados, lineares, com rugosidade normal e suficiente comprimento; estes escoamentos apresentam uma onda padrão. A água, penetrando numa queda, começa a escoar, sem ondas. A velocidade aumenta, até transformar-se em movimento relativamente uniforme. Se a extensão do canal for conveniente e se o escoamento sem ondas tiver uma declividade constante, a superfície livre correspondente tem bem a forma de uma curva com reintrância, com as velocidades aumentando de valores subcríticos na entrada, até supercríticos, no movimento uniforme, ao longo do canal.

Este escoamento uniforme continua a distância; posteriormente esbeltas ondulações aparecem sobre a superfície que se transforma numa superfície com numerosas pequenas ondas, desenvolvendo-se, então, um escoamento instável. Ondas pequenas parcialmente formadas são observadas, rebentando periodicamente corrente a jusante. Estas pequenas ondas crescem, rapidamente, em altura e comprimento, numa extensão curta do canal, a partir da qual emergem completamente, formando ondas.

Tais ondas movem-se para jusante, não concorrendo para que outras ondas se choquem com elas. Todavia, as ondas frequentemente reforçam outra onda, para formar uma só onda que pode, então, alcançar uma ter-

ceira com a qual faz fusão.

Só se a extensão do canal em que se formam as ondas for suficientemente grande é que se forma um movimento de ondas estáveis, caracterizado por uma sucessão mais ou menos regular de ondas de comprimento e altura constantes.

O comprimento do canal pode ser dividido em três trechos:

- a) O trecho de entrada onde começa a formação de ondas "zona de movimento" não uniforme
- b) O trecho em que se formam ondas com comprimento e altura finitos "zona de formação de ondas"
- c) O trecho em que o escoamento completamente formado de ondas é observado "zona de movimento de onda".

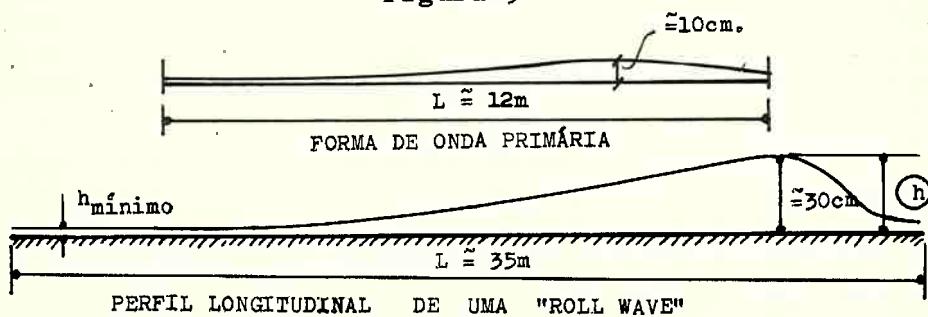
Esta, sob certas condições, pode, também, ser subdividida em duas regiões, dependendo do comprimento do canal, da inclinação e da vazão:

- c<sub>1</sub>) Trecho em que a onda padrão não é completamente formada
- c<sub>2</sub>) Trecho em que a onda padrão é completamente formada "zona de movimento com ondas estáveis".

Estas ondas alcançam outras (de outra freqüência) neste trecho e ondas secundárias se formam entre elas.

As ondas maiores rapidamente alcançam as ondas secundárias e movem-se em conjunto.

Figura 9



Na figura 9,  $h$  é a altura de onda =  $h_{\max}$   
 $L$  = comprimento de onda (distância de crista a crista sucessivas)

A relação entre  $h_{\max}/h_{\min}$  tende a estabilizar-se quando a onda se move para jusante, até que a onda se estabilize. O comprimento de onda é raramente constante, na zona de movimento da formação de ondas devido ao choque de ondas nesta região. A celeridade de propagação das "roll waves" não depende da relação altura-comprimento. A velocidade de propagação das cristas das "roll waves" geralmente depende da velocidade média do escoamento e da declividade do canal.

A máxima altura obtida, através de medições realizadas vai até 1,19 m a 1,20 m e o máximo comprimento até 110 m.

Quando a onda formada penetra na bacia de tranquilização, causa um choque momentâneo, levantando o nível na bacia e formando um ressalto hidráulico. Como resultado são formadas, na frente, na bacia de tranquilização. Estas ondas colidem com as ondas refletidas e criam ondas estacionárias.

Este fenômeno dá origem à erosão do solo próximo à bacia e pode dar origem a danos na própria bacia.

Experiências têm mostrado que o aumento do tamanho da bacia alcança de 4 a 5 vezes o alcançado em bacias de tranquilização de canais funcionando em condições normais de escoamento (sem "roll waves"), se não forem utilizados meios para reduzir tais dimensões.

Apresenta, a seguir, relações fundamentais do escoamento ondular aplicadas às "roll waves", partindo da equação de Laplace aplicável aos escoamentos de fluidos incompressíveis a potencial de velocidades

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (106)$$

$\phi$  é a função potencial do campo das velocidades  $\vec{V}$ .

A celeridade de propagação da onda pode ser determinada pela equação:

$$C = \frac{\lambda}{T} \quad (107)$$

em que:

$\lambda$  é o comprimento de onda  
T é o período da onda.

A celeridade de propagação da onda num fluido incompressível, de altura finita, é determinada pela equação de Laplace-Boussinesq:

$$C = \sqrt{\frac{g\lambda}{\pi} \tan h \frac{\pi h}{\lambda}} \quad (108)$$

Quando  $h \ll \lambda$ , a celeridade C é dada pela Fórmula de Laplace:

$$C = \sqrt{g h} \quad (108)$$

que, como se pode ver, é um caso particular de (108) quando  $\pi h/\lambda$  é muito pequeno;

ou pela fórmula de Saint-Venant:

$$C = \sqrt{g (h + \frac{3}{2} z)} \quad (109)$$

em que  $z$  é a altura da crista da onda acima do nível do líquido não perturbado.

A teoria das ondas, elaborada a partir dos movimentos a potencial de velocidade, despreza a influência da corrente turbulenta que é a causa principal de geração e propagação das "roll waves".

Usou a análise de Reynolds no problema de estabilidade do escoamento turbulento e de suas variações com o escoamento médio.

A energia cinética total do movimento é igual à soma da energia  $E_0$  do movimento médio e da energia  $E'$  do movimento de pulsação.

Fazendo uma série de hipóteses simplificativas:

a)  $\frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} \ll \frac{\partial u}{\partial t}$

b)  $R_{xx} = R_{yy} = R_{zz}$

c)  $R_{zy} = 0$

d) O escoamento varia gradualmente:

$$\frac{\partial}{\partial x} (R_{xy}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} (R_{xz}) = 0$$

utilizando as equações de Reynolds (escoamento turbulento),

considerando:  $x = g i$  e  $z = -g$

(o eixo dos xs coincidindo com o fundo do canal)

$$i = \operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{sen} \theta$$

$\theta$  = ângulo formado pelo eixo dos xs com a horizontal, considerando um canal retangular, com  $R = H$ ,

considerando que a tensão de cisalhamento é nula, na superfície,

considerando a equação da continuidade,

examina os dois seguintes casos:

I)  $\alpha = 1$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{escoamento estável}$$

chega a:  $\omega_0 = v_0 \pm \sqrt{g H_0}$  (110)

Esta equação dá a velocidade de propagação de ondas curtas, com curvatura insignificante.

II) para  $\alpha \neq 1$ , chega a:

$$\omega_0 = \alpha v_0 \pm \sqrt{g H_0 + \alpha (\alpha - 1) v_0^2} \quad (111)$$

Nikuradse propôs a seguinte equação, para  $\alpha$ :

$$\alpha = 1 + 0,94 \left[ \frac{u_{\max}}{v_0} - 1 \right]^2 \quad (112)$$

$u_{\max}$  é a máxima velocidade na superfície  
 $v_0$  é a velocidade média na corrente.

No Capítulo II estuda a estabilidade do escoamento num canal de grande declividade.

Apresenta critérios existentes de estabilidade de escoamento; entre outros citaremos:

a) Keulegan e Paterson

$$i \geq \frac{9}{8} \lambda_0 \quad (113)$$

$\lambda_0$  é coeficiente de atrito das paredes do canal.

b) Thomas

$$i \geq 4 i_{cr} \quad (114)$$

$i$  segunda declividade crítica.

c) Vedernikov

$$v > 1 \quad (115)$$

c-1) Canais lisos

$$v = \frac{M v (1 + p)}{(2 - \beta)(\omega - v)}$$

c-2) Canais rugosos

$$v = \frac{M v}{p(\omega - v)}$$

$$l = J = \frac{A v^p}{R^{1+\beta}}$$

$v$  = velocidade do escoamento

$M$  = coeficiente exprimindo o efeito de forma da seção transversal do canal.

$$M = l - R \frac{dp}{dA}$$

d) Dressler R.: Desenvolve as analogias entre os escoamentos de água com baixa altura e a dinâmica dos gases:

$$m \geq 4 r^2 \quad (116)$$

$$m = \operatorname{tg} \theta$$

$$r^2 = \frac{g}{c^2} \quad (\text{coeficiente de perda de carga, adimensional})$$

e) Dressler (1953)

$$0 < \xi < 1 \quad (117)$$

em que:

$$\xi = \frac{K}{\sqrt{i}} \quad K^2 = \frac{4}{C^2} g$$

$i$  = declividade do leito do canal

f) Iwasa e Mostkov M.A. (1954)

Foi obtido a partir das equações de Saint-Venant, o critério de Iwasa, obtido a partir do método das pequenas oscilações:

$$\frac{M}{A} \frac{(1 + b)}{(\omega - u_0)} \geq 1 \quad (118)$$

$u_0$  é a velocidade média da corrente

$\omega$  é a celeridade da onda

$M$  é o fator de forma =  $1 - R \frac{dP}{dA}$

$A$  é a área da secção transversal

$P$  é o perímetro molhado da secção

$b$  é o expoente na fórmula de resistência

g) Critério de Mostkov M.A. (1954)

$$i_0 \geq 12 i_{cr} \quad (118')$$

h) Critério semi-empírico, de formação de "roll waves" obtido por Arsenishvili, partindo da equação de Saint Venant e da equação da continuidade, estuda os casos de canais trapezoidais, retangulares e triangulares.

Obtem:

$$\frac{H_0}{\chi_0} \geq 0,10 \quad (\text{Critério A}_2) \quad (119)$$

$H_0$  = altura da corrente não perturbada

$\chi_0$  = perímetro molhado da corrente não perturbada

A experiência mostrou que este critério, sózinho, é insuficiente para estabelecer o tipo de movimento. Foi assente que declividades do leito do canal entre 0,02 a 0,35 é necessária para que apareçam as "roll waves" nos canais de diretriz linear e rugosidade normal. Todavia uma expressão adicional pode ser acrescida a (119), estabelecendo a "zona de declividades com ondas":

$$0,02 < i < 0,35 \quad (\text{Critério A}_1) \quad (120)$$

Logo temos:

a) Critério da "zona de declividades com ondas"

$$0,02 < i < 0,35 \quad (\text{Critério A}_1)$$

b) Critério de perfil sem ondas da secção transversal do canal

$$\frac{H}{\chi_0} \geq 0,10 \quad (\text{Critério A}_2)$$

} (121)

A análise conjuntamente com os testes experimentais dos critérios citados indicam que, em adição aos regimes tranqüilo (sub-crítico), rápido (supercrítico) e ultra-rápido (super-rápido) definidos por Saint Venant, Boussinesq e Verdenikov, ainda existe um outro tipo de escoamento que representa o estágio seguinte ao ultra-rápido regime ondular e em que a corrente é ultra-rápida, porém não ondular. Este tipo de escoamento é chamado ultra-rápido "impetuoso". É caracterizado por grande turbulência, sem ondas e alta energia cinética.

No Capítulo III, Arsenishvili apresenta estudos da influência das "roll waves" nas estruturas de Engenharia Hidráulica.

Apresenta uma descrição de estudos feitos no Laboratório.

No Capítulo IV Arsenishvili analisa os resultados das pesquisas e apresenta conclusões.

Apresenta uma tabela comparando as alturas de água calculadas e medidas, em cinco tipos de canais, de perfis diferentes; apresenta, a seguir, um estudo sobre distribuição das velocidades numa corrente ultra-rápida, mostrando graficamente as velocidades calculadas e experimentais obtidas, para diversas vazões.

Apresenta, a seguir, um estudo sobre flutuações de pressões hidrodinâmicas, em correntes ultra-rápidas.

Apresenta, no Capítulo V, a dissipação da energia cinética de correntes ultra-rápidas. A experiência mostra que as bacias de dissipação para canais em regime super-crítico não dissipam a energia cinética das correntes ultra-rápidas, de forma satisfatória; projetam-se, então, adequadamente os dissipadores de energia

de onda; são planos com aberturas de área variável.

Descreve, a seguir, os perfis de canais super-rápidos, sem ondas, a partir da condição:

$$\frac{H_0}{\chi_0} > 0,10 \quad (\text{Critério A}_2)$$

As secções básicas estudadas foram a semi-circular, triangular e diversas combinações destas.



CAPÍTULO III  
DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

III.1 - Escoamentos livres, permanentes e uniformes.  
Hipóteses. A equação de Chézy.

III.1.1 - Partiremos da equação indefinida de movimento, válida em qualquer ponto de um domínio de escoamento de um fluido qualquer. Supomos a partícula fluida, paralelepípedica, de arestas elementares  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , submetida a forças de volume, forças de inércia e a forças superficiais.

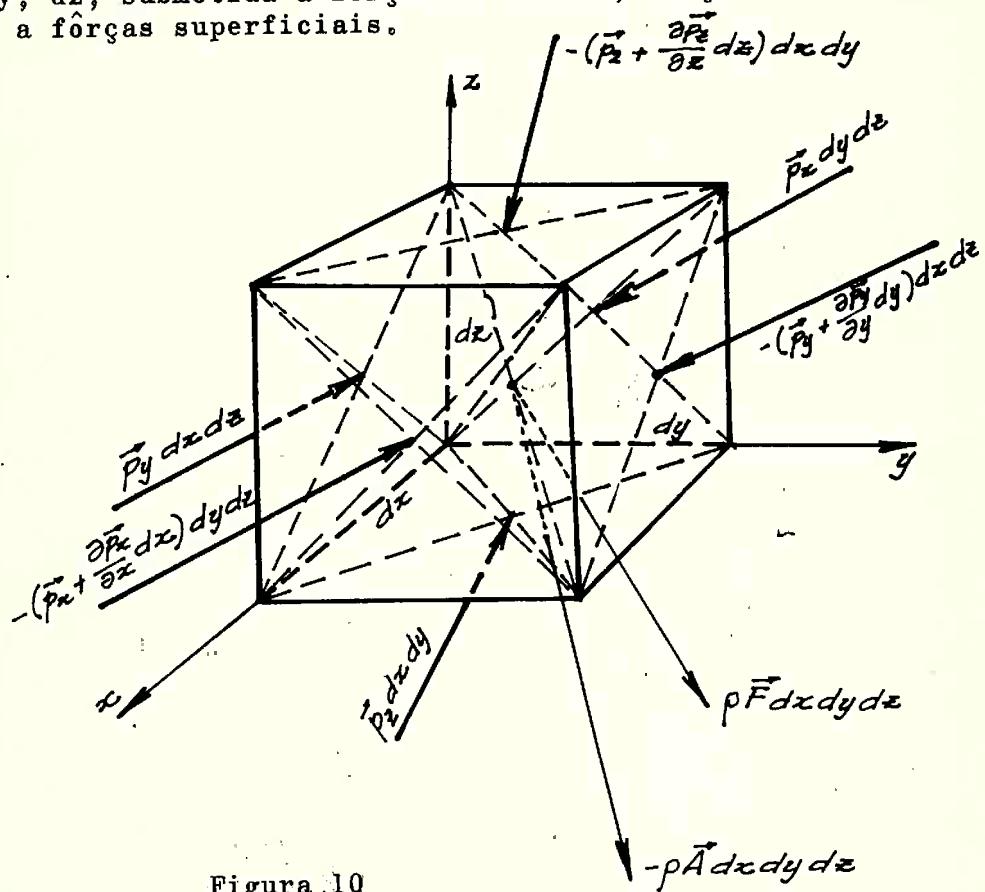


Figura 10

De acordo com uma das equações de equilíbrio da partícula fluida, temos:

$$\sum \vec{F}_i = 0 ;$$

a somatória  $\sum \vec{F}_i$  engloba as fôrças superficiais que atuam na partícula e que representam a ação das partículas externas sobre as internas, através das faces do paralelepípedo, as fôrças de volume e as fôrças de inércia que agem sobre a partícula fluida focalizada.

Temos, pois:

$$\rho [\vec{F} - \vec{A}] dx dy dz - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dx dy dz \\ - \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dx dy dz = 0$$

ou:

$$\rho [\vec{F} - \vec{A}] = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \quad (122)$$

III.1.2 - Equações integrais do equilíbrio dinâmico ou teorema do momentum de uma corrente.

Partiremos da hipótese de que o fluido em estudo é incompressível ( $\rho = \text{constante}$ ).

De (122), por integração resulta:

$$\iiint_{(\tau)} [\rho (\vec{F} - \vec{A}) - \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}] d\tau = 0 \quad (123)$$

$$d\tau = dx dy dz .$$

A equação (123) de acordo com o teorema de Gauss dá:

$$\iiint_{(\tau)} \rho [\vec{F} - \vec{A}] d\tau + \iint_{\sigma} \vec{p} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \quad (124)$$

em que:  $\vec{p} \cdot d\vec{\sigma} = \vec{p} \cdot \vec{n} d\sigma$

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (125)$$

De (124) e (125) resulta:

$$\rho \iiint_{(\tau)} \left[ \vec{F} - \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) \right] d\tau +$$

$$+ \iint_{\sigma} \vec{p} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

Desenvolvendo-se a equação acima, temos:

$$\rho \iiint_{(\tau)} \left( \vec{F} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) d\tau = - \iint_{\sigma} \vec{p} \cdot d\vec{\sigma} +$$

$$+ \rho \iiint_{\tau} \left( u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) d\tau \quad (125')$$

De outro lado, temos:

$$\frac{\partial(u \vec{V})}{\partial x} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \vec{V} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \therefore \quad u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \frac{\partial(u \vec{V})}{\partial x} - \vec{V} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (126)$$

e assim sucessivamente.

Se somarmos as três equações do tipo da (126):

$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \frac{\partial(u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial(w \vec{V})}{\partial z} \quad (127)$$

já que:

$$\vec{V} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial v}{\partial y} + \vec{V} \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{V} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{fluidos incompressíveis})$$

De (125'):

$$\rho \iiint_{\tau} \left( \vec{F} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) d\tau + \iint_{\sigma} \vec{p} \cdot d\vec{\sigma} -$$

$$- \iiint_{\tau} \left[ \frac{\partial(u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial(w \vec{V})}{\partial z} \right] d\tau = 0 \quad (125'')$$

pelo teorema de Gauss, aplicado ao terceiro termo da equação anterior, resulta:

$$\begin{aligned}
 - \iint_{\sigma} \vec{V} \cdot V_n d\sigma &= \iiint_{(\tau)} \left[ \frac{\partial(u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial(w \vec{V})}{\partial z} \right] d\tau \\
 &= - \iint_{\sigma} \vec{V} \cdot \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}
 \end{aligned}$$

De (125") resulta:

$$\rho \iiint_{(\tau)} (\vec{F} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}) d\tau + \iint_{\sigma} (\vec{p} + \rho \vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

ou, finalmente:

$$\begin{aligned}
 \rho \iiint_{(\tau)} \vec{F} d\tau - \rho \iiint_{(\tau)} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\tau + \\
 + \iint_{(\sigma)} \vec{p} \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{(\sigma)} \rho \vec{V} \cdot V_n d\sigma = 0
 \end{aligned}$$

ou:

$$\vec{G} + \vec{L} + \vec{P} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0 \quad (128)$$

em que:  $\vec{G}$  é a resultante de todas as forças de volume que atuam sobre um volume  $(\tau)$  =

$$= \rho \iiint_{(\tau)} \vec{F} d\tau$$

$\vec{L}$  é a força de inércia local, resultante

$$= - \rho \iiint_{(\tau)} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\tau$$

$\vec{P}$  é a resultante das forças superficiais

$$= \iint_{(\sigma)} \vec{p} \cdot d\vec{\sigma}$$

$\vec{M}_1 - \vec{M}_2$  é a diferença entre o momentum do fluido que entra no volume  $(\tau)$  e o momentum do fluido que sai do mesmo volume  $(\tau)$ .

### III.1.3 - Noções sobre camada limite

A Hidrodinâmica Clássica supõe a não existência de tensões tangenciais, no interior da massa contínua de fluido, ao passo que a Dinâmica dos fluidos viscosos leva em conta tais tensões tangenciais.

A condição de contorno relativamente à velocidade, junto às paredes dos condutos, para a Hidrodinâmica Clássica, é a de tangência, ao passo que na Dinâmica dos Fluidos viscosos, além da tangência da velocidade, exige a aderência ou ausência de movimento das partículas fluidas viscosas, em contato com a parede do conduto.

Em fluidos pouco viscosos, como por exemplo o ar, as fôrças tangenciais são, em geral, de ação desprezível em face das fôrças de volume, de inércia e de pressão.

Segundo Prandtl, L., o estudo de um fluido de baixa viscosidade como a água pode ser elaborado considerando-o um fluido perfeito, à exceção de uma região chamada camada limite, junto às paredes, onde as fôrças viscosas são da mesma ordem de grandeza que as de inércia. De fato, a tensão tangencial  $\tau = \mu du/dn$  é considerável devido ao fato de aí existirem fortes gradientes de velocidades  $du/dn$ .

Já no domínio exterior à camada limite, em que os gradientes  $du/dn$  são baixos, as fôrças viscosas de um líquido de baixa viscosidade, como a água, são baixas, dominando nesta região as fôrças de inércia.

Hipóteses deduzidas da experiência. Camada limite laminar

Experimentalmente observa-se que:

1) Se bem que as perturbações produzidas pelo atrito se propaguem a toda a massa fluida, é possível admitir que dominantemente a perturbação se concentra num domínio, definido por uma espessura finita  $\delta$  que fixa a extensão da camada limite, no sentido normal ao contorno.

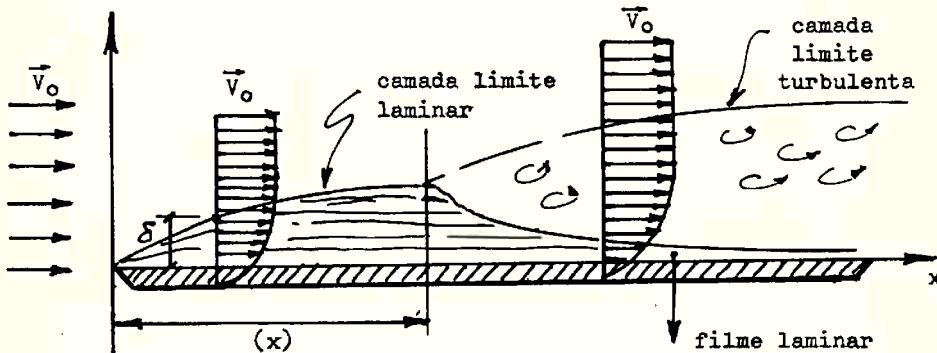
2) A curva de distribuição de velocidades, na camada limite, em diversas secções, pode ser expressa

por uma lei do tipo

$$\frac{u}{V_0} = f \left( \frac{V}{\delta} \right) \quad (129)$$

$\vec{V}_0$  = velocidade uniforme do fluido não perturbado.

Figura 11



A experiência mostra que o movimento laminar na camada limite fica instável quando é superado um número de Reynolds, chamado crítico.

$$R_x = \frac{V_0 x}{\nu} \geq R_c \quad (130)$$

A camada limite passa, então, a ser turbulenta, existindo, porém, junto à placa um filme laminar.

Experimentalmente se comprova que os  $R_x$  críticos oscilam no intervalo  $5 \times 10^5$  até  $3 \times 10^6$ . Se as paredes laterais de um conduto forem próximas, os alargamentos progressivos da camada limite de cada contorno se unem, desaparecendo consequentemente a região em que o fluido em escoamento podia ser considerado fluido perfeito. Realiza-se, então, um movimento de escoamento laminar ou turbulento em toda a secção do conduto, conforme o número de Reynolds do escoamento.

Definições da espessura da camada limite ( $\delta$ )

Do estudo apresentado anteriormente resulta que a espessura  $\delta$  da camada limite deve satisfazer as seguintes condições:

1) O valor  $u$  da velocidade, para  $y = \delta$ , deve ser bem próximo de  $V_0$ , isto é,  $u_\delta \approx V_0$ , pois o grau diente de velocidades é desprezível, logo  $\tau = \mu du/dy$  também o será.

2) A tensão de cizalhamento viscosa, calculada na região de espessura  $\delta$ , ao largo do contorno, a partir da equação da quantidade de movimento, deve coincidir com:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

na camada limite laminar, ou com o valor deduzido experimentalmente, na camada limite turbulenta.

Surgem das aplicações práticas dois tipos de definições:

a) As que se apoiam na condição (1) citada e que definem  $\delta$  de modo que

$$u_\delta = 0,99 V_0 \quad (131)$$

(segundo Blasius).

b) As que definem, para as velocidades, uma lei do tipo:

$$\frac{u}{V_0} = f \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad (132)$$

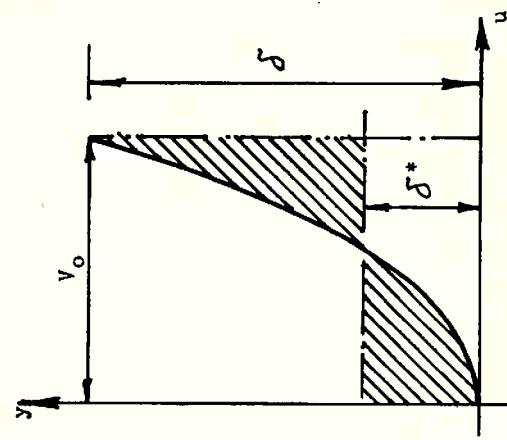
de modo que:  $y = \delta$   $u = V_0$  e determinam  $\delta$  pela equação da quantidade de movimento.

Emprega-se, frequentemente, em regime laminar, uma parábola de 2º grau e em regime turbulento outras de grau 1/m.

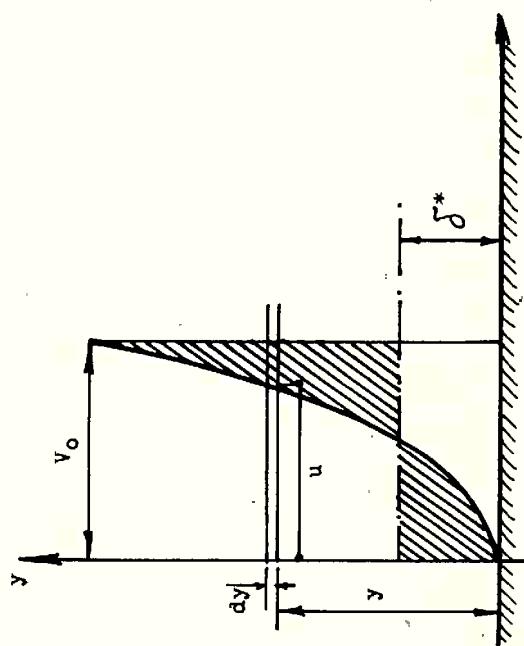
Espessura de deslocamento  $\delta^*$  é uma grandeza através da qual representamos o movimento transversal do campo irrotacional, produzido pela presença da camada limite e que acarreta diminuição da velocidade do fluido, na corrente.

$\delta^*$  será obtida a partir da equação da conservação da vazão, ao longo da normal ao contorno; as áreas hachuradas nas duas figuras acima devem ser iguais.

$$a \left\{ \delta^* V_0 = \int_0^\infty (V_0 - u) dy \quad b \left\{ \delta^* V_0 = \int_0^\delta (V_0 - u) dy \right. \right. \quad (133)$$



Caso b)



Caso a)

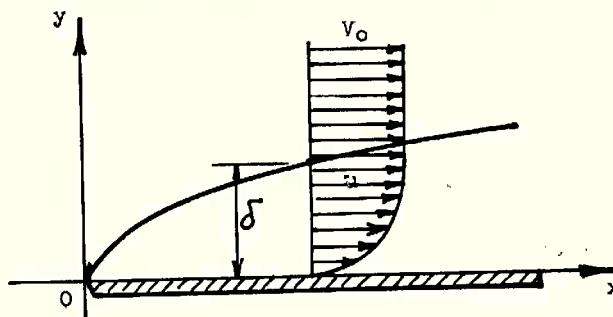
Figura 12

Equações de Prandtl na camada limite - Fluidos incompressíveis

A partir do fato constatado de que as forças viscosas são desprezíveis, em face das de inércia, na região externa à camada limite, ao passo que, no interior dessa camada, esses dois tipos de forças são de mesma ordem, se simplificam as equações de Navier-Stokes.

Estudemos um movimento plano, não necessariamente laminar, limitado por um contorno fixo coincidente com o eixo dos  $x_s$ , desprezando o peso do fluido em face das demais forças atuantes na partícula fluida.

Figura 13



Camada limite sobre um contorno plano

A equação de Navier-Stokes sob forma vetorial

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{p} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} + \frac{\mu + \eta}{\rho} \text{grad div } \vec{V}$$

em que:

$\mu$  = coeficiente de viscosidade dinâmica

$\eta$  = 2º coeficiente de viscosidade

$\mu$  e  $\eta$  são denominados coeficientes de Lamé.

$$\Delta \vec{V} = \Delta u \vec{i} + \Delta v \vec{j} + \Delta w \vec{k}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Temos, pois, para um fluido incompressível:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (134)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (135)$$

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (136)$$

Escrevendo estas equações sob forma adimensional, dividindo:

- As grandezas lineares, por um comprimento  $L$  característico do contorno
- As velocidades pela velocidade  $V_0$  do movimento irrotacional vigente fora da camada limite
- As grandezas ligadas ao tempo por  $L/V_0$
- As pressões por  $\rho V_0^2$

$$R = \text{número de Reynolds} = \frac{V_0 L}{\gamma} = R$$

Sejam, pois:

$$u' = \frac{u}{V_0} \quad v' = \frac{v}{V_0} \quad x' = \frac{x}{L} \quad y' = \frac{y}{L} \quad t' = \frac{t}{\frac{L}{V_0}}$$

...

resulta, consequentemente, das equações (134), (135) e (136):

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right] \quad (134')$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \quad (135')$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (136')$$

Consideremos, nas equações acima, a ordem de

grandeza de cada termo, em relação a  $\frac{\partial u^i}{\partial x^i}$ , que consideremos como unidade. Na camada limite  $v^i = 0$  junto à parede ( $y = 0$ ); como  $\frac{\partial v^i}{\partial y^i}$  é da ordem de 1, junto ao contorno,  $v^i$  é da ordem de  $y^i$  ou de  $\delta^i$ . Admitindo-se que a aceleração local é da mesma ordem de grandeza que a convectiva, ficam definidas as ordens de grandeza dos primeiros termos das equações (134<sup>i</sup>) e (135<sup>i</sup>). A ordem de  $1/R$  é imposta pela consideração de identidade entre a ordem dos termos de inércia e a ordem dos termos de viscosidade.

Desprezando-se nas equações anteriores os termos de ordem superior à unidade, as equações ficam:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t^i} + u^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial u^i}{\partial y^i} = - \frac{\partial p^i}{\partial x^i} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^i 2} \quad (134^i)$$

$$0 = - \frac{\partial p^i}{\partial y^i} \quad (135^i)$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{\partial v^i}{\partial y^i} = 0 \quad (136^i)$$

Voltando-se às equações de partida, tem-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (137)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{não há variação de pressão normalmente ao contorno da camada limite}) \quad (138)$$

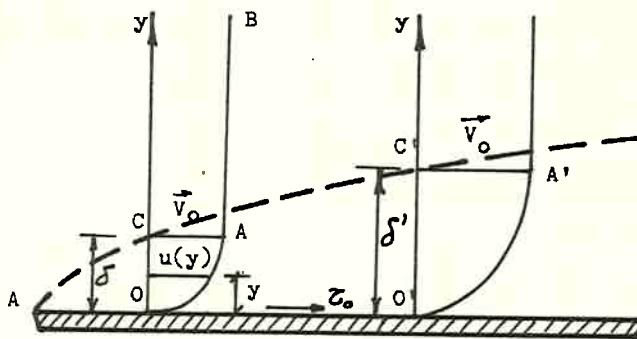
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (139)$$

Tem-se, da análise feita, a priori, um índice de espessura da camada limite, a saber:

$$\frac{1}{R} \sim \delta^2 \quad \therefore \quad \frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{V_o}{\gamma} L}} \quad (140)$$

Coeficientes local e médio de atrito, da camada limite sobre uma superfície plana

Figura 14



Em virtude da irrotacionalidade do movimento do fluido fora da camada limite, não existem gradientes longitudinais de pressão, de modo que a única força atuante é  $\tau_0 dx$  sobre a placa, sobre um comprimento  $dx$ .

Calcula-se o fluxo de quantidade de movimento através de OC, de OC' e de CC'; igualando-se, finalmente, o fluxo da quantidade de movimento calculado com a força de atrito sobre a placa, tem-se finalmente:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\delta} u (V_o - u) dy \right] \quad (141)$$

Se, por hipótese, tivermos que:

$$\frac{u}{V_o} = f \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad (\text{leis semelhantes nas secções sucessivas})$$

$$u = V_o f (\eta) \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Sendo  $c_a$  o coeficiente local de atrito, no ponto de abscissa  $x$ , a equação (141) fica:

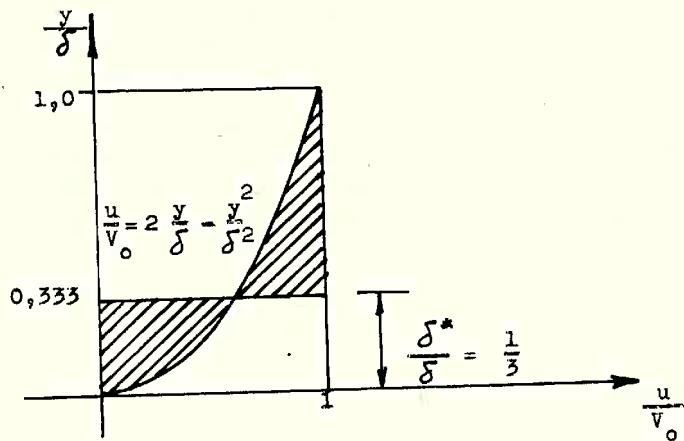
$$c_a = \frac{\tau_0}{\rho \frac{V_o^2}{2}} = 2 \left[ \int_0^1 f(\eta) [1 - f(\eta)] d\eta \right] \frac{d\delta}{dx} \quad (142)$$

Para se determinar o coeficiente médio de atrito sobre um comprimento  $L$  de placa, contado desde o bordo de ataque  $A$  da fig. 14, deverá integrar-se entre  $x = 0$  e  $x = L$

$$c_a = \frac{\int_0^L \tau_0 \, dx}{\rho \frac{V_0^2}{2} \cdot L} = 2 \left\{ \int_0^1 f(\eta) [1 - f(\eta)] d\eta \right\} \frac{\delta}{L} \quad (143)$$

Camada limite laminar - Lei de velocidades parabólicas do 2º grau

Figura 15



$$u = V_0 \left( 2 \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad (144)$$

$$f(\eta) = \frac{u}{V_0} = 2 \eta - \eta^2$$

$$\int_0^1 f(\eta) [1 - f(\eta)] d\eta = \frac{2}{15}$$

$$c_a = \frac{\frac{\tau_0}{V^2}}{\rho \frac{\tau_0}{2}} = \frac{4}{15} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\tau_0 = 2 \mu \frac{V}{\delta} \quad (\text{regime laminar})$$

Temos, pois:

$$\delta = 5,47 \frac{x}{\sqrt{R_x}} \quad (145)$$

$$c_a = \frac{0,73}{\sqrt{R_x}} \quad (146)$$

$$c_a = \frac{1,46}{\sqrt{R_{x=L}}} \quad (147)$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{3} \quad (148)$$

A transição do regime laminar ao turbulento, no interior da camada limite depende do grau de turbulência da corrente uniforme. Assim:

- a) Para  $R_x > 3 \cdot 10^6$  o regime na camada limite é sempre turbulento
- b) Para  $R_x < 5 \cdot 10^5$ , a camada limite é laminar.

Desenvolvendo-se a integração das equações da camada limite laminar, para uma superfície plana pelo método de Blasius, obtemos:

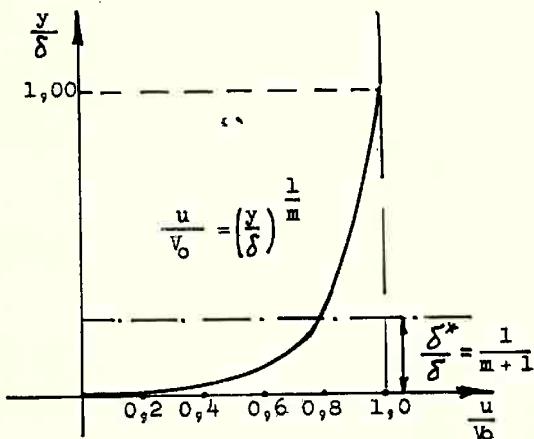
$$\delta_{99} = 5,0 \frac{x}{\sqrt{R_x}} = \text{espessura da camada limite} \quad (145')$$

$$c_a = \text{coeficiente local de atrito} = \frac{\frac{\tau_0}{V^2}}{\rho \frac{\tau_0}{2}} = \frac{0,66412}{\sqrt{R_x}} \quad (146')$$

$$c_a = \text{coeficiente médio de atrito} = \frac{1,32824}{\sqrt{R_L}} \quad (147')$$

Camada limite turbulenta, com lei de velocidades parabólicas (parábola de grau  $\frac{1}{m}$ )

Figura 16



Distribuição das velocidades médias na camada limite turbulenta, segundo a parábola de grau  $1/m$ .

me laminar, à qual corresponde, como já foi visto, uma variação de velocidades correspondente a uma parábola de  $2^{\text{º}}$  grau, substituível por uma reta, dada sua pequena espessura.

Como a lei das velocidades não é válida nas imediações do contorno, como no regime turbulento não é aplicável à expressão

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} ,$$

recorre-se a resultados experimentais:

$$\tau_0 = \frac{c}{V_0 \delta^{1/m}} \cdot \rho \frac{V_0^2}{2} \quad (150)$$

$$V_0 = \left[ \left( \frac{2}{c} \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{n}{2n-1}} \left( \frac{l}{\delta} \right)^{\frac{1}{2n-1}} \right] \delta^{\frac{1}{2n-1}} \quad (149')$$

Usando um método análogo ao utilizado para o cálculo de grandezas relativas à camada limite laminar, e admitindo:

$$\frac{u}{V_0} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (149)$$

e utilizando-se o teorema da quantidade de movimento, pode calcular-se  $\tau_0$ .

Esta equação não pode, porém, representar o movimento nas imediações do contorno onde existe uma subcamada em regi

De (149):

$$V_o = \left[ \frac{u}{y^{1/m}} \right] \delta^{\frac{1}{m}}$$

Para que haja compatibilidade entre (149) e (149'), deveremos ter:

$$m = 2n - 1 \quad (150')$$

Aplicando-se o teorema da quantidade de movimento, calcula-se  $\tau_0$  e compara-se com (150); pode obter-se a lei de variação de  $\delta$ .

Resulta um coeficiente local de atrito  $c_a$

$$c_a = \frac{c}{\left( \frac{V_o \delta}{\gamma} \right)^{1/n}} \quad (151)$$

$\delta$  = espessura da camada limite =

$$\delta = \left[ \frac{c (n+1)(2n+1)}{2n-1} \right]^{\frac{1}{1+n}} \cdot x \left( \frac{V_o x}{\gamma} \right)^{-\frac{1}{1+n}} \quad (152)$$

Na prática, para números de Reynolds compreendidos entre  $5 \cdot 10^5$  e  $10^7$  se encontra uma lei de velocidades de expoente, aproximadamente  $1/7$ , resultando então:

$$\left. \begin{array}{l} m = 7 \quad \text{equação (150')} \\ n = 4 \\ \delta^* = \frac{\delta}{8} \end{array} \right\} \quad (153)$$

Para um coeficiente experimental  $c = 0,045$ , resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{u}{V_o} = \left( \frac{V}{\delta} \right)^{1/7} \\ \delta = 0,37 \times R_x^{-1/5} \\ c_a = 0,0592 R_x^{-1/5} \\ c_a = 0,074 R_x^{-1/5} \end{array} \right\} \quad (154)$$

Na sub-camada laminar, pode considerar-se uma

distribuição linear das velocidades dada por:

$$\frac{u}{y} = \frac{\tau_0}{\mu} \quad (155)$$

O ponto de intersecção desta reta com a curva de velocidades adotada

$$\left[ \frac{u}{V_0} = \left( \frac{y}{\delta_L} \right)^{1/7} \right]$$

define a espessura  $\delta_L$  desta sub-camada laminar.

Resulta, finalmente, que é constante o número de Reynolds de viscosidade no bordo da sub-camada limitante laminar:

$$\frac{\delta_L V_*}{\nu} = 12,5 = \mathcal{R}_* \quad (156)$$

em que:

$$V_* = \text{velocidade de atrito} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (157)$$

### III.1.4 - Hipóteses admitidas no estudo dos escoamentos livres permanentes e uniformes.

#### A equação de Chézy.

Entendemos ser de alto interesse no desenvolvimento de nossa pesquisa, dar ênfase ao conjunto de hipóteses formuladas, para se chegar à fórmula de Chézy que permite o dimensionamento de condutos de água, com escoamento livre. Examinaremos, em continuação, alguns escoamentos em canais que se afastam de algumas dessas hipóteses.

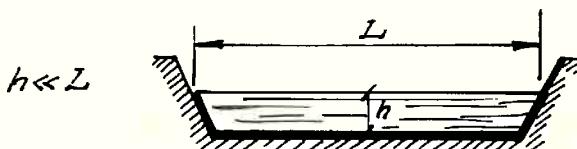
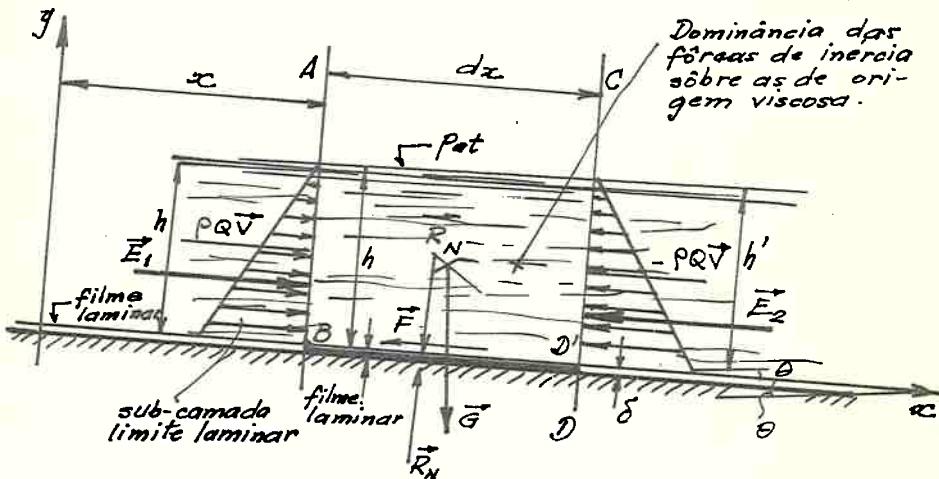
Inicialmente consideraremos:

- a) canal de secção prismática, larga em relação à altura de água
- b) declividade constante (do leito do canal)
- c) eixo retilíneo
- d) rugosidade uniforme do leito e das paredes, quanto ao diâmetro equivalente e densidade de distribuição
- e) alimentação tranqüila
- f) baixa turbulência, no escoamento, não ocasionando ondulações na superfície livre que se apresenta bem definida
- g) o ar é arrastado pela corrente líquida, através de um mecanismo semelhante ao de uma bomba de efeito viscoso

- h) a tensão de cisalhamento, no contorno da camada limite laminar, é constante em todo o perímetro molhado
  - i) a tensão de cisalhamento é nula, na superfície livre (de contato da corrente líquida com o ar envolvente)
  - j) as velocidades uniformemente distribuídas nas secções e normais às secções (as velocidades do movimento médio)
  - k) a velocidade média  $V$  do movimento médio, numa secção transversal qualquer do escoamento livre, é constante, em relação a qualquer outra secção transversal do escoamento
  - l) o trecho considerado em escoamento uniforme deve ser tal que suas extremidades estejam suficientemente afastadas de singularidades.

Com base nas hipóteses apresentadas, aplicemos o teorema do momentum a um volume da corrente compreendido por:

Figura 17



sub-camada limite  
laminar da parede  
lateral

Secção AB, Secção CD, superfície livre AC e contorno da sub-camada limite laminar B'D'.

Como o movimento médio é permanente e uniforme e como a secção é constante, na forma, pela equação da continuidade aplicada às correntes fluidas incompressíveis temos:

$$Q = S_1 V_1 = S_2 V_2 = SV \quad (158)$$

Esta equação é um caso particular da equação geral da continuidade aplicada aos tubos de corrente:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = 0 \quad (159)$$

que, para fluidos incompressíveis,  $\rho(p) = \text{constante}$ , toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (160)$$

Quando o movimento for permanente,  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$  e então a equação (160) fica:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial Q}{\partial s} ds = 0$$

Como  $Q = Q(s)$ , pois o movimento é permanente, resulta então:

$$\frac{dQ}{ds} ds = 0 \quad \therefore \quad dQ = 0 \quad \{ \quad Q = \text{constante} \quad (158')$$

Da equação (158') resulta pois

$$[h = h'] \quad (161)$$

O teorema do momentum aplicado a movimentos médios permanentes  $[\vec{L} = 0]$  apresenta-se sob a forma já vista:

$$\vec{G} + \vec{P} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0$$

sendo:  $\vec{P} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{F} - \vec{R}_N$ ,

pois a ação da pressão atmosférica sobre a superfície livre é nula, considerando-se o domínio das pressões relativas, neste escoamento.

A força  $\vec{F}$  representa a ação viscosa exercida

da pelo fluido da sub-camada limite laminar sobre o trecho de corrente em estudo;  $F$  tem a seguinte expressão:

$$F = \iint \chi \, ds \, dx \quad (162)$$

$\tau_0$  pode variar ao longo do perímetro molhado  $\chi$ ; considerando-se constante segundo a hipótese, temos:

$$\begin{aligned} F &= \tau_0 \chi \, dx = \\ &= C_f \cdot \rho \frac{V^2}{2} \chi \, dx \quad (163) \end{aligned}$$

em que:

$C_f$  é o coeficiente médio de atrito, na camada limite laminar, que de acordo com as equações de Blasius, já vistas, é igual a:

$$C_f = \frac{1,32824}{\sqrt{R_L}}$$

$$R_L = \frac{V_0 L}{\nu}$$

$$L = dx$$

$\rho$  = massa específica da água.

$\vec{R}_N$  representa a reação normal da sub-camada limite laminar sobre a corrente em escoamento.

Projetando-se o teorema do momentum no eixo dos  $xs$ , resulta:

$$G \sin \theta + E_1 - E_2 - F = 0 \quad (164)$$

mas:

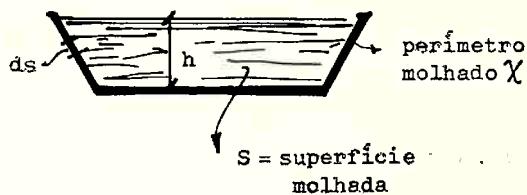
$E_1 = \gamma S_1 Z_{G1}$  ; como as secções têm mesma forma, mesma área e mesma altura, resulta:

$$E_2 = \gamma S_2 Z_{G2}$$

$$Z_{G1} = Z_{G2}$$

e consequentemente:  $E_1 = E_2$ .

Figura 18



Logo a equação do momentum projetada em x fic ca:

$$G \sin \theta - F = 0 \quad \therefore \quad G \sin \theta - C_f \cdot \rho \frac{V^2}{2} \chi dx = 0 \quad (165)$$

Na figura:

$$G \sin \theta = S \cdot \rho g \cdot dx \cdot \sin \theta \quad (166)$$

Considerando-se as equações (165) e (166), temos:

$$S \cdot \rho g \cdot dx \cdot \sin \theta = C_f \cdot \rho \frac{V^2}{2} \chi dx$$
$$\sin \theta = \frac{C_f V^2}{2 g R_H} \approx \operatorname{tg} \theta = i \quad (167)$$

para ângulos pequenos.

Definamos raio hidráulico da secção S do escoamento livre por:

$$R_H = \frac{S}{\chi}$$
$$i = \frac{C_f}{R_H} \cdot \frac{V^2}{2 g} \quad (167')$$

Aplicemos a fórmula de Bernoulli generalizada, que traduz o princípio da conservação da energia mecânica, num escoamento fluido, para um movimento qualquer:

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{V^2}{2} \right) dw + \iint_S \left( \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gh \right) V_n ds = W \quad (168)$$

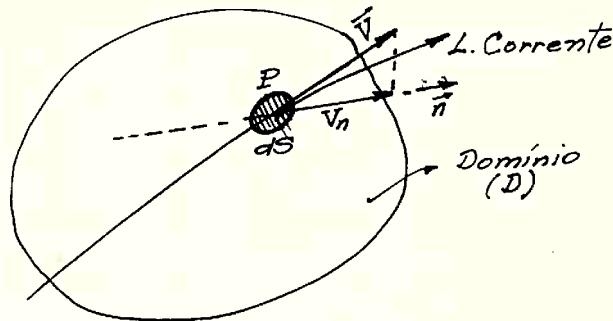
O fluido incompressível está contido num domínio (D), limitado pela superfície S.

ds = superfície elementar contida em S  
V<sub>n</sub> é a projeção de V sobre a normal à superfície (positivamente contada para fora)

W é a potência mecânica fornecida ao fluido no domínio (D) por superfícies sólidas móveis, completamente banhadas pelo fluido contido em (D)

Se o fluido fornecer energia mecânica às su-

Figura 19



perfícies  $W$  é  $< 0$ ;  $W$  também é  $< 0$  se uma parte dessa energia desaparece por atrito ou turbulência.

A expressão

$$(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g h) V_n dS$$

é a vazão de energia mecânica através de  $dS$ .

Se o movimento for permanente, deveremos, então, ter:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{V^2}{2} \right] = 0,$$

e a fórmula de Bernoulli fica:

$$\iint_{(S)} \left[ \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g h \right] V_n dS = W \quad (169)$$

Estendendo a equação (169) ao tubo de corrente em estudo, no canal, entre as secções AB e CD, levando-se em conta uma das hipóteses formuladas que o ar é deslocado superficialmente pela corrente líquida de forma análoga à do funcionamento de uma bomba de efeito viscoso e que o ar tem viscosidade muito baixa em relação à água, e desprezando-se a energia superficial consumida pela corrente líquida para deslocar as camadas de ar adjacentes, resulta:

$$W_e - W_s = W_{a,t} \quad (170)$$

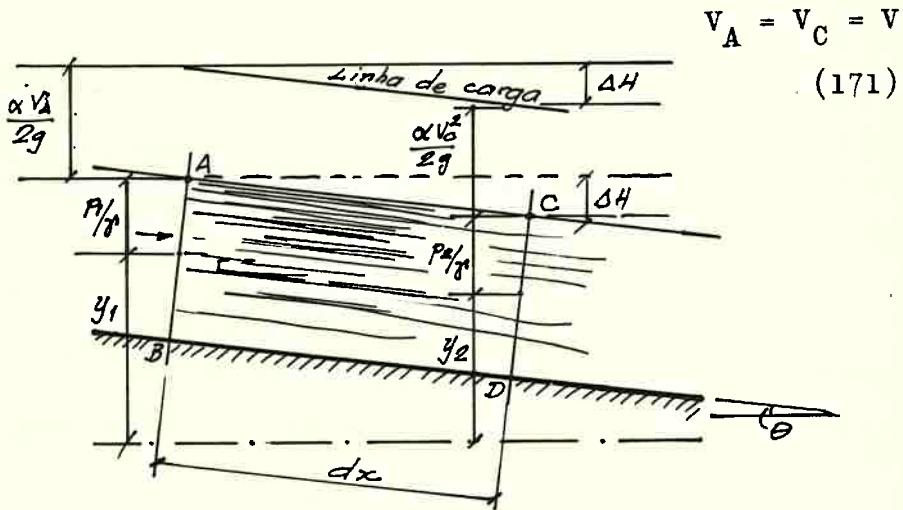
em que:

$W_e$  = vazão de energia mecânica que entra no tubo de corrente em AB

$W_s$  = vazão de energia mecânica que sai do tubo de corrente através de CD

$W_{at}$  = vazão de energia mecânica consumida no interior do tubo de corrente para vencer o atrito ou a turbulência.

Figura 20



Temos, pois, que as cargas totais em  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  (referentes à unidade de peso do fluido em escoamento, por segundo) são respectivamente:

$$H_{AB} = y_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} \quad (172)$$

$$H_{CD} = y_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} \quad (173)$$

Temos, pois, que a perda de carga que se verifica entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , por atrito junto à sub-camada limite laminar, é:

$$\begin{aligned} \Delta H &= H_{AB} - H_{CD} = \left( y_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( y_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \\ &= dx \operatorname{sen} \theta \approx dx i \end{aligned} \quad (174)$$

Partindo-se, agora, da fórmula universal de perda de carga, segundo a qual:

$$\Delta H = f \cdot \frac{dx}{D_H} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (175)$$

em que:  $D_H = 4 R_H$  (por definição)

$f$  = coeficiente adimensional de perda de carga,

e levando-se em conta, a partir da Análise Dimensional, que, dentro das hipóteses formuladas,  $f$  é função de dois adimensionais:

$$\frac{e}{D_H} \quad \text{rugosidade relativa}$$

$$R = \frac{V D_H}{\nu} \quad (\text{número de Reynolds}),$$

temos, pois:

$$\frac{\Delta H}{dx} = \operatorname{sen} \theta \approx i = \frac{f}{D_H} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (176)$$

Comparando-se (176) com (167') vista anteriormente, a saber,

$$i = \frac{C_f}{R_H} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

e:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{C_f}} \sqrt{R_H i}$$

Fazendo-se

$$\sqrt{\frac{2g}{C_f}} = C \quad (\text{coeficiente de Chézy})$$

resulta:

$$V = C \sqrt{R_H i} \quad (177)$$

Da equação (176) resulta:

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_H i} \quad (176')$$

Comparando-se (177) e (176'), inferimos que:

$$C = \text{coeficiente de Chézy} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (178)$$

Calculemos, finalmente, a vazão em volume, através de uma secção qualquer transversal do escoamento em estudo.

Pela equação da continuidade, aplicada a tubos de corrente de fluidos incompressíveis, em regime permanente, temos:

$$Q = S V = C S \sqrt{R_H i} \quad (179)$$

Pela equação (178), o coeficiente de Chézy é igual a:

$$\sqrt{\frac{8 g}{f}} = \sqrt{8 g} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (180)$$

Utilizemos, pois, o diagrama de Moody, para condutos cujas paredes apresentam uma rugosidade obtida industrialmente e que se afasta da rugosidade uniforme definida por Nikuradse, em que o índice  $K$  representa o diâmetro do grão de areia uniforme utilizado por Nikuradse.

Nas paredes e no leito do canal a rugosidade é formada por numerosos grãos, de tamanhos distintos, que ficam, em parte, cobertos pela sub-camada limite laminar e parte a penetram, constituindo focos de turbulência na corrente em escoamento; a intuição mostra que o efeito da rugosidade, neste caso, atua de forma mais progressiva do que no caso da granulometria uniforme e a curva representativa, figura 21, indica um tracado mais suave de concordância do que no caso da rugosidade uniforme. No trecho de escoamento turbulento rugoso em que a influência do número de Reynolds não se faz mais sentir (forças de inércia dominantes em relação às viscosas), usaremos a equação de Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{K} + 1,14 \quad (181)$$

Geralmente, no escoamento em canais segundo as hipóteses formuladas, é este o tipo de regime dominante.

Se, porém, o escoamento for turbulento liso, a equação de Karman-Prandtl apresenta-se sob a seguinte forma:

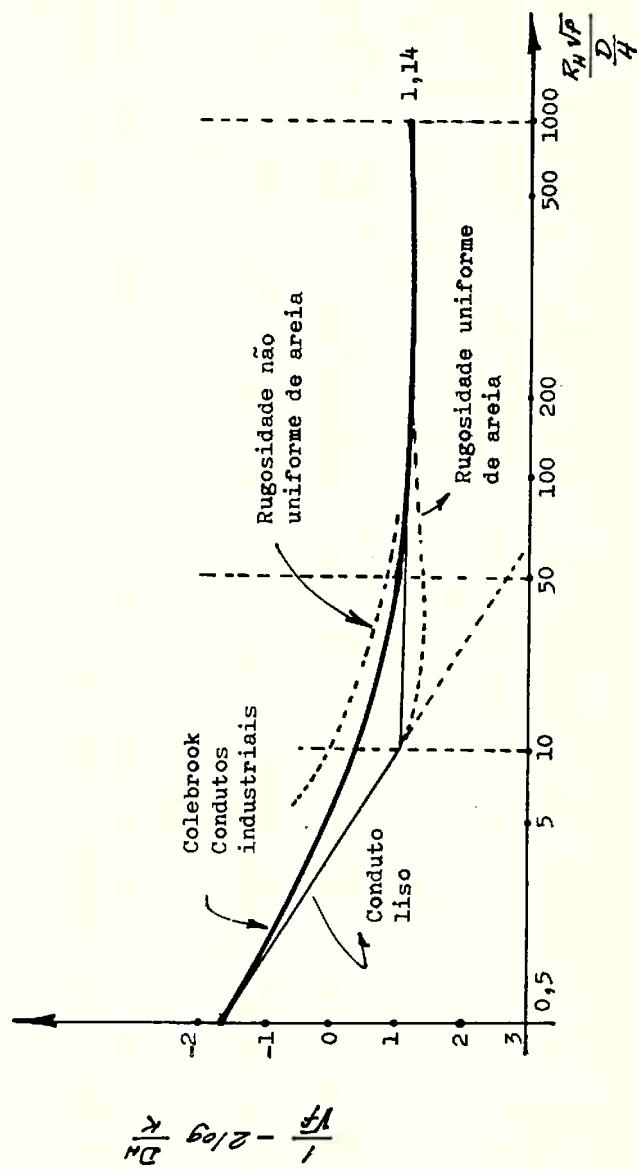


Figura 21

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log [R \sqrt{f}] - 0,8 \quad (182)$$

III.2 - Distribuição de velocidades, no escoamento permanente médio, uniforme

III.2.1 - Movimento turbulento em condutos lisos

São os condutos em que a distribuição de velocidade é portanto os valores da tensão de viscosidade são independentes de  $k$  (rugosidade equivalente do conduto).

A experiência mostra que, em regime uniforme, pode admitir-se a existência de uma lei de distribuição de velocidade idêntica à da camada limite turbulenta sobre uma placa plana, já vista anteriormente, com presença de uma sub-camada laminar, podendo adotar-se, com rigor suficiente, parábola do tipo:

$$\frac{u}{U} = \left( \frac{y}{r} \right)^{1/m} \quad (183)$$

em que:

$U$  é a velocidade no eixo do conduto

$r$  é o raio do conduto

$y$  é a distância à parede.

O expoente  $m$  varia com o número de Reynolds do escoamento:

$$R = 4 \times 10^3 \quad m = 6,0$$

$$R = 2,3 \times 10^4 \quad m = 6,6$$

$$R = 1,1 \times 10^5 \quad m = 7,0$$

$$R = 1,1 \times 10^6 \quad m = 8,8$$

$$R = 2,0 \times 10^6 \quad m = 10,0$$

$$R = 3,2 \times 10^6 \quad m = 10,0$$

Para turbulência plena, com altos valores de  $m$ , temos:

$$\frac{u}{V_*} = \alpha \left[ \log \frac{V_* y}{\gamma} - \log \beta \right] \quad (184)$$

$\alpha$  e  $\beta$  são constantes, de determinação experimental.

Figura 22

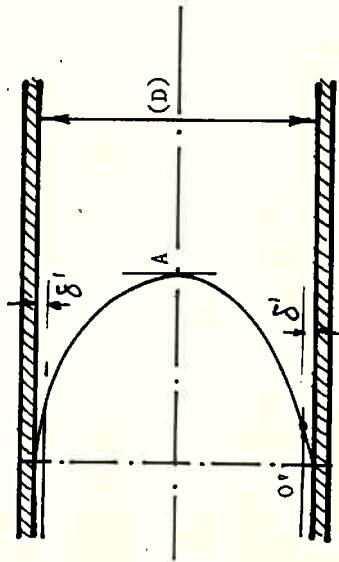
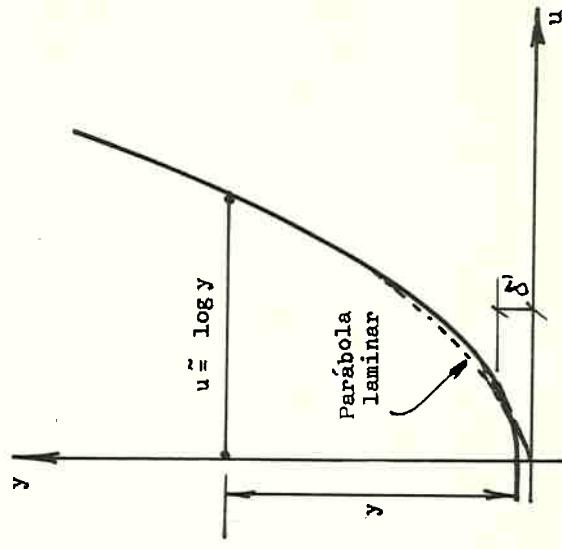


Figura 23



Distribuição logarítmica das velocidades num conduto circular

Ajustagem da lei logarítmica

Logo, a expressão característica dos condutos lisos, em regime turbulento (determinação experimental das constantes):

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \log \frac{V_* y}{\gamma} + 5,5 \quad (185)$$

$\delta'$  espessura da sub-camada limite laminar é:

(fig. 23)  $\delta' = \frac{11,6 \sqrt{\gamma}}{V_*} \quad (186)$

Na região central, a distribuição de velocidade não depende da natureza das paredes.  $U_{\max}$  é a velocidade máxima atingida no centro. Logo:

$$\frac{U_{\max} - U}{U_*} = g \left[ \frac{y}{2 r_0} \right] \quad (187)$$

### III.2.2 - Movimento turbulento em condutos rugosos

É o movimento de fluido em que as asperezas das paredes e do leito têm altura ultrapassando a espessura  $\delta'$  da sub-camada limite laminar, provocando turbulência adicional; a tubulação é considerada hidráulicamente rugosa.

Esta condição é satisfeita para:

$$R_r = \frac{k U_*}{\gamma} > 5 \quad (188)$$

$R_r$  é o número de Reynolds da rugosidade.

Examinemos a equação das velocidades em duas regiões.

a) Nas vizinhanças da parede

a.1  $5 < \frac{K U_*}{\gamma} < 70$

$$\frac{U}{U_*} = f \left[ \frac{y U_*}{\gamma} \text{ e } \frac{y}{K} \right]$$

$$\frac{U}{U_*} = 4,9 + 5,65 \log \frac{y U_*}{\gamma} - h \left( k \frac{U_*}{\gamma} \right) \quad (189)$$

em que a função  $h \left( \frac{K U_*}{\gamma} \right)$  depende das formas das rugosidades.

a. 2

$$\frac{k U_*}{\gamma} > 70 ,$$

a distribuição de velocidades não depende mais da viscosidade (não dependendo, consequentemente, do número de Reynolds); o conduto comporta-se como hidráulicamente rugoso

$$\frac{u}{U_*} = 5,65 \log \frac{y}{k} + 8 \quad (190)$$

b) Na região central do escoamento, a distribuição de velocidades é a mesma da que a existente num conduto hidráulicamente liso:

$$\frac{U_{\max} - U}{U_*} = g \left( \frac{y}{D} \right) = g \left( \frac{y}{2 r_o} \right) \quad (187)$$

ou para  $\frac{y}{r_o} > 0,2$  verifica-se a lei parabólica:

$$\frac{U_{\max} - U}{U_*} = 7 \left( 1 - \frac{y}{r_o} \right)^2 = 7 \left( \frac{r}{r_o} \right)^2 \quad (187')$$

$r$  é a distância do ponto considerado contada do centro do conduto.

### III.2.3 - Perdas de carga em condutos não circulares

a) Coeficiente de perda de carga

$R$ , número de Reynolds do escoamento é definido a partir do diâmetro hidráulico  $D_H$

$$D_H = 4 R_H = 4 \frac{S}{\chi} \quad \therefore \quad R = \frac{U D_H}{\gamma} \quad (191)$$

e a fórmula de perda de carga é:

$$H = f \cdot \frac{L}{D_H} \cdot \frac{U^2}{2 g} \quad (192)$$

com:  $f = 4 C_f$

$C_f$  = coeficiente médio de atrito na camada limite laminar

Em escoamento laminar, tem-se:

$$f = \frac{B}{R} \quad (193)$$

em que o coeficiente  $B$  depende da forma do conduto.

Para escoamentos laminares, o valor de  $B$  pode ser determinado teóricamente - Lorenz G. Straub, Edward Silberman e Herbert C. Nelson - Open Channel Flow at Small Reynolds Numbers, Trans. Am. Soc. of Civil Engineers, vol. 123.

Ven-Te-Chow indica os seguintes valores, obtidos através das experiências realizadas na Universidade de Minnesota: - Canais retangulares -  $B \approx 24$

Canais triangulares de de  $30^\circ$  até  $150^\circ$  de ângulo no vértice -  $B \approx 14$

b) Distribuição de velocidades, numa secção reta

Num conduto cilíndrico, em regime de plena turbulência, as velocidades médias são praticamente paralelas às paredes do conduto. As correntes secundárias, se existirem, introduzem fracas inclinações às velocidades médias, paralelas às paredes do canal.

Numa secção reta traçam-se as curvas de igual velocidade e, se contarmos a distância  $y$  segundo as curvas  $C$  que lhe são ortogonais, obtemos os mesmos resultados do que os obtidos na distribuição das velocidades, num conduto circular. (Comolet: Mecanique Experimentale des Fluides).

Para  $\frac{K U_*}{\sqrt{y}} > 70$ ,

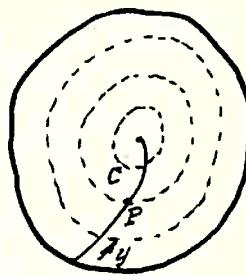
a partir de uma determinada distância da parede, tem-se que:

$$\frac{U_{max} - U}{U_*} = A + 5,6 \log \frac{y}{y_0} \quad (194)$$

$U_{max}$  é a velocidade máxima atingida sobre a curva C à distância  $y_0$  e A uma constante que depende da forma da secção e da curva C.

III.3 - Influência da forma num escoamento livre

Figura 24



III.3.1 - Equação geral de  $\tau_0$

Na indicação já feita das hipóteses admitidas no estudo dos escoamentos livres, permanentes e uniformes, item h, foi admitido que a tensão de cisalhamento no contorno da sub-camada limite laminar era constante, ao longo de todo o perímetro molhado do canal; variando o movimento, vejamos como varia  $\tau_0$ .

Sabe-se atualmente, que a intensidade média da tensão tangencial viscosa, na subcamada limite laminar, é função das seguintes variáveis:

$$\tau_0 = \varphi [h, V, \text{forma}, k, \rho, \gamma \text{ e } \mu] \quad (195)$$

$h$  é a profundidade da água no canal

$V$  é a velocidade média de escoamento na secção transversal do canal

$k$  a medida linear da rugosidade do leito

$\rho$  a massa específica do líquido (água)

$\gamma$  o peso específico do líquido (água)

$\mu$  a viscosidade dinâmica da água.

Da Análise Dimensional resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{\rho V^2} &= \varphi \left[ \frac{V}{\mu} \frac{h}{\rho}, \text{forma}, \frac{V}{\sqrt{h g}} \right] \\ \frac{\tau_0}{\rho V^2} &= \varphi \left[ R, \frac{k}{h}, \text{forma}, \frac{V}{\sqrt{g h}} \right] \\ \frac{\tau_0}{\rho V^2} &= \varphi \left[ R, \frac{k}{h}, \text{forma}, F \right] \end{aligned} \quad (196)$$

Entrando com a condição já apresentada, de equilíbrio da componente do peso do líquido na direção do movimento, com a resistência viscosa na sub-camada limite laminar, resulta:

$$\tau_0 \chi dx = \gamma S dx \cdot i \quad \therefore \quad \tau_0 = \gamma R_H i \quad (197)$$

$$\frac{\Delta H}{L} = i = \frac{f}{D_H} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (198)$$

$$V = C \sqrt{R_H i} \quad (198')$$

$$\frac{\tau_0}{\rho V^2} = \frac{f}{8} = \frac{g}{C^2} \quad (199)$$

Combinando-se (196) e (199):

$$\frac{g}{C^2} = \varphi [R, \frac{k}{h}, \text{forma, } F] \quad (200)$$

Apesar de não ser ainda formulada equação completa relativa à relação (200), parece claro que  $f$  (coeficiente de perda de carga e consequentemente  $C$  (coeficiente de Chezy) seja função de  $R$ , da rugosidade relativa  $k/h$  e da forma da secção.

Na Literatura, as indicações que aparecem sobre a influência do campo gravitacional se referem a números de Froude superiores à unidade; este fenômeno de influência do campo gravitacional é ligado, por exemplo, a:

- Instabilidade superficial que dá origem às "roll waves" em canais de escoamento super-rápido
- Formação de ressaltos superficiais
- Formação de ondas superficiais de Froude.

O estudo da estabilidade de escoamento num canal aberto faz-se de forma análoga à de um escoamento em conduto forçado; supondo-se que apareça uma perturbação periódica, de fraca amplitude, verifica-se, a partir das equações do movimento, se esta perturbação é amortecida ou ampliada. Enquanto que, num escoamento forçado, um aumento de perturbação provoca um aumento de turbulência, nos escoamentos a superfície livre um aumento de perturbação corresponde ao desenvolvimento de

ondas progressivas. Nas experiências feitas recentemente na Universidade de Iowa ficou evidente que, não só o papel desempenhado pela gravidade na perda de carga nos canais abertos é ligado à estabilidade intrínseca da superfície livre correspondente a  $F$  elevados, mas ainda, durante as primeiras fases da formação das "roll waves", o valor da correspondente perda de carga pode ser avaliado por meio de uma modificação da relação muito conhecida que permite calcular a perda de carga num canal aberto, em regime permanente e uniforme.

### III.3.2 - Correntes secundárias

Um aspeto do problema da influência da forma da secção no coeficiente de Chézy que focalizaremos é o correspondente às correntes secundárias que aparecem nas regiões caracterizadas por mudanças descontínuas de direção do leito do canal, na secção transversal do mesmo.

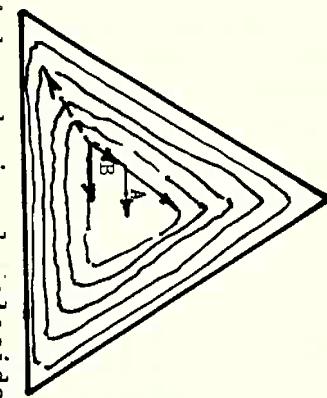
Quando um conduto for perfeitamente simétrico, as características de simetria do escoamento só são alteradas por flutuações turbulentas ou por fenômenos oriundos de efeitos da camada limite que ocasionam a formação de perturbações periódicas ou pseudo-periódicas (ex. as esteiras de Von Karman).

Quando o conduto, porém, não for simétrico (como simétricos são o circular ou o retangular, muito largo), produzem-se movimentos em planos normais ao movimento axial do canal. O movimento é consequentemente tridimensional e se realiza segundo linhas de correntes helicoidais que, em geral, afetam o movimento das partículas fluidas em movimento.

Consideremos duas secções transversais, uma retangular e outra triangular, de um canal em escoamento, e indiquemos, esquematicamente, as curvas de igual velocidade.

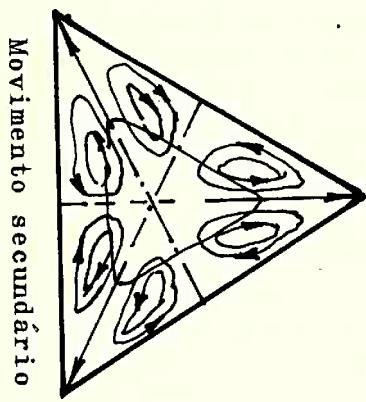
Na secção triangular, por exemplo, aparece um movimento secundário que aproxima as partículas fluidas do vértice, segundo a bissetriz e afasta as partículas do vértice junto aos lados. Pode explicar-se tal fenômeno pela distribuição das tensões tangenciais.

Figura 25



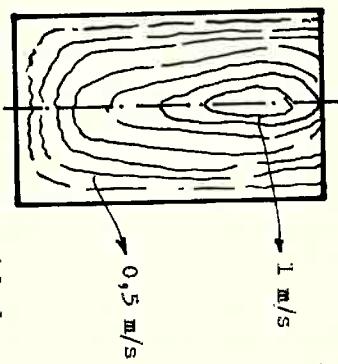
Linhas de igual velocidade

Figura 26



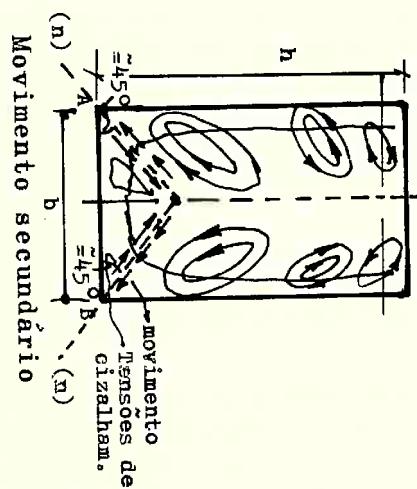
Movimento secundário

Figura 27



Linhas de igual velocidade

Figura 27



Movimento secundário

No ponto A, por exemplo, as tensões de Reynolds originadas pelas três componentes da flutuação de velocidades (longitudinal, radial e tangencial) estão em equilíbrio pela simetria.

Porém, no ponto B dão uma resultante que impulsiona o fluido para o contorno, dando origem, assim, ao movimento helicoidal, já descrito.

As tensões que agirão, numa superfície elemental colocada no ponto B, no plano da figura e perpendicular ao eixo dos  $x_s$ , serão pois:

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}'^2 \quad (201)$$

$$\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}' \bar{v}' \quad \tau_{zx} = \bar{\tau}_{zx} - \rho \bar{w}' \bar{u}'$$

$$\tau_{yz} = \bar{\tau}_{yz} - \rho \bar{v}' \bar{w}' \quad (202)$$

em que  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\tau}$  são as tensões normais e tangenciais do movimento médio e  $\rho \bar{u}' \bar{v}' \dots \rho \bar{u}'^2$  são as tensões de Reynolds.

Este fato explica que, nos canais abertos, junto às paredes, apareçam movimentos com vórtices e que o ponto de máxima velocidade se encontre abaixo da superfície livre (fig. 27).

No caso de condutos circulares, com distribuição regular de rugosidade, as linhas de igual velocidade são circulares, não ocorrendo assim variações de curvatura e consequentemente não ocorrendo a tensão normal à linha de velocidade constante; não se produzem, pois, movimentos secundários.

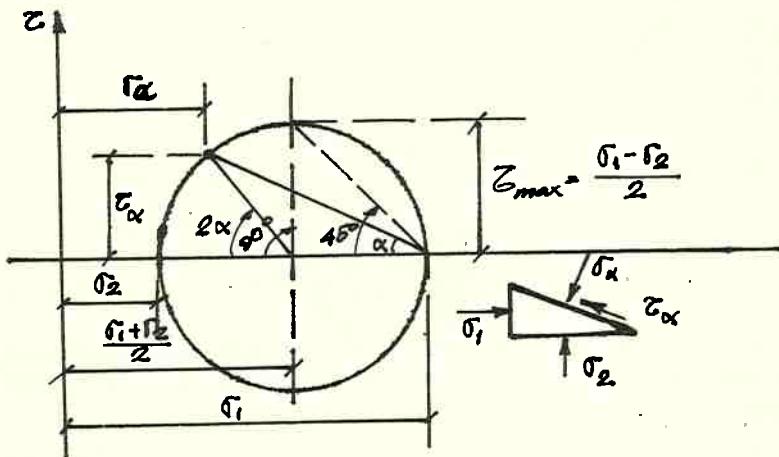
Nos condutos retangulares, muito largos, na parte central do escoamento também não se verificarão tais movimentos, pois as linhas de igual velocidade apresentam também curvatura constante.

Observação: no caso dos canais de secção transversal retangular (fig. 28), as linhas de igual velocidade próximas às paredes e fundo formam figuras planas que se aproximam de retângulos; logo, a partir do teorema de Cauchy ou do tetraedro, em planos a  $45^\circ$  com o plano de tensões de compressão principais, verificam-se só tensões de cisalhamento, que são máximas. Consi-

derando-se um estado duplo de tensões, podemos recorrer à representação através do círculo de Mohr.

$\sigma_1$       tensões normais de compressão  $> 0$   
 $\sigma_2$

Figura 29



Ora, maiores tensões de cisalhamento significam mais elevadas variações de velocidades, ao longo desse plano, o que explica o fenômeno (altos gradientes de velocidade)

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \quad (203)$$

As correntes secundárias transportam, continuamente, "momentum" do centro do escoamento para os cantos, gerando aí altas velocidades - segundo Schlichting H.

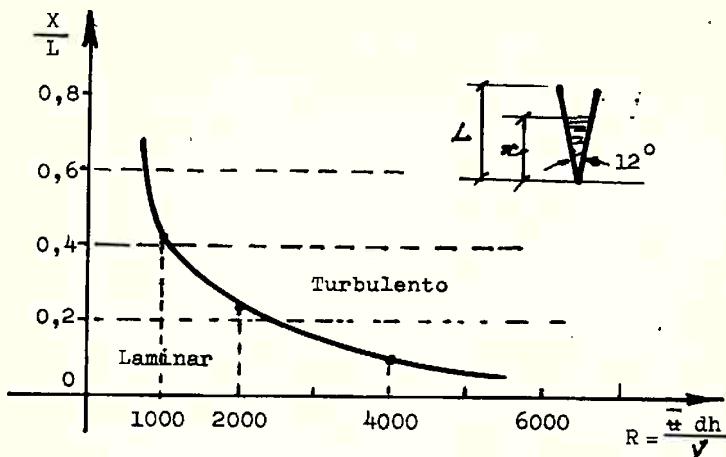
Quando a seção transversal de um canal contém uma região estreita, não deve ocorrer simultaneamente a transição do regime laminar para o turbulento em todo o escoamento.

Ex.: para  $R \approx 1000$ , o escoamento é laminar em cerca de 40% da altura do triângulo.

~~Escola de Engenharia de São Paulo~~  
Eduardo

F-3818

Figura 30



Experiência de E.R.G. Eckert e T.E. Irvine.

Conclusão deste item: Achamos que a existência de secções transversais de canais, em regime permanente e uniforme, com bruscas variações de direção no leito, dando origem às correntes secundárias citadas, introduz descontinuidades no mecanismo de atrito viscoso junto às paredes nessas regiões de descontinuidade; parece-nos que, nessas regiões consideram-se  $\tau_0$  constante tem muito sentido.

Nos estudos realizados e publicados recentemente sobre projetos mais convenientes de secções transversais de canais, visando evitar a formação de ondas, procura-se evitar tais descontinuidades, através de curvas de concordância adequadas, como veremos oportunamente.

### III.3.3 - Influência das paredes laterais no escoamento turbulento, num canal retangular, em escoamento permanente e uniforme

Num canal retangular, a relação entre a altura de água e a largura do mesmo é um adimensional importante, pois revela em que grau a turbulência provocada pela rugosidade das paredes laterais alcança a corrente fluida, na parte central do canal. Nos estudos de Miki Hino, de fato, aparece que

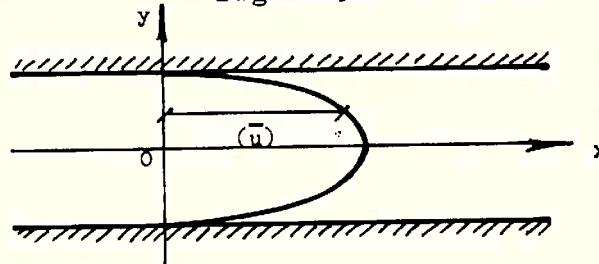
$$\frac{L}{h} = f \left( \frac{y}{h} \right)$$

em que:  $L$  é a macro-escala de turbulência  
 $h$  é a altura de água  
 $y$  é a distância da parede ao ponto considerado

Observação: No estudo que estamos fazendo, em que a turbulência considerada é a provocada pela parede e não pelo fundo, realizaríamos ensaios experimentais para verificar se, devido à simetria do escoamento em relação a um plano paralelo às paredes passando pelo centro do canal, a grandeza  $h$  seria considerada até esse plano.

Quanto à variação da tensão tangencial, utilizaremos as equações de Reynolds para o caso do movimento permanente que se estabelece entre dois contornos paralelos. Imaginamos que o movimento médio depende unicamente de  $y$ , sendo a velocidade média paralela ao eixo dos  $x$ :

Figura 31



$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \rho \frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}')} {\partial y} &= 0 & a) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = - \rho \frac{\partial (\bar{v}'^2)}{\partial y} & & b) \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Derivando b em relação a x:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) = - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} \right) \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) = - \rho \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial x} \right)$$

mas:

$$\frac{\partial (\bar{v}'^2)}{\partial x} = 0$$

(Pois na hipótese o movimento médio só depende de  $y$ )

Logo:  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$  não depende de  $y$

Desprezando-se a força peso (supondo-se a velocidade média constante, ao longo de cada linha de corrente, e integrando a equação a) de (204):

$$\rho u'v' = -y \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\bar{u}}{y} + C \quad (205)$$

Esta equação permite determinar a tensão de Reynolds.

De (205)

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \bar{u}'v' = y \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + C$$

O 1º termo representa a tensão tangencial total  $\tau$ :

$$\tau = y \gamma J + C = y \gamma i + C \quad (206)$$

Achamos oportuno apresentar, agora, resumidamente, duas teorias da turbulência, a saber:

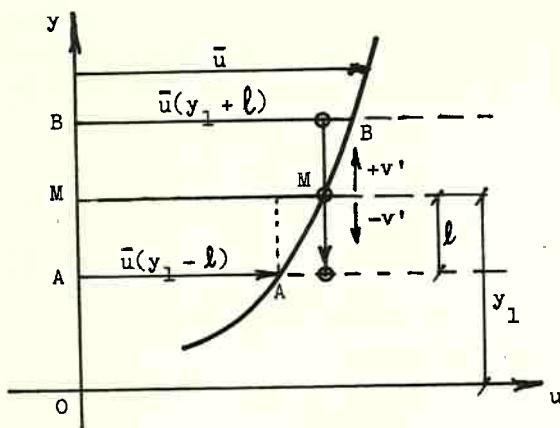
- a) Teoria do comprimento de mistura de Prandtl
- b) Teoria da semelhança de Karman.

a) Teoria do comprimento de mistura de Prandtl

Prandtl relacionou a tensão tangencial de Reynolds  $\rho u'v'$  com a velocidade média, fazendo-a depender do gradiente transversal da velocidade. Introduziu, com tal finalidade, um comprimento característico, "comprimento de mistura", conceito análogo ao percurso livre médio da teoria cinética dos gases.

Segundo Prandtl, considerando um movimento plano, paralelo ao eixo dos  $x$ s, em que a velocidade média só depende de  $y$  e em que as restantes componentes médias são nulas,  $[\bar{u} = \bar{u}(y), \bar{v} = 0 \text{ e } \bar{w} = 0]$ , supôs que devido ao movimento transversal de flutuação as partículas fluidas situadas numa linha de corrente  $AA$  se movem transversalmente de um comprimento  $\ell$ , transportando a sua quantidade de movimento  $\rho \bar{u}(y_1 - \ell)$  a outra linha de corrente  $MM$ . As partículas que saíndo de  $AA$  chegam a  $MM$  têm uma velocidade menor do que a que corresponde à linha de corrente  $MM$ ; a diferença de velo-

Figura 32



térmos de ordem superior à  $1^{\text{a}}$ ).

Analogamente, as partículas que provêm da linha de corrente BB chegam a MM com excesso de velocidade em relação à velocidade em MM, que pode ser expressa por:

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) = l \left( \frac{du}{dy} \right)_1 \quad (208)$$

Segundo Prandtl, esta diferença de velocidades é que dá origem à velocidade de flutuação  $u'$ .

Logo:

$$|u'| = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left( \frac{du}{dy} \right)_1 \quad (209)$$

O mecanismo do aparecimento da velocidade de flutuação transversal  $v'$  pode ser imaginado do seguinte modo:

Considerem-se duas partículas fluidas que, vindo das linhas AA e BB, chegam a MM, estando cada partícula animada de velocidade longitudinal  $u'$  dirigida em sentido contrário. As partículas se separam com velocidade relativa  $2 u'$ , deixando um espaço vazio que ocasiona, por continuidade, velocidades transversais de mesma ordem de grandeza que  $u'$ . Logo:

$$|v'| = \text{const.} \quad |u'| = \text{const.} \quad |l \left( \frac{du}{dy} \right)_1| \quad (210)$$

cidades, para  $l$  suficientemente pequeno, pode exprimir-se por:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \bar{u}(y_1) - \\ &- \bar{u}(y_1 - l) = \\ &= l \left( \frac{du}{dy} \right)_1 \quad (207) \end{aligned}$$

(desenvolvendo-se pela fórmula de Taylor e desprezando-se os

Consideremos o sinal das flutuações  $u'$  e  $v'$ : as partículas que passam de AA para MM são mais lentas e as que vêm de BB para MM mais rápidas; assim, para  $v' > 0$  corresponde  $u' < 0$  e reciprocamente; logo  $u'v'$  é negativo.

Teremos, pois:

$$\overline{u'v'} = - \ell^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \quad (211)$$

$\ell$  incluindo o coeficiente de proporcionalidade.

A tensão de Reynolds será:

$$\tau' = - \rho \overline{u'v'} = \rho \ell^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2 \quad (212)$$

$\tau'$  é  $> 0$  porque o perfil de velocidades é crescente

$$\frac{du}{dy} > 0 ; \text{ caso contrário } \tau' < 0$$

Teremos, pois:

$$\tau' = \rho \ell^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \quad (212')$$

O comprimento  $\ell$  de mistura não permanece constante; podem formular-se hipóteses a serem verificadas experimentalmente.

A mais simples, a de Prandtl, é a seguinte:

$$\ell = K y \quad (213)$$

Citemos a equação de Boussinesq:

$$\tau' = \mu \frac{d^2u}{dy^2} \quad (214)$$

Logo, comparando-se (212) e (214), teremos:

$$\mu = \rho \ell^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (215)$$

para a viscosidade cinemática resulta:

$$\varepsilon = \ell^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (216)$$

Observação: junto a contornos sólidos lisos,  $\lambda$  pode ser admitido nulo, pois a proximidade da parede impede o mecanismo. O termo  $\rho \lambda^2 \frac{du}{dy}$  tem a dimensão de uma viscosidade, mas se distingue por um valor muito mais elevado. Distingue-se também da viscosidade ordinária porque varia de um ponto a outro em geral, sendo nula junto à parede.

b) Teoria da semelhança de Karman

É possível exprimir a tensão de viscosidade em função de uma grandeza característica, cuja lei de variação é necessário conhecer em função da distância do contorno

$$\lambda = f(y) \quad (217)$$

A teoria de Karman apresenta uma relação entre comprimento de mistura e o perfil de velocidades. Através das experiências de Fritsch, verificou-se que as grandezas atuantes na totalidade do escoamento, como a vazão, e o diâmetro, não afetam a forma da parte central do diagrama das velocidades.

Só as grandezas locais, como as coordenadas do ponto e a tensão local de cisalhamento, atuam no diagrama das velocidades.

Como nada induz a admitir que a forma de atuar dessas grandezas, em locais diversos de u'a mesma secção, seja não semelhante, conclui-se que a atuação é semelhante. Tratando o problema dimensionalmente, podem tombar-se como grandezas características, as de comprimento e velocidade, utilizando-se, para unidade de comprimento, o comprimento de mistura  $\lambda$ , e a velocidade de atrito  $V_*$ .

Comparando-se as velocidades em dois pontos distintos de u'a mesma vertical e de ordenadas  $y$  e  $y_1$ , teremos:

$$\bar{u}(y) - \bar{u}(y_1) = (y - y_1) \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1 + \frac{1}{2} (y - y_1)^2 \left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)_1 + \dots \quad (218)$$

A diferença de velocidades do 1º membro de (218) não tem influência quanto às características turbulentas do sistema, visto que estas não se alteram se forem aumentadas ou diminuídas as velocidades médias

$\bar{u}(y)$  e  $\bar{u}(y_1)$  de um valor constante. Logo os termos contendo as derivadas do 2º membro de (218) é que devem exprimir, necessariamente, as propriedades turbulentas do movimento em estudo.

Karman considera o desenvolvimento de (218) no 2º termo e afirma que, dimensionalmente, a única associação possível, homogênea com um comprimento, é:

$$\frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}}, \text{ donde resulta:}$$

$$\ell = K \frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}} \quad (219)$$

$K$  é uma constante universal, determinada experimentalmente.

$\ell$  é, pois, independente da grandeza da velocidade, sendo só função da distribuição de velocidades.

A partir da teoria de semelhança de Von Karman chega-se à seguinte expressão da tensão de cisalhamento turbulento:

$$\tau = \rho \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (220)$$

que é idêntica à obtida por Prandtl, através da teoria do comprimento de mistura, como já foi visto.

As duas leis de atrito turbulento de Karman e de Prandtl são aplicáveis aos problemas de distribuição de velocidades, em canais retangulares.

Da lei de Prandtl se deduz a seguinte expressão de distribuição de velocidades

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{v_0} = \frac{1}{K} \ell_n \frac{h}{y}$$

em que  $y$  é a distância à parede.

Da lei de Von Karman chega-se a:

$$\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{v_{0*}} = - \frac{1}{K} \left\{ \ell_n \left( 1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right) + \sqrt{\frac{y}{h}} \right\} \quad (222)$$

em que  $y$  é a distância à linha de centro.

Verifica-se, pois, completa analogia entre as duas (Ver gráfico da fig. 33).

Conclusão: Como acabamos de ver através das duas leis clássicas de atrito turbulento de Karman e Prandtl, elas se aplicam a movimentos de fluidos considerando-se a troca de quantidade de movimento das diversas partículas fluidas em escoamento, da camada limite laminar do fundo até o eixo do conduto; explicam também as leis de distribuição de velocidades, nesses condutos. Para condutos retangulares, em que as paredes laterais estejam muito próximas (em relação à altura da água, no canal), fenômeno análogo de troca de quantidade de movimento se verifica entre as partículas fluidas em movimento, podendo acarretar modificações no diagrama de velocidades, considerado em relação ao fundo do canal.

Figura 33

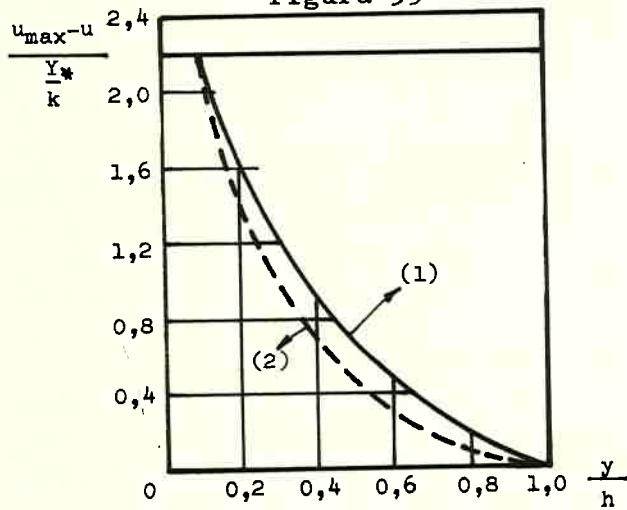


Gráfico (1) - Prandtl

Gráfico (2) - Karman

Segundo Schlichting, nos canais retangulares, para que se possa aplicar a teoria vista (Von Karman e Prandtl), é necessário que tenham uma largura  $2h$ .

III.3.4 - Influéncia do leito dum canal qualquer, não retangular, no escoamento turbulento, permanente e uniforme (influéncia de forma)

Variando, nesses canais, a altura de água  $h$  ao longo da secção transversal dos mesmos, podemos imaginar a complexidade do escoamento resultante, com a formaçao de descolamentos junto às rugosidades do leito e com percursos diferentes dos turbilhões formados até a superfície livre de água no canal; na região próxima às extremidades da secção transversal, há possibilidade, segundo acreditamos, de ocorrerem turbilhões de dimensões maiores (macroturbilhões) e na parte central da secção pode ocorrer a transformação dos macro em pequenos turbilhões, com sensível dissipação de energia, em forma de calor. Esta circunstância poderá acarretar instabilidade na superfície livre, contrariando, assim, uma das hipóteses formuladas no inicio deste capítulo para obtenção da equação de Chézy (item f, que diz: baixa turbuléncia no escoamento não ocasionando ondulações na superfície livre).

A partir dos estudos de Vedernikov, mencionados na Literatura, calculemos alguns dos valores do adimensional  $M$  (adimensional de forma)

$$[M = 1 - R \frac{dP}{dA}]$$

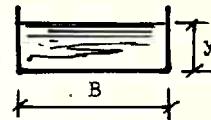
a) Canais retangulares, com  $B \geq 2 y$

Figura 34

$$A = \text{área molhada} = B y$$

$$P = \chi = \text{perímetro molhado} = B + 2 y$$

$$R = \text{raio hidráulico} = \frac{A}{\chi} = \frac{B y}{B + 2 y}$$



$$\therefore \frac{\frac{d\chi}{dy}}{\frac{dA}{dy}} = \frac{d\chi}{dA} = \frac{2}{B}$$

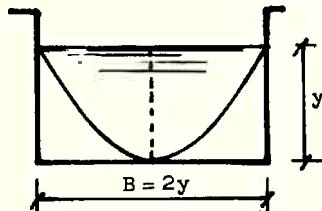
$$\therefore M = 1 - \frac{B y}{B + 2 y} \cdot \frac{2}{B} \quad \therefore M = 1 - \frac{2 y}{B + 2 y} \quad (223)$$

Casos particulares:

a.1 - Secção de mínimo custo:

Figura 35

$$M = \frac{1}{2} = 0,500 \quad (224)$$

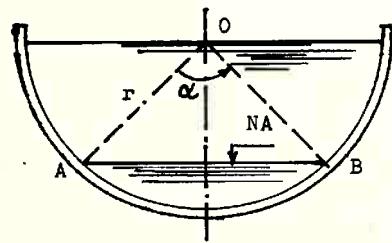


a.2 - Secção muito longa:  $B \gg y$

$$M = 1 - \frac{2y}{B + 2y} = 1 - \frac{2}{\frac{B}{y} + 2} \longrightarrow 1,00 \quad (225)$$

b) Canais semi-circulares:

Figura 36 (Secção semi-circular)



Logo:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{r^2 (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{2 \alpha r} = \frac{r (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{2 \alpha} \quad (226)$$

$$\frac{dP}{d\alpha} = r$$

$$\therefore M = 1 - R \frac{dP}{dA}$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{r^2}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$\therefore M = 1 - \frac{r (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{2 \alpha} \cdot \frac{2r}{r^2 (1 - \cos \alpha)}$$

$$\begin{aligned} A &= \text{área molhada} = \\ &= \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} \alpha \\ &= \frac{r^2}{2} (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \end{aligned}$$

$$X = P = \text{perímetro molhado} = \alpha r$$

$$M = 1 - \frac{\alpha - \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha) \alpha} = 1 - \frac{1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{1 - \cos \alpha} \quad (227)$$

b.1 - Ângulos  $\alpha$  muito pequenos  $\{ \sin \alpha \rightarrow \alpha$

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} \rightarrow 1 \quad \therefore \quad M \rightarrow 1,00$$

b.2

$$\alpha = \pi \text{ rad.} \quad \therefore \quad M = 1 - \frac{1 - \frac{\pi}{\pi}}{1 - (-1)} = 0,500 \quad (228)$$

$$\text{b.3} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad.} \quad \therefore \quad M \approx 0,636 \quad (229)$$

$$\text{b.4} \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad.} \quad \therefore \quad M \approx 0,654 \quad (230)$$

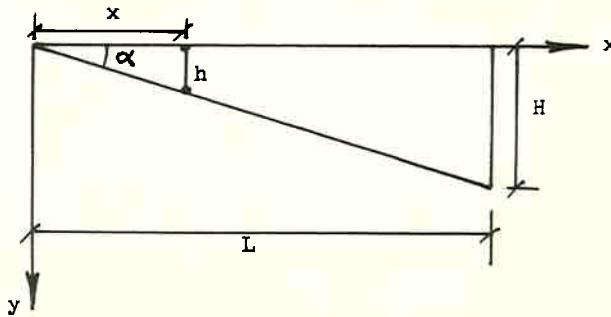
b.5

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad M = 1 - \frac{1 - \frac{\sin \pi/6}{\pi/6}}{1 - \cos \frac{\pi}{6}} = 1 - \frac{1 - \frac{3}{\pi}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0,665 \quad (231)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12} \quad M = 1 - \frac{1 - \frac{\sin \pi/12}{\pi/12}}{1 - \cos \pi/12} \approx 1 - \frac{1 - \frac{0,260}{\pi/12}}{1 - 0,905} \approx 0,828 \quad (232)$$

c) Examinemos, agora, algumas secções do tipo de grande envergadura. São secções transversais de canais em

Figura 37



que  $2L \gg H$ .

Estudemos alguns casos particulares da equação

$$h = \frac{H}{n} x^n \quad (233)$$

Examinemos, por exemplo, os seguintes casos:

$n = 0$        $h = H$       teremos uma seção retangular, muito larga, em que já vimos  $M = 1$ .

$$n = 1 \quad h = \frac{H}{L} x$$

Na figura:

$$H = L \operatorname{tg} \alpha$$

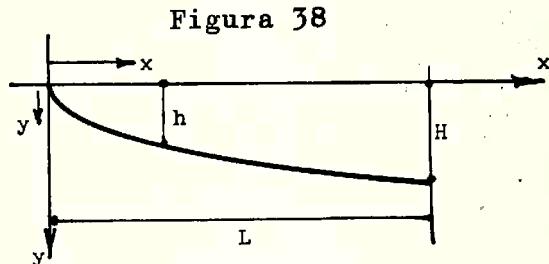
$$A = \frac{H^2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\therefore R = \text{raio hidráulico} = \frac{H}{2} \cos \alpha$$

$$P = \frac{2H}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{dA}{dH} = \frac{2H}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{dP}{dH} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \therefore M = 1 - \frac{H}{2} \cos \alpha \cdot \frac{\frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{2H}{\operatorname{tg} \alpha}} = 0,500 \quad (234)$$



Através da Literatura verifica-se que nas regiões próximas ao leito do canal a distribuição de velocidades é semelhante à encontrada nos condutos circulares na mesma região. Assim Macagno E.O., do Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade de Iowa (Iowa City), apresenta um trabalho a respeito do assunto no Journal of Hydraulic Research - Vol. 3 - 1965, nº 2.

Escolheu Macagno baixos valores de  $dh/dx$  que permitiam uma variação progressiva das dimensões transversais, condição indispensável para permitir a existência de uma distribuição logarítmica de velocidades, segundo linhas transversais, no caso de escoamento em regime turbulento, ou uma distribuição parabólica de velocidades, no caso de um escoamento em regime laminar.

Diz Keulegan, G.H. (Vol. 21, nº 6, Dez/1938 -

Journal of Research of the National Bureau of Reclamation - US. - Departamento do Comércio) que, quando se passa de um conduto circular a um canal poligonal, o escoamento se complica, com a presença de correntes secundárias já por nós descritas anteriormente. A tensão de cisalhamento na parede não é uniforme, sendo função da altura de água sobre a superfície considerada.

As flutuações turbulentas, próximas à superfície são bi-dimensionais, são fontes de energia de dissipaçao e a velocidade na superfície não é uniforme. Desenvolve Keulegan o estudo da variação de  $\bar{u}$  num canal de secção trapezoidal, do tipo indicado na figura:

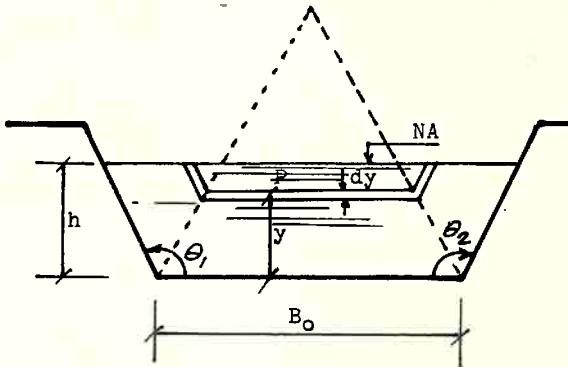
$\bar{u}$  = velocidade média em P

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = a + b \ell_n \left( \frac{y u_*}{V} \right) -$$

$$- \xi_f \left( \frac{\bar{u}}{u_*} \right) \quad (235)$$

$\xi_f \left( \frac{\bar{u}}{u_*} \right)$  é a correção aplicada para se levar em conta o efeito da superfície livre.

Figura 38



A relação entre a velocidade local de cisalhamento  $u_*$  e o valor médio da tensão de cisalhamento  $\bar{u}$  pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$u_* = \bar{u}_* (1 + \xi_*) \quad (236)$$

As equações (235) e (236) referem-se a escoamentos turbulentos lisos.

### III.4 - Influência da declividade, nas características de um escoamento livre

#### III.4.1 - Escoamento livre, num canal de descarga de superfície

Formulemos as seguintes hipóteses:

- a) canal de secção transversal constante, ao longo do mesmo
- b) declividade constante, ao longo do canal
- c) rugosidade equivalente constante, em todo o leito do canal (forma e concentração semelhantes)
- d) baixa turbulência, na admissão de água, no canal
- e) eixo retilíneo do canal
- f) comprimento  $L$  suficiente entre as secções  $S_A$  e  $S_{A'}$

Partamos, nesta pesquisa, de uma declividade  $i$  do canal inferior ao valor em que se inicia a formação das "roll waves"

$$\boxed{i < i_1 < i_2} \quad (237)$$

Da equação de Chézy:

$$Q = C S \sqrt{R_H} \sqrt{i}$$

em que  $C$ , coeficiente de Chézy, é, como já vimos, função de:  $C = C [R, F, \varepsilon/D_H, \text{forma}]$ , tiramos que:

$$\frac{Q}{\sqrt{i}} = C \left[ \frac{\varepsilon}{D_H(y)} \right] S(y) \sqrt{R_H(y)} \quad (238)$$

A equação (238) se aplica a escoamentos turbulentos rugosos, sem ondulações na superfície, com forma adequada à eliminação ou à sensível redução das correntes secundárias.

De (238), para uma dada vazão  $Q$ , resulta um gráfico do tipo da figura 40.

Ao valor particular de  $y_0$ , profundidade normal de água no canal em estudo, que é igual a  $y_c$ , altura crítica de água no canal, denomina-se declividade crítica.

A altura crítica é igual à expressão seguinte, obtida a partir da carga específica de escoamento num

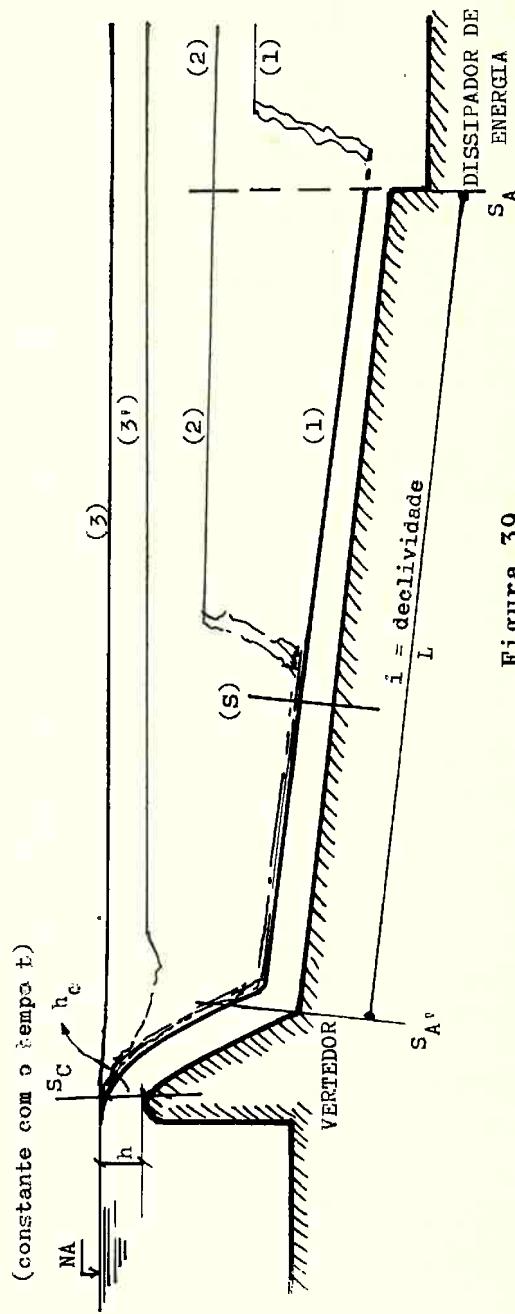


Figura 39

Figura 40

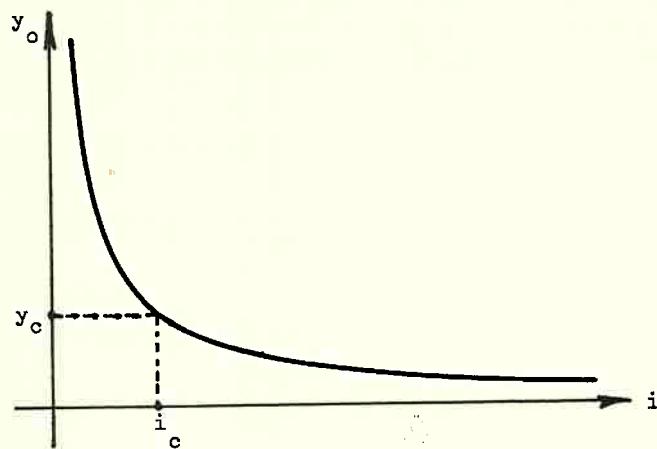
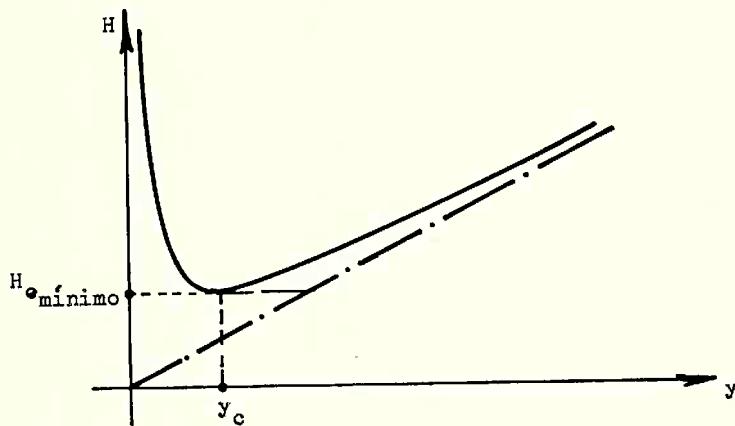


Figura 41



canal:

$$\frac{Q^2 l}{g S^3} = 1 \quad (239)$$

A declividade crítica é uma grandeza importante como parâmetro de referência no estudo das correntes gradualmente variadas.

A declividade crítica de um canal uniforme ,

para uma vazão dada  $Q$ , é a declividade do leito para que a profundidade normal da corrente seja igual à profundidade crítica; o regime de escoamento no canal com declividade crítica é, pois, simultaneamente uniforme e crítico.

Vejamos de que variáveis depende a declividade crítica  $i_c$ .

$$Q = S C \sqrt{R_H i_c} \quad - \text{Equação de Chézy}$$

$$\frac{S^3}{L} = \frac{Q^2}{g} \quad - \text{Equação definindo a altura crítica}$$

$$\therefore i_c = \frac{g S}{L C^2 R_H} = \frac{S}{L \frac{C^2}{g} \cdot R_H} \quad (240)$$

$$C = \sqrt{\frac{8 g}{f}} \quad \therefore C^2 = \frac{8 g}{f} \quad \therefore \frac{C^2}{g} = \frac{8}{f}$$

$$i_c = \frac{f S}{8 L R_H}$$

$$R_H = \frac{S}{P} \quad \therefore i_c = \frac{f P}{8 L} \quad (241)$$

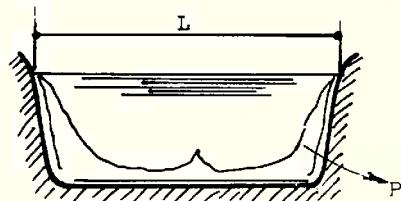
De relações anteriores:

$$f = 4 C_f \quad i_c = \frac{C_f P}{2 L} \quad (241')$$

A declividade crítica de um canal, de secção qualquer, depende, pois, da rugosidade relativa do leito do canal e da relação entre o perímetro molhado  $P$  e a largura livre do canal (para uma dada vazão).

Para canais retangulares, muito largos, temos:

Figura 42



$$P = L + 2y$$

$$(241) \quad \therefore i_c = f \frac{(L + 2y)}{8L} = \frac{f}{8} \cdot \left[ 1 + \frac{2y}{L} \right]$$

$y \ll L$

$$i_c = \frac{f}{8}$$

(242)

Examinamos, agora,  $i_c$  (declividade crítica) em função da rugosidade e da vazão, para um canal muito largo.

De (240)

$$i_c = \frac{g}{C^2} \cdot \frac{L}{L} \cdot \frac{1}{y} = \frac{g}{C^2}$$

Utilizando-se, por exemplo, a fórmula de Manning-Gauckler Strickler:

$$C = \frac{R_H^{1/6}}{n} \quad (243)$$

De (240):

$$i_c = \frac{g}{C^2} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{1}{R_H} = \frac{g}{R_H^{1/3}} \cdot n^2 \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{1}{R_H}$$

Para canais retangulares, muito largos:

$$R_H = y_c \quad \frac{S}{L} = y_c$$

$$\therefore i_c = \frac{g \frac{n^2}{R_H^{1/3}}}{y_c^{1/3}} = \frac{g \frac{n^2}{y_c^{1/3}}}{\left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/9}} = \frac{g^{10/9} n^2}{q^{2/9}} \quad (244)$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

Reaciocinemos, agora, no canal indicado na figura 39.

Mantenhamos o nível de água NA constante e o vertedor de soleira espessa escoando livremente [posições (1) e (2)]; a vazão mantém-se, pois, constante,

pois  $S_c$  é secção de controle deste escoamento.

Se variarmos a declividade  $i$  do canal, a profundidade crítica não muda, pois só depende da vazão, porém a profundidade normal  $y_o$  que depende da vazão e da declividade varia, diminuindo, se  $i$  cresce e aumentando no caso contrário.

Para um valor determinado de  $i = i_c$ , a profundidade normal será igual à profundidade crítica  $y_c$ , para a vazão mantida constante. Fixada, pois, a vazão em escoamento no canal, podemos ter os seguintes casos:

III.4.1.1 - Declividade  $i < i_c$  (para a vazão  $Q$  considerada)

O canal diz-se de declividade fraca. Podemos ter os seguintes sub-casos em função do nível de água a jusante, no dissipador de energia.

a) Corrente suficientemente rápida, para que o ressalto hidráulico se forme no interior da bacia de dissipação (caso corrente, na prática) (caso 1)

Temos, pois, um regime de escoamento super-crítico, em todo o canal, com números de Froude  $F > 1$  e alta turbulência (nímeros de Reynolds elevados). A curva de remanso correspondente é do tipo  $F_3$  (regime super-crítico).

Da fato:

da equação do regime crítico:

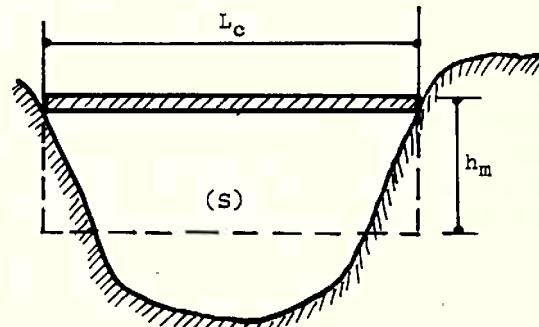
$$\frac{Q^2 L_c}{g S_c^3} = 1 \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{Q^2}{g} = \frac{S_c^3}{L_c}$$

$$\frac{S_c^3}{L_c} = \frac{V_c^2 S_c^2}{g} \quad \therefore$$

$$h_m \cdot S_c^2 = \frac{V_c^2 S_c^2}{g} \quad \therefore \quad h_m = \frac{V_c^2}{g}$$

Figura 43



$$\therefore \frac{V_c}{g h_m} = 1 \quad \therefore F^2 = 1 \quad (245)$$

Logo, ao escoamento em regime supercrítico em que  $V > V_c$  corresponde um número de Froude  $F > 1$ . Para esta declividade, ainda são cumpridas as hipóteses formuladas no estudo da fórmula de Chézy, devendo ser levadas em conta, porém, as correntes secundárias se existirem. Se, porém, ocorrerem variações de direção nas paredes do canal, por pequenas que sejam, aparecerão, superficialmente, ondas de translação (pequenas perturbações que se movimentarão para jusante de uma seção considerada, no canal).

De fato: das equações de Saint-Venant resulta que, para pequenas perturbações formadas na superfície de um canal, a celeridade de tais ondações é:

$$c \approx \sqrt{g h_m} \quad (246)$$

Se  $F$  é  $> 1$ , resulta que  $V$ , velocidade média da corrente na seção  $S$  do canal, supera  $c$ ; as ondações se deslocam, pois, para jusante de  $S$ , no canal.

Partimos das equações de Saint Venant, para obter a celeridade  $c$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (S u)}{\partial x} = 0 \quad (247)$$

$$- \frac{u^2}{c^2 R_H} = \frac{\partial y}{\partial x} - i + \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (248)$$

para canais retangulares, horizontais, com perda de carga nula, a celeridade própria da onda de choque, quando a altura de onda for muito menor do que a profundidade de água no canal é dada pela seguinte expressão:

$$a = \sqrt{g y_o} \quad (249)$$

Números de Froude elevados, num escoamento, como podem ocorrer em escoamentos super-críticos, representam dominância das forças de gravidade em relação às forças viscosas, no escoamento.

Ensaios realizados no Laboratório de Estruturas Hidráulicas do Instituto Tecnológico de California sob a direção de Knapp, R.T., foram realizados em escoamentos super-criticos, em curvas de canais retangulares. Os resultados dos ensaios realizados por Ippen, A.T. concordaram com as conclusões de Karman relativas a escoamentos supersonicos de gases.

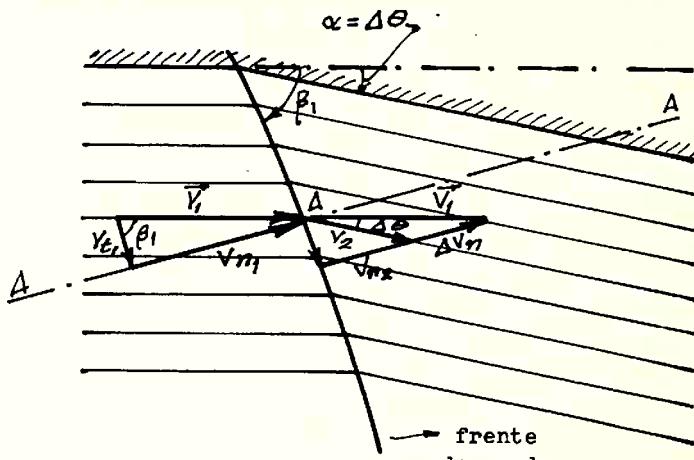
Mecanismo da formação destas pequenas perturbações:

Equação da continuidade:

$$h_1 V_{n1} = h_2 V_{n2} \quad (250)$$

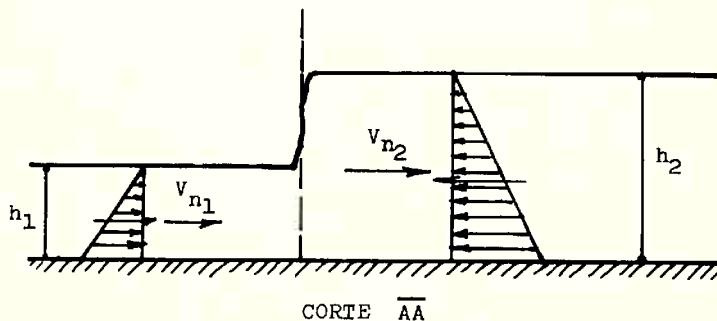
Equação do "momentum":

Figura 44



$$\frac{\gamma}{2} \frac{h_1^2}{2} + \frac{\gamma}{g} h_1 V_{n1}^2 = \frac{\gamma}{2} \frac{h_2^2}{2} + \frac{\gamma}{g} h_2 V_{n2}^2 \quad (251)$$

Figura 44



De (250) e (251):

$$v_{n1} = \sqrt{g h_1} \sqrt{\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \quad (252)$$

$$\text{sen } \beta_1 = \frac{v_{n1}}{v_1} \quad \therefore \quad \text{sen } \beta_1 = \frac{\sqrt{g h_1}}{v_1} \sqrt{\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} \quad (252)$$

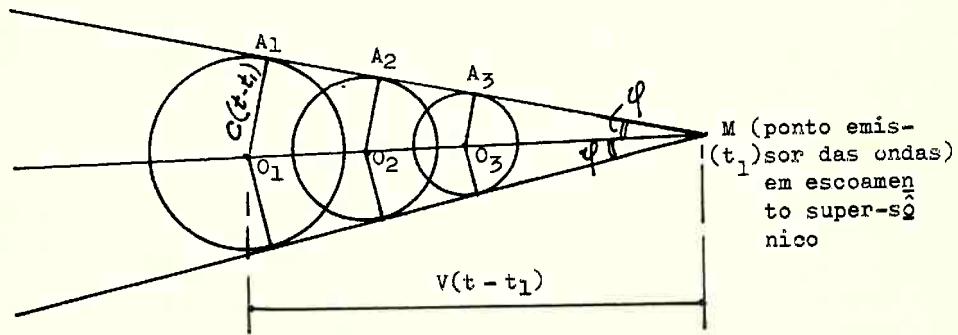
Para pequenas ondulações de superfície,  $h_2 \rightarrow h_1$

$$\text{sen } \beta_1 = \frac{\sqrt{g h_1}}{v_1} = \frac{1}{f} \quad (253)$$

Supõe-se o movimento paralelo e as pressões hidrostáticas. Há uma refração das linhas de corrente ao atravessarem a frente de onda:

A equação (253) nos mostra a analogia entre a equação destas ondas em meio líquido, em regime supercrítico e as ondas que se propagam num meio elástico, em velocidades supersônicas.

Figura 46



Da figura:

$$\therefore \text{sen } \phi = \frac{c (t - t_1)}{v (t - t_1)} = \frac{c}{v} = \frac{1}{m} \quad \left\{ \phi = \text{arc. sen } \frac{c}{v} \text{ e}^{\circ} \right. \\ \text{o ângulo de Mach} \quad (254)$$

O foco M movimenta-se com uma velocidade  $V$ ;  $c$  é a celeridade da onda. As ondas só podem propagar-se no interior do cone de Mach.

Comparando-se as equações (253) e (254), verifica-se perfeita analogia.

Neste caso a, de escoamento super-crítico, velocidades no meio da corrente vão ter uma determinada distribuição, à qual vai corresponder um coeficiente  $\alpha$  de Coriolis adequado e um coeficiente  $C$  de Chézy, certamente função de  $F$  (número de Froude):

$$C = C \left[ F, \text{ forma, } \frac{\varepsilon}{D_H} \right], \quad (255)$$

para altos números de Reynolds.

Segundo as experiências de Iwagaki, que acha que o coeficiente de Chézy aumenta devido ao aumento de instabilidade da superfície livre, com altos números de Froude, é possível introduzir o efeito da instabilidade da superfície livre, nas equações de Keulegan

$$V = V_f \left( A_s + 5,75 \log R \frac{f}{V} \right) \quad \text{canais lisos} \quad (256)$$

$$V = V_f \left( A_r + 5,75 \log \frac{R}{k} \right) \quad \text{canais rugosos} \quad (257)$$

$$V_f = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (258)$$

$A_s$  e  $A_r$  são funções do número de Froude.

b) Caso 2 - O regime de escoamento super-crítico passa a sub-crítico através de uma transição brusca, onda de choque estacionária, que é um ressalto hidráulico. As curvas de remanso correspondentes são respectivamente  $F_3$ , em regime super-crítico, e  $F_2$  ou  $F_1$  em regime sub-crítico; se o canal tiver comprimento adequado (entre a secção final do ressalto e a extremidade do canal), então a curva de remanso será a superfície correspondente à altura normal do canal, no trecho em regime sub-crítico.

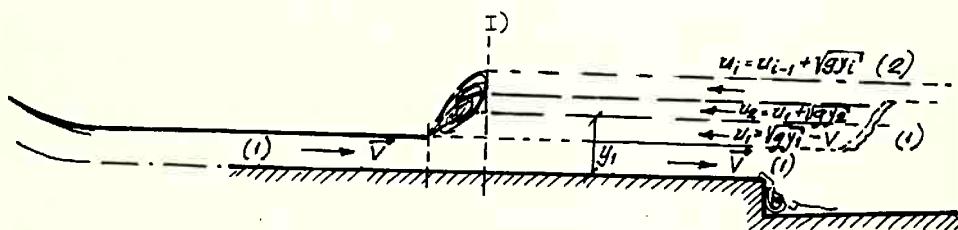
#### Ressalto hidráulico

A passagem de um regime sub-crítico a super-

crítico, como ocorre na passagem de uma corrente sobre um vertedor de soleira espesso, de comprimento conveniente, se faz de forma contínua, ao contrário do que ocorre na passagem de um regime super-crítico a um sub-crítico que, em geral, ocorre de forma brusca, com importante dissipação de energia, explicada predominantemente pela alta turbulência criada. Este fenômeno denomina-se ressalto hidráulico.

Mostremos que o ressalto hidráulico é, de fato, uma onda de choque, estacionária.

Figura 47



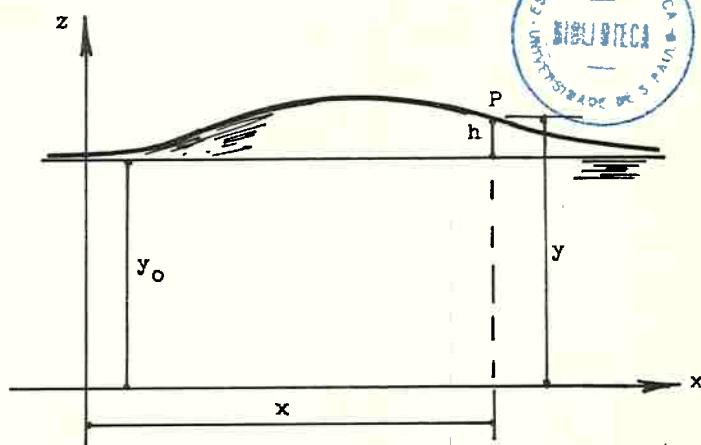
Quando, na bacia de dissipação, o nível de água, no regime fluvial, passa do nível (1) a (2), desloca-se o ressalto para a nova posição I; este deslocamento se processa através do movimento de pequenas ondações que se movimentam para montante, com velocidades crescentes das ondas inferiores (nível menor) para as ondas superiores, como mostra a figura 47; as ondas inferiores aparecem primeiro e as superiores, depois. Pelo mecanismo de distribuição citada, após certo percurso, as camadas superiores atingem as inferiores, formando um perfil de onda praticamente normal ao canal; está depois formada uma onda de choque no canal. Quando a celeridade desta onda de choque igualar a velocidade média de água no canal, V, esta onda fica estacionária na seção I, formando, assim, um ressalto hidráulico.

Por outro lado, a celeridade de uma onda de gravidade, considerando sua curvatura em cada ponto, é dada por:

$$C = \sqrt{g y_0} \left( 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{y_0} + \frac{y_0^2}{6h} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \quad (259)$$

em que:  $y_0$  = profundidade da água imóvel, no canal  
 $h$  = sobre-elevação no ponto considerado.

Figura 48



As hipóteses formuladas para se chegar à expressão (259) são as seguintes:

- a) canal é, praticamente, horizontal
- b)  $y_0$ , profundidade finita
- c) movimento plano, a potencial de velocidades (desprezados os efeitos de turbulência criada pela rugosidade do fundo e das paredes)
- d) o fluido é considerado perfeito
- e)  $\omega$ , componente vertical de  $\vec{V} = 0$ , no fundo do canal
- f)  $\omega = \partial h / \partial t$  na superfície livre, muito menor do que  $u$ , componente horizontal da velocidade
- g)  $\omega$  varia linearmente ao longo da vertical de abscissa  $x$
- h) trata-se de pequenas ondulações,  $h < y_0$ , podendo desprezar-se  $h^3$  e  $h^2/6 y_0$  em face de  $y_0/3$
- i) supõe-se um sistema de eixos coordenados animados da celeridade da onda.

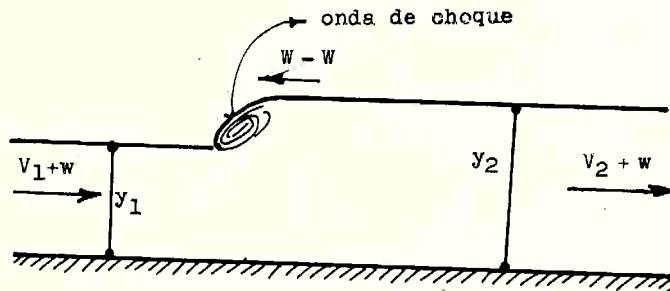
$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  é a curvatura no ponto P considerado, na onda.

j) o canal é retangular.

A celeridade própria da onda c varia com a

sobre-elevação  $h$  e a onda se deforma; a crista avança, pois, mais rapidamente do que os estratos inferiores e a onda pode romper-se, transformando-se numa onda de choque.

Figura 49



A frente desta onda, que é quase perpendicular ao leito do canal, é uma região fortemente turbulenta e o fenômeno ocasiona considerável perda de energia (daí seu uso nos dissipadores de energia). Consideremos o fluido em movimento e sejam  $V_1$  e  $V_2$  as velocidades antes e após o ressalto e seja  $w$  a velocidade com que este se desloca a respeito de um observador imóvel. Se utilizarmos um referencial que se movimente com velocidade  $w$ , o movimento será permanente e as velocidades são as indicadas na figura 49.

Equação da continuidade:

$$(v_1 + w) y_1 = (v_2 + w) y_2 \quad (260)$$

Equação do "momentum":

$$\rho [v_1 + w]^2 y_1 + \frac{\gamma y_1^2}{2} = \rho [v_2 + w]^2 y_2 + \frac{\gamma y_2^2}{2} \quad (261)$$

eliminando-se  $(v_2 + w)$  das duas equações, obtém-se

$$v_1 + w = \sqrt{g y_1} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2}{y_1} \left( \frac{y_2}{y_1} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (262)$$

Como a onda de choque formada é estacionária  $w = 0$ , e a expressão (262) toma a seguinte forma, no

ressalto:

$$V_1 = \sqrt{g y_1} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2}{y_1} \left( \frac{y_2}{y_1} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (263)$$

em função do número de Froude, na seção (1) fica:

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g y_1}} = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2}{y_1} \left( \frac{y_2}{y_1} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (264)$$

ou, ainda:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1 \right] \quad (265)$$

O número de Froude, a montante, seção (1), é um adimensional importante que determina a relação entre as alturas conjugadas do ressalto  $y_2/y_1$ , seu comprimento  $L$  e a energia dissipada no ressalto. Experimentalmente, verifica-se que, se  $F_1^2 < 3$  o ressalto é formado por uma série de ondulações que se estendem num comprimento considerável; é o ressalto ondulado.

Se  $F_1^2 > 3$ , temos um ressalto propriamente ditto.

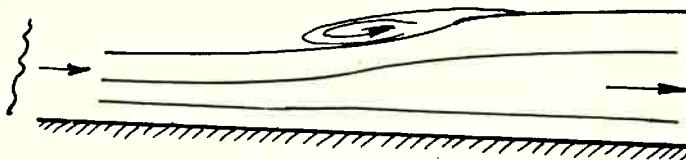
$\lambda$  = perda de carga provocada pelo ressalto

$$\lambda = H_{o1} - H_{o2} \quad \therefore \quad \Delta H = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} =$$

$$= \frac{y_1}{16} \frac{(\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 3)^3}{(\sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1)} \quad (266)$$

Esta perda de carga é devida à rotação de uma parte da massa líquida em que existe um alto grau de turbulência e fortes gradientes locais e instantâneos de velocidade; esta região estrangula a passagem da corrente líquida, do regime super-crítico, passando ao sub-crítico.

Figura 50

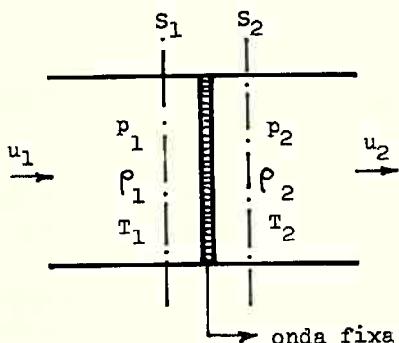


O comprimento do ressalto, obtido experimentalmente, é expresso também em função do número de Froude; a partir das experiências de Bakhmeteff e Matzke, chegou-se à conclusão de que, para números de Froude entre 5 e 13, a relação  $L/y_2$  varia de 6 a 6,1, aproximadamente; entre 2 e 5 (Froude),  $L/y_2$  varia entre 4,4 e 6,0.

Vejamos, agora, algumas analogias de uma onda de choque em fluidos incompressíveis e em fluidos compressíveis (onda de choque num meio homogêneo com celeiridade constante). Raciocinemos com uma onda de choque estacionária, num escoamento de um fluido compressível a uma dimensão, permanente e adiabático.

a) Relação de Hugoniot (fluidos compressíveis)

Figura 51



A relação de pressões  $p_2/p_1$  é sempre superior à unidade; caracteriza a intensidade da onda de choque.

a) (fluidos incompressíveis)

Da fig. 49:

$$\frac{y_2}{y_1} > 1$$

da fórmula (266):

$$\Delta H = f(y_2, y_1)$$

b) A velocidade do fluido em relação à onda, sendo su-

persônica, a montante da onda de choque ( $u_1 > a_c$ ) é sub-sônica a jusante desta onda ( $u_2 < a_c$ ) (da relação de Prandtl).

b') fluidos incompressíveis:

A velocidade do fluido em relação à onda, sendo supercrítica, a montante do ressalto ( $V_1 > V_c$ ) é sub-cri-  
tica a jusante do ressalto ( $V_2 < V_c$ ).

c) É cômodo, por vezes, exprimir as características da onda de choque em função do número de Mach, a montante  $M_1$ .

c') Geralmente exprimem-se as características do ressalto hidráulico em função do número de Froude  $F_1$  a montante [Exs.:  $\Delta H$ ;  $y_2/y_1$ , L comprimento].

d) Nenhum mecanismo análogo ao da formação das ondas de choque citado permitiria o estabelecimento de uma onda de depressão brusca.

d') A mesma proposição é verdadeira, no caso do ressalto hidráulico, como já vimos.

Façamos um resumo das leis de escoamento unidimensional de fluidos compressíveis e de incompressíveis.

Hipóteses a admitir:

- 1º) Escoamento unidimensional
- 2º) Escoamento permanente
- 3º) Escoamento contínuo
- 4º) Fluido não viscoso
- 5º) Escoamento adiabático.

Equações a considerar:

1) De conservação de massa (continuidade)

$$\frac{dA}{A} + \frac{dp}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (267)$$

2) De impulsão

$$u \, du + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (268)$$

Um escoamento satisfazendo as hipóteses formuladas resume as condições que se admitem na propagação de uma onda de fraca amplitude; a celeridade de uma pequena onda sobreposta ao escoamento permanente, é dada por:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (269)$$

(269) e (268):

$$\therefore u \frac{du}{u} + a^2 \frac{dp}{\rho} = 0 \quad \therefore u^2 \frac{du}{u} + a^2 \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (269)$$

A equação (267), de conservação de massa, fica:

$$\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} - \frac{u^2}{a^2} \cdot \frac{du}{u} = 0 \quad \therefore \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) = 0$$

sendo  $M = \text{número de Mach local}$ :

$$\boxed{\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \cdot \frac{du}{u}} \quad (270)$$

No caso dos líquidos (fluidos incompressíveis), estudemos a variação de profundidade do líquido, desprezado o atrito.

A velocidade numa secção  $S$  de um canal retangular, de largura constante  $b$ , de pequena declividade  $i$  (quando a declividade é grande, o escoamento não pode ser considerado a uma dimensão)

$$u = \frac{q}{h \cos i} \approx \frac{q}{h} \quad (271)$$

Para o escoamento contínuo e permanente e se o atrito for desprezado, teremos:

$$h_1 + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + h + \frac{q^2}{2gh^2} = \text{const.} \quad (272)$$

Derivando-se (272) em relação a  $x$ , resulta:

$$\left. \frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{q^2}{gh^3}\right) = - \frac{dz_2}{dx} \right\} \boxed{\frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{u^2}{gh}\right) = - \frac{dz_2}{dx}} \quad (273)$$

$$\therefore \boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{i}{1 - u_*^3}} \quad (274)$$

$$u_*^3 = \frac{u^2}{g h} \quad \boxed{u_* = \sqrt[3]{\frac{u^2}{F^2}}} \quad (275)$$

A relação (273) pode escrever-se da seguinte forma:

$$-\frac{d z_2}{h} = \left(1 - \frac{u^2}{g h}\right) \frac{dh}{h} \quad \therefore \quad -\frac{d z_2}{h} = \left(1 - \frac{u^2}{g h}\right) \frac{dh}{h}$$

$$\therefore \quad \boxed{-\frac{d z_2}{h} = \left(\frac{u^2}{g h} - 1\right) \frac{du}{u}} \quad (276)$$

De fato:

$$q = u h = \text{constante} \quad dh = -\frac{q}{u^2} du$$

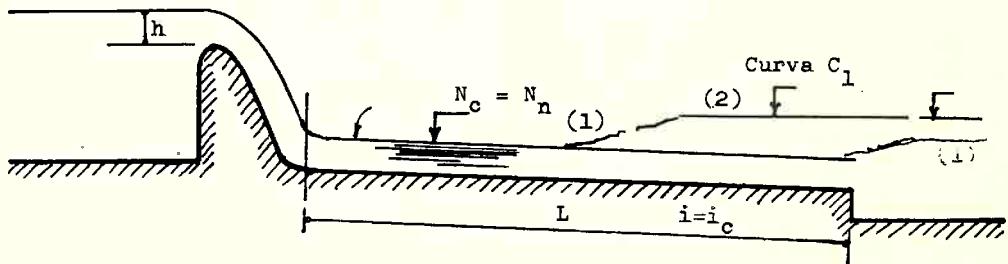
Há, pois, perfeita analogia entre (I) e (II), desde que se substitua o número de Mach pelo número de Froude e a variação relativa de área pela variação relativa de cota.  $I \equiv 270$  e  $II \equiv 276$ .

c) Casos 3 e 3' da figura 39

Estes casos correspondem a escoamento em regime sub-crítico, ao longo de todo o canal. O vertedor de soleira espessa a montante do canal vai funcionar afogado, de modo que as características de escoamento vão depender, agora, das condições a montante e a jusante do canal; consequentemente, a vazão do escoamento vai depender das condições a montante e a jusante do canal.

III.4.1.2 - Declividade  $i = i_c$  (para a vazão  $Q$  considerada)

Figura 52



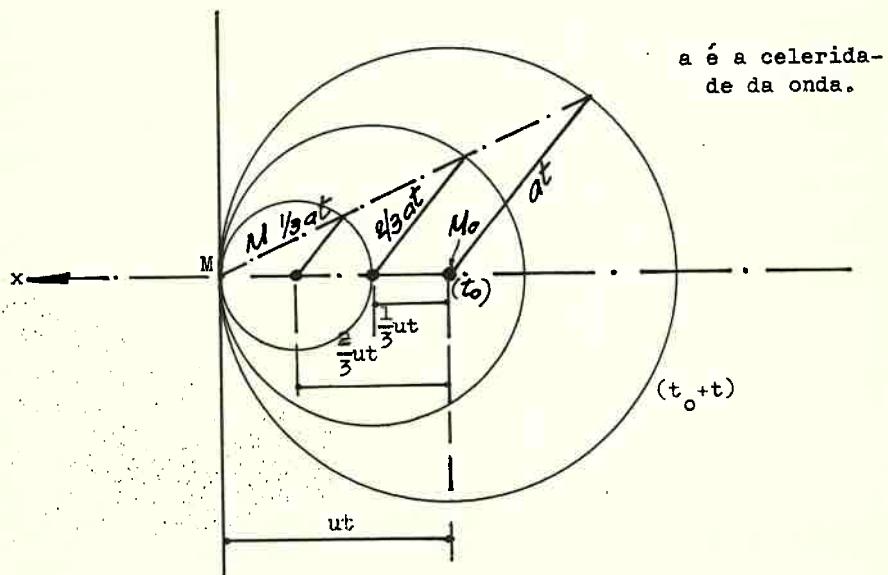
a) Corrente suficientemente rápida para que o ressalto hidráulico se forme no interior da bacia de dissipação (caso 1); como o escoamento é crítico, na corrente, o número de Froude é igual à unidade, e como já vimos, quando este é adimensional for inferior a  $\sqrt{3}$ , o ressalto que se forma é ondulado e se prolonga num comprimento considerável. Para esta declividade ainda são cumpridas as hipóteses formuladas no estudo da fórmula de Chézy, devendo ser levadas em conta, porém, as correntes secundárias se existirem (Ex.: perfis retangulares, triangulares).

Se ocorrerem variações de direção nas paredes do canal por pequenas que sejam, darão origem a pequenas ondulações de superfície que se movimentarão para jusante; o ângulo  $\beta_1$  formado pela frente da onda com a parede do canal (de direção dominante), vai tender a  $90^\circ$ , pois, como já vimos:

$$\operatorname{sen} \beta_1 = \frac{1}{f} \quad (253)$$

estamos, pois, numa situação limite entre regime supercrítico e sub-crítico.

Figura 53



O cone de Mach reduz-se, pois, a um plano passando por M; é, pois, como dissemos, um caso limite en-

tre o regime supercrítico e sub-crítico.

O coeficiente de Chézy,  $C$ , como praticamente não há formação de ondulações na superfície, isto é, a superfície é estável e cumpre uma das hipóteses formuladas na equação de Chézy, a saber, a superfície livre é bem definida e estável, será pois:

$$C = C \left[ \text{forma, } \frac{E}{D_H} \right] \quad (277)$$

para altos números de Reynolds.

b) Caso 2 - figura 52.

O regime de escoamento crítico passa a sub-crítico através de um ressalto ondulado, pois  $F = 1$  é  $< \sqrt{3}$ , como já foi visto; este ressalto se prolonga por um comprimento considerável.

Explicação das ondulações, neste tipo de ressalto: Em virtude do atrito viscoso na camada limite laminar, as velocidades próximas à parede são inferiores às da parte central da parede. Se  $q'$  for a vazão por unidade de largura, perto da parede é menor do que a vazão  $q''$  por unidade de largura, da parte central do escoamento.

Perto da parede:

$$Y' = q' \frac{u'}{g} + S' y'_G = \frac{q'^2}{g h} + S' y'_G \quad (278)$$

$$u' = \frac{q'}{h}$$

Parte central:

$$Y'' = q'' \frac{u''}{g} + S'' y''_G = \frac{q''^2}{g h} + S'' y''_G \quad (279)$$

$$Y' - Y'' = \frac{q'^2 - q''^2}{g h} \quad (280)$$

Esta diferença será maior para  $h < y_c$  do que para  $h > y_c$ .

Seja o gráfico 54, correspondente a  $Y = Y(h)$ ,

correspondente à vazão média  $q$ , unidade de largura, em toda a seção.

Quando o resalto se produzir,  $Y_1 = Y_1$ , a altura  $h_2'$  <  $h_2$ , mas  $h_2'' > h_2$ . Resulta que, na parte central da corrente, a água ocupará uma altura  $h_2'' > h_2$  (altura da corrente a jusante). Resulta, pois, uma descida da água que irá ocupar uma altura  $h_2$ ; e assim por diante. Seguem-se diversas oscilações que são amortecidas pelo mecanismo das forças viscosas de escoamento. Este resalto ondulado foi estudado por Fawer, em C., Estudo de alguns e Lausanne - 1937.

III.4.1.3 - Declividade  $i > i_c$  (para a vazão  $Q$  considerada) ( $i < i_1 < i_2$ )

Figura 54

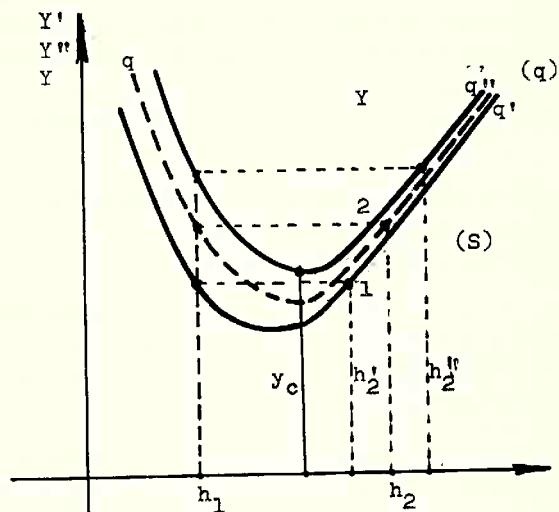
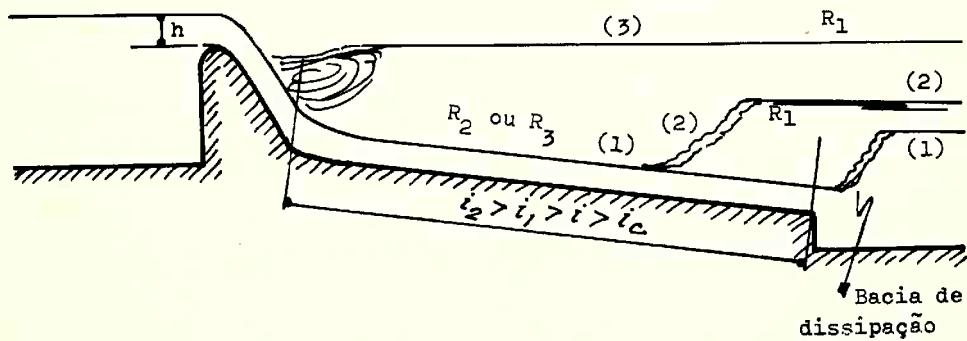


Figura 55



- a) Corrente suficientemente rápida para que o ressalto hidráulico se forme no interior da bacia de dissipação (Caso 1, corrente na prática).

Temos um regime de escoamento super-crítico em todo o canal com números de Froude  $F > 1$  e alta turbulência (números de Reynolds muito elevados). A curva de remanso é  $R_2$  ou  $R_3$ , ambas correspondentes a regime super-crítico.

Para canais que satisfaçam a condição de desigualdade:

$i_2 > i_1 > i > i_c$ , ainda podem ser formuladas as hipóteses apresentadas por nós quando do estudo da fórmula de Chézy, devendo, porém, ser levados em consideração, as correntes secundárias se existirem (principalmente nas secções triangulares e retangulares).

Ocorrendo pequenas variações na direção das paredes laterais do canal, aparecerão, também, superficialmente pequenas ondulações que se movimentarão para jusante. A celeridade de propagação de tais ondulações, bem como o mecanismo de sua propagação já foram por nós examinados no parágrafo III.4.1.1 a).

À distribuição de velocidades, na parte central da corrente vai corresponder um coeficiente  $\alpha$  de Coriolis adequado e um coeficiente  $C$  de Chézy, certamente, também, função do número de Froude, a saber:

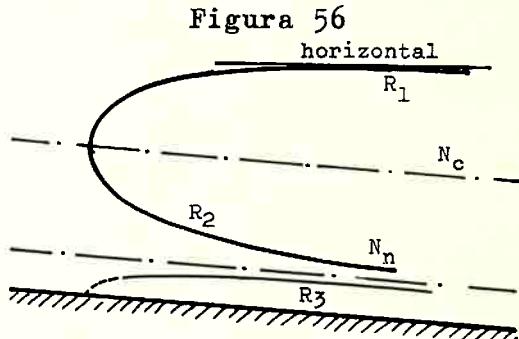
$$C = C \left[ F, \text{ forma, } \frac{E}{D_H} \right] \quad (281)$$

para altos números de Reynolds.

Segundo as experiência de Iwagaki, é possível introduzir o efeito da instabilidade da superfície livre, nas equações de Keulegan.

(Equações já citadas, de números (256), (257) e (258)).

b) Caso 2 - O regime super-crítico passa a sub-crítico



co, através de uma transição brusca que é um ressalto hidráulico. As curvas de remanso correspondentes são  $R_2$  ou  $R_3$  no trecho em regime super-crítico e  $R_1$  em regime sub-crítico (fig. 56). Se o canal tiver comprimento adequado, então o regime será o supercrítico, ao longo de um trecho inicial de comprimento conveniente, com altura de água igual a  $y_0$  (altura normal do canal), com uma variação brusca de altura de água (de pressão) através de um ressalto hidráulico; a jusante desse ressalto ocorre uma curva de remanso  $R_1$ , em regime sub-crítico.

#### Ressalto hidráulico, em canais de declividade forte

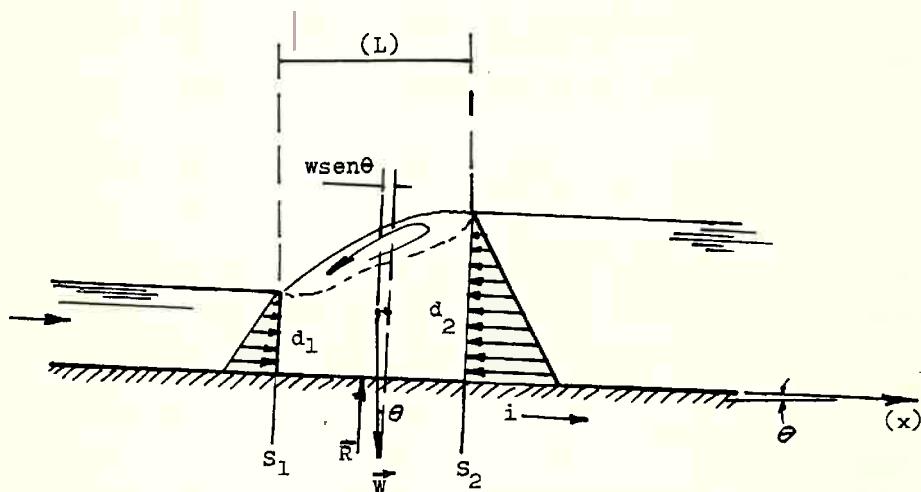
A passagem de um regime super-crítico a um sub-crítico, num pequeno trecho do canal, se realiza através de um ressalto hidráulico que ocasiona, também, importante dissipação de energia, explicada dominante-mente pela elevada turbulência criada, nessa região.

Comparando-se, este fenômeno, de formação do ressalto hidráulico em canais de declividade forte com o de formação de ressalto hidráulico em canais de declividade fraca (já exposto), podemos focalizar as seguintes diferenças:

- a) A declividade é do canal aumentando, mas nos afastamos da hipótese inicial das ondas de choque de que o canal deve ser, teoricamente, horizontal, na região de formação do ressalto.
- b) A componente da força de campo gravitacional que atua no movimento, na direção do escoamento não é mais desprezível, em face das demais forças atuantes.
- c) O movimento do fluido, num canal de declividade forte, se afasta do modelo físico admitido no caso de canais de declividade fraca, isto é, não pode mais ser considerado movimento unidimensional e consequen-temente difícil se torna admitir a distribuição hidrostática de pressões, principalmente na secção de início do ressalto (regime super-crítico). Este fe-nômeno vai obrigar a pesquisar a real distribuição de velocidades no canal, bem como a real distribuição de pressões na secção de entrada do ressalto e na sec-ção a jusante do ressalto.

Determinação das alturas correspondentes, num ressalto formado num canal de declividade forte

Figura 57



É essencial considerar, na equação do momentum, a componente do peso  $W$ , na direção do movimento.

Admitimos, também, em primeira aproximação, a distribuição hidrostática de pressões em  $S_1$  e  $S_2$  embora tal não se verifique realmente.

Considera-se a reação do fundo do canal sobre a corrente em escoamento, perpendicular à mesma, embora tal não se verifique na realidade. Pesquisas sobre este tipo de ressalto foram realizadas por Bakhmeteff, Matzke, Yarnell e Kindsvater.

Examinemos o caso da fig. 57, ainda que não seja o mais frequente, na prática; os casos mais comuns são os de formação do ressalto, a jusante do canal, na bacia de dissipação, com declividade menor.

Consideremos um canal retangular, de grande largura e estudemos o escoamento por  $m$  de largura, na região central do canal.

Equação do "momentum":

$$\vec{W} + \vec{L} + \underbrace{\vec{E}_1 - \vec{R} + \vec{E}_2 + \vec{M}_1 - \vec{M}_2}_{\vec{F}} = 0 \quad (282)$$

ou:

$$\vec{W} + \vec{L} + \vec{F} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0 \quad (282')$$

Admitindo-se, também, em primeira aproximação, que o movimento médio seja permanente, então

$$\vec{L} = \rho \iiint_{(\tau)} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\tau = 0 \quad (283)$$

$$(282) \text{ e } (283) \quad \therefore \quad \vec{W} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 - \vec{R} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0 \quad (284)$$

Projetando-se esta equação no eixo dos xs; admitindo-se o movimento em bloco nas secções  $S_1$  e  $S_2$  resulta:

$$\begin{aligned} W \sin \theta + \frac{\mu}{g} d_1 \cdot 1 \cdot \frac{d_1}{2} \cos \theta - \frac{\mu}{g} d_2 \cdot 1 \cdot \frac{d_2}{2} \cos \theta + 0 + \\ + \frac{\mu}{g} Q V_1 - \frac{\mu}{g} Q V_2 = 0 \end{aligned} \quad (285)$$

Se a superfície do ressalto em contacto com a pressão atmosférica for uma linha reta, pode ser calculado  $W$ , pela seguinte equação:

$$W \approx \frac{1}{2} L (d_1 + d_2) \frac{\mu}{g} K \quad (286)$$

$K$  é um coeficiente adimensional, que leva em conta:

- a) forma do perfil não exatamente linear
- b) o efeito da declividade, no comprimento  $L$

$$(285) \text{ e } (286) \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L (d_1 + d_2) \frac{\mu}{g} K \sin \theta + \frac{\mu}{2} d_1^2 \cos \theta - \frac{\mu}{2} d_2^2 \cos \theta + \\ + \frac{\mu}{g} Q V_1 - \frac{\mu}{g} Q V_2 = 0 \end{aligned} \quad (287)$$

Sendo  $F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g d_1}}$ , substituindo-se em ..

(287) e simplificando, resulta a equação:

$$\left( \frac{d_2}{d_1} \right)^3 - (2 G^2 + 1) \frac{d_2}{d_1} + 2 G^2 = 0$$

(288)

em que:

$$G = \frac{F_1}{\sqrt{\cos \theta - \frac{K L \operatorname{sen} \theta}{d_2 - d_1}}} \quad (289)$$

$K$  e  $\frac{L}{d_2 - d_1}$  são funções do número de Froude  $F_1$  a montante e consequentemente o adimensional

$$G = F(F_1, \theta) \quad (290)$$

$\theta$  é o ângulo do fundo do canal, com a horizontal (fig. 57). Se compararmos (288) com a equação que deu origem à equação (265):

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8 F_1^2} - 1 \right],$$

isto é,

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)^3 - (2 F_1^2 + 1) \frac{y_2}{y_1} + 2 F_1^2 = 0 \quad (291)$$

em canais retangulares, horizontais, vemos a analogia que existe entre (291) e (288); logo teremos, também:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8 G^2} - 1 \right] \quad (292)$$

O comprimento  $L$  dêste ressalto é também função do número de Froude e da declividade.

Verificamos que, para um mesmo número de Froude a montante  $F_1$ ,  $L/y_2$  decresce de valores da ordem de 6 (declividade nula) até valores da ordem de 3 para uma declividade  $i = 0,25$ , segundo gráfico experimental do Bureau of Reclamation (Vente Chow - Open Channel Hydraulics).

Noutro gráfico do Bureau of Reclamation, que fornece

$$\frac{d_2}{d_1} = \varphi [F_1, \operatorname{sen} \theta],$$

verificamos que para um número de Froude  $F_1$ , por exemplo igual a 4,  $d_2/d_1$  varia de 5 para  $\operatorname{sen} \theta = 0$  a 14 para  $\operatorname{sen} \theta = 0,30$ , o que nos mostra bem a tendência pa-

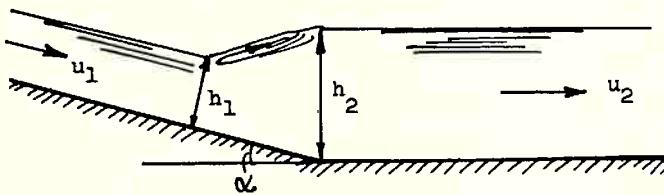
ra sensíveis aumentos de  $d_2$  (para mesmos valores de  $d_1$ ), quando aumentamos a declividade de fundo do canal.

Estudo de Kindsvater, C.E.

Kindsvater examinou o problema do ressalto em canais de declividade forte.

A relação entre  $h_1$  e  $h_2$  indicada na figura é a seguinte:

Figura 58



$$h_2 = \frac{h_1}{2 \cos \alpha} \left( \sqrt{\frac{8 F_1^2 \cos^3 \alpha}{1 - 2 \phi \operatorname{tg} \alpha}} + 1 - 1 \right) \quad (293)$$

$\alpha$  é o ângulo do fundo do canal, com a horizontal.

$\phi$  é um fator que é introduzido na avaliação das reações do leito sobre o comprimento do ressalto. Foi obtida essa equação, a partir da equação da quantidade de movimento (momentum).  $\phi$  foi determinado experimentalmente,  $\phi = F [\mathcal{F}, i]$ , anàlogamente ao adimensional  $G$  expresso na equação (289).

A expressão:

$$\phi = F [\mathcal{F}, i] \quad (294)$$

foi obtida por Hickox.

Os resultados obtidos, na prática confirmam a validade da equação (293), os afastamentos não tendo ultrapassado 5%.

c) Caso 3 - Figura 55

Corresponde a um escoamento em regime subcrítico, ao longo de todo o canal (curva de remanso do

tipo  $R_1$ ).

O vertedor de soleira espessa a montante do canal vai funcionar afogado; consequentemente a vazão de escoamento, no canal, vai depender das condições a montante e a jusante do canal.

III.4.1.4 - Canais con declividades i compreendidos no intervalo  $i_1$  e  $i_2$  que corresponde à formação das "roll waves" na superfície do escoamento. - Canais super-rápidos.

#### A - Generalidades

Estudemos o funcionamento destes canais em regime super-crítico, ao longo de todo o canal. Se o canal tiver comprimento suficiente, verificam-se os seguintes trechos de características de escoamento, distintas:

a) Trecho de entrada: formam-se ondas de superfície do tipo solitárias, de pequena altura em relação à profundidade de água, no canal; é uma zona de movimento não uniforme.

b) Vem, a seguir, um trecho em que se formam ondas de superfície com comprimentos e altura finitos; é o trecho de formação de ondas.

c) Trecho em que o escoamento completamente formado de ondas é observado - é o trecho de movimento ondular.

Em geral este terceiro trecho se subdivide em dois, dependendo do comprimento do canal, inclinação e vazão:

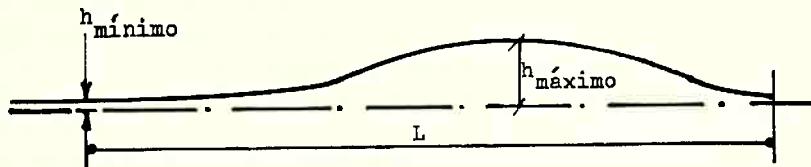
$c_1$  - trecho em que a onda tipo "roll wave" não é completamente formada

$c_2$  - trecho em que a onda tipo "roll wave" é completamente formada (é, pois, uma zona de escoamento ondular, com ondas estáveis).

O movimento uniforme continua até uma certa distância após a qual pequenas ondulações aparecem na superfície, desenvolvendo condições de escoamento instável. Estas pequenas ondulações aumentam rapidamente em comprimento e altura, formando ondas maiores. Só em canais de certo comprimento é que se verifica uma região em que as ondas formadas constituem uma sucessão re-

gular de ondas de comprimento e altura constantes. Estas ondas são perpendiculares ao eixo do canal.

Figura 59



Perfil longitudinal da "roll wave"

A relação  $h_{\max}/h_{\min}$ , tende a estabilizar-se, quando a onda se desloca para jusante.

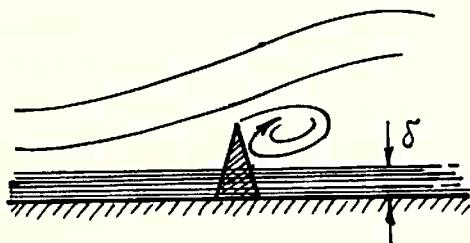
A celeridade  $a$  de propagação destas ondas não depende da relação altura/comprimento; depende da velocidade média de escoamento  $V$  da corrente e da declividade  $i$  do canal.

Pelos estudos desenvolvidos, tudo indica que o aparecimento das "roll-waves" está intimamente ligado ao caráter pulsativo do movimento de água no canal.

De fato, com o aumento da declividade do canal e aumento de velocidade média no mesmo,  $V$ , a espessura da camada limite

Figura 60

laminar decresce com o número de Reynolds, para a mesma abscissa  $x$ , como já vimos anteriormente.



$$\delta = 5,47 \frac{x}{\sqrt{R_x}} \quad (295)$$

em que:

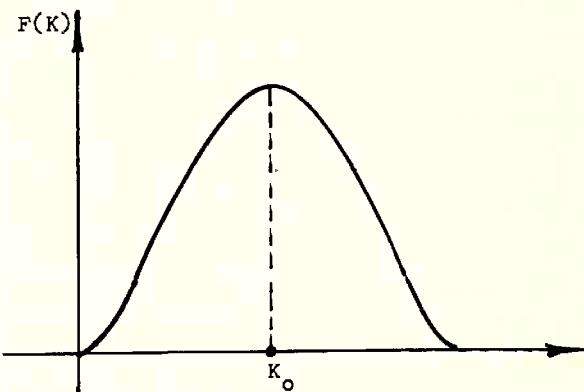
$$R_x = \frac{V_0 x}{\gamma} \quad (296)$$

Diminuindo a espessura  $\delta$  da camada limite laminar, uma aspereza qualquer do leito do canal passa a dar origem a um movimento turbulento (grandes turbilhões),

como estão indicados na fig. 60.

Como a altura de água em canais com escoamento super-rápido é relativamente baixa (em relação à altura de água nos canais de declividade forte, para a mesma vazão), os grandes turbilhões formados, cuja dimensão representativa é da ordem de grandeza do obstáculo (aspereza), com turbulência anisotrópica, alcançam rapidamente a superfície livre do escoamento, a jusante da secção de geração, sem se ter processado a transformação em turbilhões menores, com características de isotrópia. Nestas condições estes turbilhões que, pela função  $F(K)$  do espetro de turbulência alcançam a maior energia na região  $K_0$  do gráfico (fig. 61), têm energia suficiente para provocar as ondulações de superfície que se rompem arrastando bôlhas de ar para o interior da corrente líquida (ondas com espuma branca); a energia da onda que se rompe deve ser suficiente para vencer a tensão superficial do líquido, quando do lançamento de bôlhas de ar, para a parte central da corrente.

Figura 61



Espetro da turbulência

O mecanismo de arrastamento de ar, para o interior da corrente, está, pois, ligado intimamente às oscilações do vetor velocidade, na superfície do escoamento.

#### B - Celeridade das ondas "roll waves"

a) Determinação a partir da teoria do escoamento de líquidos, a potencial de velocidades:

A partir da equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (296A)$$

Para propagação de ondas em altura finita de água, a equação de Laplace-Boussinesq dá:

$$c = \sqrt{\frac{g \lambda}{\pi} \operatorname{tg} h \frac{\pi h}{\lambda}} \quad (297)$$

$h$  = altura da água, no canal

$\lambda$  = comprimento da onda =  $L$

$c$  = celeridade da onda.

$$\text{Quando: } h \ll \lambda \quad \therefore \quad c = \sqrt{g h} \quad (298)$$

ou, pela equação de Saint-Venant:

$$c = \sqrt{g \left( h + \frac{3}{2} z \right)} \quad (299)$$

em que  $z$  é a altura da crista da onda acima da superfície da corrente, no canal.

As equações de propagação de onda, na prática, são geralmente empíricas, obtidas através de estudos experimentais.

b) Equações de Reynolds - Considerações gerais - Semelhança.

A divergência entre as celeridades obtidas experimentalmente e as obtidas pelas equações (297), (298) e (299) se deve atribuir, segundo pensamos, ao caráter turbulento do movimento que modifica as hipóteses formuladas na teoria das ondas obtida a partir dos movimentos a potencial de velocidade. Ora, a turbulência é a causa principal da formação e propagação das "roll waves"; deve, pois, ser considerada sua influência na geração e propagação de tais ondas, em canais super-rápidos.

Estas ondas "roll waves", que são gravitacionais, de grande vorticidade, foram estudadas em movimentos bidimensionais, estáveis, em fluidos homogêneos por Krikorov, que provou a existência de ondas solitárias, com continuidade de distribuição de vorticidade, provando que a velocidade de propagação de tais ondas excede, sempre  $\sqrt{g h}$ , de modo análogo ao que ocorre nas ondas solitárias irrotacionais. Este método de estudo destas ondas de Krikorov é análogo a outro método que também é aplicado, o de Moiseev.

No estudo da estabilidade do escoamento turbulento e de suas variações com o movimento médio utilizaremos as equações de Reynolds; é possível estabelecer, através delas, em primeira aproximação, a influência do movimento de pulsação sobre o movimento médio e estabelecer, aproximadamente, o caráter das trocas das quantidades de movimento que caracterizam a turbulência. Reynolds considerou o escoamento turbulento de um líquido como resultado de dois escoamentos:

- a) movimento médio em que o movimento varia continuamente, no tempo e no espaço
- b) movimento turbilionario causado pela turbulência.

Partindo-se de:

- a) Equações de Navier-Stokes, para fluidos incompressíveis
- b) Das seguintes equações que relacionam valores médios com valores de flutuação e valores da grandeza num ponto, num instante  $t$ :

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad p = \bar{p} + p' \quad (300)$$

em que ' representa a grandeza que sofre flutuação, chega-se às equações de Reynolds.

Equação de Navier-Stokes, sob forma vetorial:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \text{grad} \vec{p} + \rho \vec{F} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (301)$$

$$\nabla^2 \vec{V} \text{ (Laplaciana de } \vec{V})$$

A equação da continuidade, para fluido incompressível,  $\rho = \text{const.}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (302)$$

Projetando-se (301) nos três eixos coordenados e entrando-se com (302), teremos:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right] &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho x + \mu \nabla^2 u \\ \rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (vu)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} \right] &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho y + \mu \nabla^2 v \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (wu)}{\partial x} + \frac{\partial (wv)}{\partial y} + \frac{\partial (w^2)}{\partial z} \right] &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho z + \mu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (303)$$

em que:

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}.$$

Introduzindo-se as equações (300), na equação da continuidade, resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (304)$$

Ora, para os valôres médios se tem:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (305)$$

logo teremos:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (306)$$

A equação da continuidade é, pois, verificada pelo movimento médio, como pelo movimento de flutuação. Introduzindo-se as equações (300) nas equações (303), considerando-se valôres médios e levando-se em conta a equação da continuidade, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right] &= \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho x + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[ \frac{\partial (\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w})}{\partial z} \right] & \\ \rho \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] &= \quad (307) \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \rho y + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left[ \frac{\partial (\bar{u} \bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}^2)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v} \bar{w})}{\partial z} \right] & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] &= \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \rho z + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left[ \frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}'')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}' \bar{w}'')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w}'^2)}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (307)$$

Comparando-se (307) e (301) (projeções), resulta:

Para que o movimento médio verifique as equações de Navier, é necessário acrescentar, como termo corretivo, a força adicional por unidade de massa:

$$\left. \begin{aligned} x' &= - \rho \left[ \frac{\partial (\bar{u}'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}'')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}'')}{\partial z} \right] \\ y' &= - \rho \left[ \frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}'')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}'^2)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}' \bar{w}'')}{\partial z} \right] \\ z' &= - \rho \left[ \frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}'')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}' \bar{w}'')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w}'^2)}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (308)$$

que é devida à turbulência.

Verifiquemos, agora, as modificações que sofrem as tensões normais e tangenciais do movimento médio, em virtude da turbulência do movimento: Das equações gerais, indefinidas de movimento já por nós apresentadas, no início deste capítulo, resulta:

$$\left. \begin{aligned} \rho [x - A_x] + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \rho [y - A_y] + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \rho [z - A_z] + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (309)$$

Substituindo  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$  por expressões equivalentes, e entrando com a equação da continuidade:

$$\left. \begin{aligned}
 \rho X - \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} - \rho u^2) + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yx} - \rho vu) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zx} - \rho wu) = 0 \\
 \rho Y - \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p_{xy} - \rho uv) + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zy} - \rho vv) = 0 \\
 \rho Z - \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p_{xz} - \rho uw) + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yz} - \rho vw) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_z - \rho w^2) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (309')$$

Fazendo-se

$$\left. \begin{aligned}
 p_{xx} &= \sigma_x \\
 p_{yy} &= \sigma_y \\
 p_{zz} &= \sigma_z
 \end{aligned} \right\} \quad (310)$$

Entrando-se com as equações (300) e tomando-se os valores médios, temos:

$$\begin{aligned}
 \rho X - \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}^2 - \rho \bar{u}^2) + \\
 + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yx} - \rho \bar{v}\bar{u} - \rho \bar{v}'\bar{u}') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zx} - \rho \bar{w}\bar{u} - \rho \bar{w}'\bar{u}') = 0
 \end{aligned} \quad (311)$$

Analogamente, teríamos as projeções nos eixos dos ys e zs.

O sistema de equações (311) pode ser obtido a partir de (309'), substituindo-se X, Y, Z por  $X+X'$ ,  $Y+Y'$ ,  $Z+Z'$ .

Logo as tensões que realmente agem na partícula fluida, são as tensões do movimento médio corrigidas pelas tensões devidas à turbulência, ou tensões de Reynolds.

Temos, pois:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}'^2 \\ p_{xy} = \bar{p}_{xy} - \rho \bar{u}' \bar{v}' \\ p_{zx} = \bar{p}_{zx} - \rho \bar{w}' \bar{u}' \end{array} \right\} \quad (312)$$

e assim, sucessivamente, para as demais tensões.

Partindo-se das equações (307) e transformando-as em equações em termos adimensionais, fazendo-se:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \frac{u}{V_0} \quad x_1 = \frac{x}{L} \quad t_1 = \frac{t}{\frac{L}{V_0}} \\ v_1 = \frac{v}{V_0} \quad y_1 = \frac{y}{L} \\ w_1 = \frac{w}{V_0} \quad z_1 = \frac{z}{L} \quad p_1 = \frac{p}{\rho V_0^2} \end{array} \right\} \quad (313)$$

em que:

$V_0$  é a velocidade no domínio do escoamento não perturbado pela turbulência,

$L$  é um comprimento característico;

e sendo o fluido pesado:  $X = Y = 0 \quad Z = -g$  (314)

as equações (307) dão origem ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t_1} + \bar{u}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y_1} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z_1} &= - \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\mathcal{R}} x \\ x [\nabla^2 (\bar{u}_1)] - \left[ \frac{\partial \bar{u}_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial (\bar{u}_1 \bar{v}_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial (\bar{u}_1 \bar{w}_1)}{\partial z_1} \right] & \end{aligned} \quad (315)$$

Analogamente teríamos a segunda equação.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial t_1} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial y_1} + \bar{w}_1 \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z_1} &= - \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial z_1} - g \frac{L}{V_0^2} + \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 (\bar{w}_1) \\ - \left[ \frac{\partial (\bar{u}_1 \bar{w}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (\bar{v}_1 \bar{w}_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial (\bar{w}_1^2)}{\partial z_1} \right] & \end{aligned} \quad (316)$$

Vemos, pois, que para que haja semelhança de escoamento em dois escoamentos livres, turbulentos, é necessário que, entre o modelo e o protótipo subsistam as seguintes relações:

$$\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_P \quad (317)$$

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_P \quad (318)$$

em que

$$\mathcal{F} = \frac{V_0}{\sqrt{gL}} \quad \mathcal{R} = \frac{L V_0}{\gamma} \quad (319)$$

a dimensão  $L$  pode ser tomada igual a  $y_0$ , profundidade normal do canal em estudo, para a vazão  $Q$  considerada, para uma declividade dada (canal super-rápido).

Além dos dois adimensionais citados nas equações acima, deveremos ainda ter a igualdade de:

a) número de Euler

$$E_M = E_P \quad \therefore \quad \frac{p}{\rho V_0^2} = \text{const.} \quad (320)$$

já contido nas equações (313)

b) número de Strouhal

$$S h_M = S h_P \quad (321)$$

ou:

$$\frac{L}{V_0 t} = \text{const.}$$

já contido nas equações (313).

A condição de igualdade dos números de Strouhal é particularmente importante nos modelos de escoamentos instáveis super-rápidos; acarreta uma relação constante entre a componente local e a componente convectiva da aceleração de uma partícula fluida qualquer.

$$\left[ \frac{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}} \right]_M = \left[ \frac{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}} \right]_P \quad (322)$$

e assim sucessivamente. Além dos adimensionais citados, o grau de turbulência, a escala de turbulência e a frequência média das flutuações devem ser idênticas em correntes semelhantes.

Demonstra-se que a energia cinética total do movimento  $E$  é igual à soma da energia  $E_0$  do movimento médio e da energia  $E'$  do movimento de pulsação

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}' \quad (323)$$

$$\bar{E}' = \frac{1}{2} \rho \iiint_{\tau} (u'^2 + v'^2 + w'^2) dx dy dz \quad (324)$$

$\bar{E}'$  é a energia cinética média do movimento provocado pelos turbilhões,

$$e \quad E_0 = \frac{1}{2} \rho \iiint_{\tau} (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \quad (325)$$

Demonstra-se que:

$$\frac{d\bar{E}'}{dt} = \iiint_{\tau} \bar{\phi}' dx dy dz - \iiint_{\tau} \bar{\psi} dx dy dz \quad (326)$$

em que:

$\bar{\phi}'$  é a função de dissipação do escoamento pulsativo para  $\rho = \text{constante}$

$$\bar{\phi}' = \mu \left\{ 2 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (327)$$

em que entram as componentes das velocidades de deformação linear e angular da partícula fluida, no movimento de agitação (pulsativo).

O 1º termo da direita, na equação (326), deve ser negativo, pois que a energia diminui pela ação de dissipação da viscosidade (entende-se a integração rea-

lizada para um limite indeformável, o que não é bem o caso, na superfície do líquido, em contato com o ar).

O 2º térmo  $\iiint_{\mathcal{E}} \bar{\Psi} dx dy dz$  pode mudar de sinal, em função da inércia do fluido; este térmo pode pois ser positivo ou negativo

$$\bar{\Psi} = \rho \left\{ \left( \overline{u'u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{v'v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \overline{w'w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \overline{v'w} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \overline{w'u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \overline{u'v} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right\} \quad (328)$$

Podemos, pois, elaborar um critério para saber se a energia  $E'$  do movimento turbilionar (pulsativo) crescerá ou diminuirá com o tempo, isto é, podemos saber se o movimento turbulento é ou não é estável. Pode, pois, afirmar-se que certos valores de  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$  ou certas combinações simultâneas destes valores serão mais favoráveis que outras à permanência da turbulência.

Na expressão (326) a integral  $\iiint_{(\tau)} \phi' dx dy dz$

mede a quantidade de energia dissipada, por unidade de tempo; é devida só à viscosidade e depende da distribuição instantânea das velocidades (equação 327).

A segunda integral  $\iiint_{\tau} \bar{\Psi} dx dy dz$  repre-

senta a variação de energia dos turbilhões, por unidade de tempo; a energia dos turbilhões não é recuperável por parte da corrente. Ao lado dos grandes turbilhões (macroturbilhões) aparecem outros menores que formam a microturbulência, cuja escala de turbulência é muito menor do que a escala macroturbulenta e que são, segundo Taylor, os principais causadores da dissipação. Os turbilhões maiores se fracionam, dando origem aos microturbilhões e estes, como sua velocidade de rotação é maior, sofrem mais o efeito de frenagem por parte da viscosidade.

A turbulência, segundo constatações realizadas, pode dissipar-se melhor se se destróem os turbilhões maiores.

Quanto à celeridade das ondas, desenvolvendo-se as equações de Reynolds com algumas hipóteses simpli-

ficadoras para canais retangulares com  $R = H$  e com  $\alpha = 1$ , resulta

$$a = V_o \pm \sqrt{g H_o} \quad (329)$$

(ondas curtas de insignificante curvatura, movendo-se sobre a corrente)

Hipóteses formuladas:

a)  $\frac{\partial v}{\partial t} \ll \frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \ll \frac{\partial u}{\partial t}$$

b)  $p_{xx} \approx p_{yy} \approx p_{zz}$

c)  $p_{zy} = 0$

d)  $\frac{\partial}{\partial x} (p_{xy}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} (p_{xz}) = 0$

e)  $\bar{p} = p_a \quad z = H$

f)  $X = gi \quad z = -g$

g)  $u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial t}$

Chega-se à seguinte equação:

$$\frac{w_o^2}{2} - 2 v_o w_o + \frac{v_o^2}{2} - g H_o = 0 \quad (330)$$

que resolvida dá:

$$w_o = \text{celeridade da onda} = V_o \pm \sqrt{g H_o} \quad (331)$$

C - Critério de estabilidade para escoamento em canais abertos

Já foi visto, no estudo do ressalto, que a condição para que o ressalto fosse estável era que o número de Froude  $> \sqrt{3}$ .

No caso de canais super-rápidos, existe também um número de Froude, chamado Froude crítico, acima do qual aparecem as "roll waves"; este problema foi es-

tudado por Vedernikov, que definiu um adimensional, número de Vedernikov, tal que, para  $V > 1$ , ou para  $\mathcal{F} > \mathcal{F}_c$ , aparecem num canal super-rápido, de comprimento conveniente, as "roll waves" perpendiculares ao escoamento, com notável vorticidade e acompanhadas de forte arrastamento de ar, para a parte central da corrente, ar esse que vai se movimentar juntamente com as partículas líquidas, no seio da corrente, com mecanismo análogo ao do arrastamento de pequenas partículas sólidas em suspensão no líquido.

Da equação (326):

$$\frac{dE'}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \iiint_{\tau} \bar{\phi}' dx dy dz = - \iiint_{\tau} \bar{\psi} dx dy dz \quad (332)$$

logo a energia do movimento turbilionario se manteria constante, com o tempo.

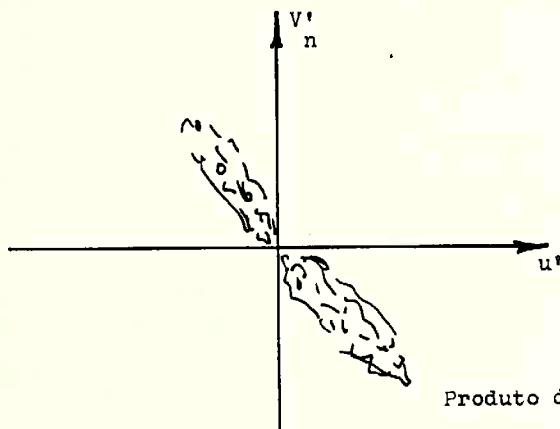
Realizando, com equipamento adequado, levantamentos instantâneos de  $u'$  e  $u'_n$ , poderíamos estudar, num gráfico, se há ou não uma tendência ao predomínio

dos valores de sinal contrários, para se saber se a média de seus produtos é diferente de zero.

Analogamente se procederia para os demais produtos:

$$v'v'_n \quad \text{e} \quad w'v'_n$$

Figura 60



Produto dif. de zero

#### D - Experiências em laboratório

No projeto do modelo para estudo desses canais, além de serem cumpridas as relações expressas nos números de Reynolds, Euler, Froude e Strouhal já cita-

dos, devem ser ainda observados: grau de turbulência, escala de turbulência, freqüência média das flutuações.

Os fatores dominantes que determinam a formação e a propagação das "roll waves" são:

- a) turbulência da corrente
- b) variação das tensões de cisalhamento no perímetro molhado.

- Um problema interessante a examinar em laboratório é o da influência de um aumento de rugosidade no aumento da turbulência transversal e no descrescimento da turbulência longitudinal.

O número de Reynolds é examinado sob o aspecto da influência da viscosidade, na formação das "roll waves".

- É importante, também, o estudo dos efeitos de arrastamento de ar na formação das ondas.

- Outro problema importante, de laboratório, consiste em determinar o menor comprimento do canal para que se formem as "roll waves" no mesmo.

- Sabe-se, de experiências realizadas, que as "roll waves" não se formam em canais muito rugosos; sabe-se, também, que o coeficiente de rugosidade em canais, com escoamento ondular, não deve ultrapassar 0,017 a 0,020.

- Outra série de experiências interessantes são aquelas em que se possa estudar a influência da turbulência na formação das "roll waves" e a determinação, num canal, da zona de formação de ondas.

- Outra série de interesse teórico prático consiste na medida de altura de água, distribuição de velocidades em diversas secções, em diversas normais ao fundo do canal, bem como a variação da percentagem do ar na mistura água/ar (em volume).

- As velocidades podem ser medidas com moinhos especiais, do tipo que permita o registro separado das rotações de sentidos diferentes e com característica de funcionamento linear  $V = KN$ . As pulsações de velocidades podem também ser medidas com aparelhos eletromagnéticos de indução.

- As medidas das flutuações de pressão nas bacias de dissipação constituem, também, outro conjunto de experiências importantes.

- Estudo da influência das grelhas de turbulência sobre a formação das "roll waves"; deslocamento, para jusante da região de formação das ondas de superfície.

- Medidas da celeridade de propagação das ondas, no canal.

- Determinação (medição) das velocidades próximas do leito, para canais de pequena altura de água.

- Ensaios devem ser realizados com diversas formas de secções transversais de canais, objetivando conseguir secções que não favorecem a formação das "roll waves".

Estudos recentes têm mostrado que as flutuações de grandezas hidrodinâmicas e cinematicas dependem dos seguintes fatores:

- a) Estrutura da corrente
- b) Escoamento da camada limite nas proximidades das paredes do canal
- c) Distribuição das pressões hidrodinâmicas numa secção da corrente.

- Medida de flutuação de pressões, na camada limite por meio de "strain gages" colocados em linha, no eixo do canal ensaiado. Estes "strain gages" são ligados a instrumentos que apresentam os gráficos de flutuação; são os oscilógrafos.

- Fotografia da corrente em escoamento, tornando possível a documentação das flutuações da corrente, com o tempo. A partir das experiências de Townsend e Feidin podem utilizar-se bôlhas de ar, na corrente; quando a corrente super-rápida for suficientemente iluminada, as bôlhas de ar, movimentando-se, são visíveis nitidamente, proporcionando, assim, através de fotografias tiradas com tempo de exposição conveniente, determinar a velocidade, em diversos pontos e diversos instantes.

- Filmagem da corrente com uma velocidade de 200 a 5000 quadros/segundo, nos escoamentos ondulares.

- Pesquisas para se determinar a altura máxima de água num canal  $h_{max}$  em função da altura do escoamento uniforme, correspondente à descarga máxima, com ondas.

- Estudo da distribuição das componentes pulsativas e das componentes reduzidas às médias de velocidade, filmando e fotografando as partículas móveis; estes estudos são de interesse para o estudo da ação do movimento sobre as estruturas e para determinar as resistências hidráulicas, de forma suficientemente bem acurada. Através destes estudos podem também estudar-se as ondas intermitentes em canais lineares retangulares.

- Estudo da pulsação das velocidades com aparelhos de grande sensibilidade, estabilidade, fidelidade.

O anemômetro térmico utilizado amplamente em aerodinâmica, é de difícil utilização nos escoamentos de líquidos. Um método importante para o estudo do escoamento é o da foto-cinematografia. Materializa-se, com um ritmo adequado de imagens, numa primeira aproximação, o movimento "molar" do fluido. Aplicando-se à esterofotografia e calculando convenientemente os resultados a partir das imagens obtidas, podem obter-se as características de todas as componentes das velocidades.

Podem utilizar-se, também, molinetes para medir as macropulsações de velocidades nas instalações de proporções convenientes, desde que se determine o comprimento de sincronização dos mesmos e que as demais propriedades já citadas sejam cumpridas.

- Medidas da diminuição da turbulência, através do ressalto, para números de Froude de 5 até aproximadamente 40, numa altura conveniente acima do fundo do canal; estas medidas podem ser realizadas por meio de um micromolinete convenientemente projetado, com baixíssimo momento de inércia; as indicações deverão ser gravadas por aparelhagem eletrônica adequada.

E) Estudo de secções transversais que não propiciem a formação de ondas em canais

A partir dos estudos feitos a respeito dos critérios de estabilidade dos escoamentos, em canais super

rápidos, e já por nós relacionados, na literatura, através do critério de Vedernikov, com escolha conveniente de um tipo de perfil que dê um coeficiente de forma  $M = 1 - R_H \cdot dP/dA$  tal que para a mesma velocidade média da corrente a mesma celeridade de onda, no canal, e mesmos expoentes das grandezas que permitem calcular a perda de carga linear, resulte um coeficiente de Vedernikov menor que 1 ( $V < 1$ ).

Canais lisos:

$$V = \frac{M v (1 + \beta)}{(2 - \beta)(w - v)} \quad (\text{já relacionada})$$

Canais rugosos:

$$V = \frac{M v}{p (w - v)} \quad (\text{já relacionada})$$

em que:

$$M = 1 - R_H \frac{dP}{dA} \quad (\text{já relacionada})$$

em que:

$v$  é a velocidade média do escoamento

$w$  é a celeridade da onda

$p$  e  $\beta$  expoentes de:

$$I = \frac{A v^p}{R_H^{1+\beta}} \quad (\text{já relacionada})$$

Utilizando-se o critério semi-empírico, formulado por K.I. Arsenishvile, obtido a partir da equação de Saint-Venant e da equação da continuidade, temos:

a) Critério do perfil sem ondas:

$$\frac{H_0}{P_0} \geq 0,10 \quad (\text{já relacionadas})$$

b) Critério empírico que dá o intervalo de declividade que pode dar origem a ondas

$$0,02 < i < 0,35$$

Diversas pesquisas realizadas em canais retangulares e trapezoidais deram origem a secções transversais muito estreitas e profundas; foram estudadas por

Arsenishvile outras secções, como a semi-circular, a triangular, levando-se em conta a rugosidade, vazão e altura de água.

A partir das experiências de Arsenishvile, este pesquisador indica como perfis favoráveis à eliminação de ondas (com declividade conveniente) os seguintes:

a) Perfil triangular com  $\phi \leq 160^\circ$

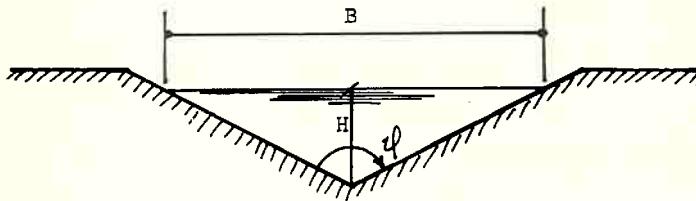


Figura 63

b) Perfil de segmento circular com  $r = 1,3 H_{\max}$ .

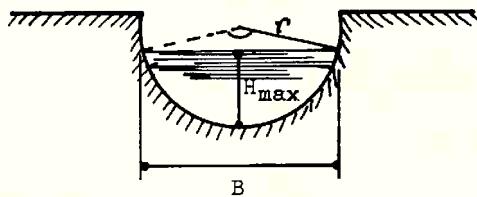


Figura 64

c) Perfil parabólico com  $p \leq 0,6$

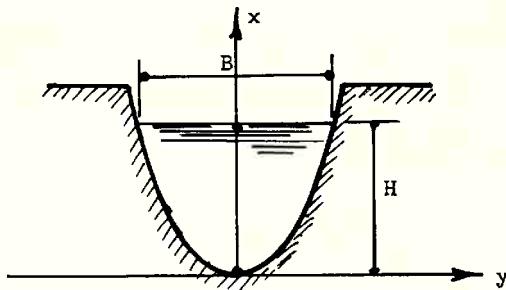


Figura 65

$$y^2 = 2 px$$

d) Perfil composto

$r$  = raio da parte do perfil segmento de círculo

$$r = \frac{2 m H_{\max}}{2 \operatorname{sen} \frac{\phi_0}{2}}$$

$$r = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\phi_0}{2} \sqrt{2(1 - \cos \phi_0) + m(\phi_0 - \operatorname{sen} \phi_0) - 0,2 m \phi_0}}{2 \operatorname{sen} \frac{\phi_0}{2}}$$

com  $\phi_0$  (ótimo) =  $90^\circ$

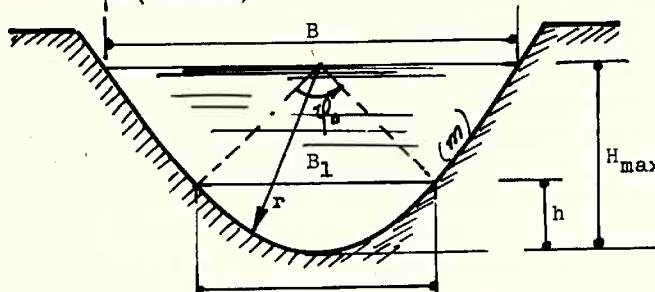


Figura 66

e) Perfil composto, com segmentos:

$$m_2 \leq m_1$$

$$\text{com } \phi \leq 160^\circ$$

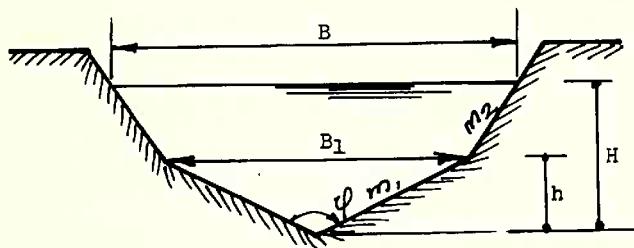


Figura 67

Pode empreender-se um conjunto de pesquisa visando determinar outras possíveis formas de secções transversais, que satisfaçam um dos critérios de estabilidade, apresentados na literatura e em particular os critérios de Vedernikov ou o de Arsenishvile.

F) Estudo de dissipadores de energia, a jusante de canais super-rápidos

As correntes de escoamentos super-rápidos, em virtude da elevada energia cinética do movimento médio e da elevada turbulência superficial não são tranquilizadas, satisfatoriamente, por meio de bacias de dissipaçāo tradicionais; as dimensões destas seriam algumas vezes maiores do que as projetadas para correntes de declividade forte, se dispositivos apropriados não fossem utilizados.

O trabalho eficiente de uma bacia de tranquilização exige que a vazāo seja uniforme ao longo da entrada do dissipador.

A corrente ondular ultra-rápida flui, com vazāo variável, a vazāo mais elevada sendo localizada na

direção da frente de onda formada; esta corrente deve dar origem a nova corrente, com vazão constante na entrada do dissipador.

São chapas com orifícios, de área variável. A corrente passando através dos orifícios destas chapas é dividida em jatos de pequeno diâmetro, o que dá origem a uma redução da carga específica da corrente. A área dos orifícios vai variando para jusante do mesmo modo que a vazão recebida do canal. A onda de alta celeridade e grande altura forma-se no começo do dissipador de energia de onda. Como vai ocorrer, nesta região, a maior carga específica, a área total dos orifícios, na placa, deve ser mínima. A altura da onda decresce, bem como a altura das ondas que se movimentam na frente e então é necessário aumentar a área total dos orifícios na chapa, de modo a proporcionarem a mesma vazão obtida nos orifícios do início do tranquilizador. Na literatura citam-se dois tipos de dissipadores:

- a) de frestas longitudinais alargando-se gradualmente para jusante
- b) do tipo celular, com orifícios cujo número aumenta para jusante.

Este tipo de dissipadores deve funcionar pelo princípio de destruição dos macro-turbilhões contidos na corrente, pois, como já vimos no sub-tópico C, a turbulência pode dissipar-se melhor se se destruirmos os turbilhões maiores.

Os dissipadores de energia de onda podem ser de aço ou de concreto armado, ou protendido. Sua superfície pode apresentar diversas rugosidades.

Se  $S_1$  é a secção da onda do canal junto ao dissipador e  $S_2$  é a área dos orifícios no início da chapa (na unidade de largura), então pode determinar-se experimentalmente uma relação entre  $S_1$  e  $S_2$  de modo a obter o mínimo de flutuações de altura na bacia de tranquilização:

$$S_2 = K S_1 \quad (333)$$

sendo  $K$ , segundo Arsenishvili - Effect of Wave Formation on Hydro-Engineering Structures - variável entre:

- |         |                     |
|---------|---------------------|
| 14 a 16 | - Dissipador rugoso |
| 20 a 22 | - Dissipador liso.  |

Para se calcular  $S_1$ , calculam-se também a altura de onda e o comprimento pelas expressões fornecidas também por Arsenishvili (equações empíricas)

$$h_{b_{\max.}} = \alpha h_0 \quad (334)$$

$h_0$  é a altura de água calculada para um escoamento uniforme com uma vazão igual à máxima descarga com onda

$\alpha$  é um coeficiente empírico, variando de 1,8 a 2,0

O mesmo autor fornece uma equação empírica para o máximo comprimento da onda, em m.

$$[L_{b_{\max.}} = 10,8 h_{b_{\max.}}^{0,48}] \quad (335)$$

O comprimento do dissipador pode ser determinado pela seguinte equação obtida, também, por Arsenishvili

$$L_{\text{dissip.}} = 1,70 \cdot E^{0,24} \quad (336)$$

em que  $L$  é o comprimento do dissipador

$E$  = energia de onda considerada em la, aproximação como solitária

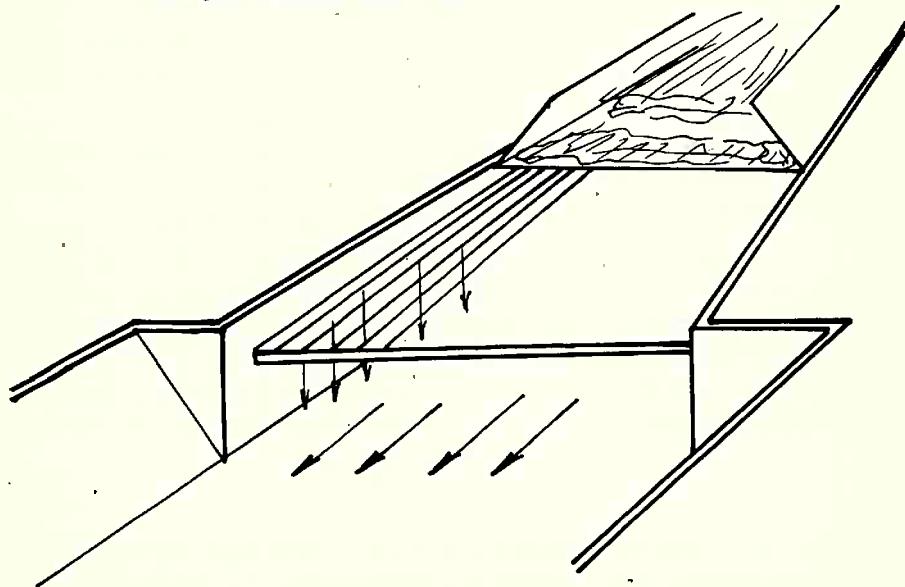


Figura 68

$$[E \approx \left(\frac{V}{2 y_0}\right)^3 \gamma] \quad (336')$$

$V$  = volume da onda por m de largura

$y_0$  = profundidade de água no canal

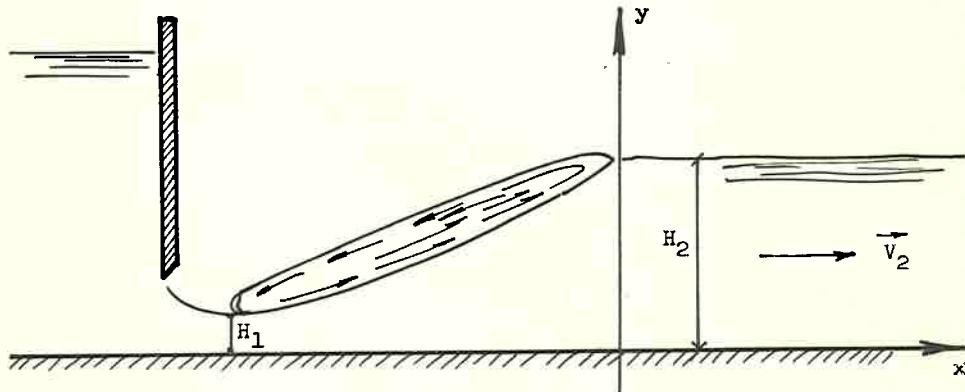
$\gamma$  = peso específico do líquido.

Estes dispositivos tranquilizadores (placas perfuradas ou pisos com frestas) devem funcionar, aproximadamente, como grelhas de redução de turbulência.

Quando o ressalto que se forma na bacia de dissipação recebe uma corrente de um canal com declividades, inferiores às consideradas no escoamento super-rápido, então Jiri Kalis, do Instituto Científico de Pesquisas Hidrotécnicas da Universidade de Brno, já provou, a partir de medidas por él realizadas, que a equação relacionando  $V_2$  e  $u_2$  na secção a jusante do ressalto é análoga às relações encontradas para a diminuição da turbulência através de uma grelha, em túneis aerodinâmicos, a saber:

$$\frac{V_2}{\sqrt{u_2^2}} = 0,35 \left[ \frac{x}{H_2 - H_1} \right] + 10,7 \frac{H_1}{H_2} \quad (337)$$

Figura 69



Porém, quando o dissipador recebe uma corrente de canal super-rápido, com alta energia cinética e alta turbulência, o ressalto que se formaria no dissipador

dor teria características diferentes, acarretando aumento sensível nas dimensões da bacia de tranquilização. Utilizam-se, então, os dispositivos citados, medindo-se as velocidades  $V_2$  médias na saída do dissipador e as flutuações de velocidades  $u'$  nessa secção. O dimensionamento deve ser tal que conduza a uma equação do tipo da (333), a saber:

$$\frac{V}{\sqrt{\bar{u}'^2}} = \frac{A_1}{M} x + B \quad (338)$$

em que:

$$\frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{V} = \text{grau ou intensidade de turbulência}$$

$V$  é a velocidade média na secção de saída do dissipador (grelha)

$\bar{u}'^2$  é o afastamento quadrático médio das flutuações de velocidade, ao longo do eixo dos  $x$ , à distância  $x$  da secção terminal da grelha,

$M$  é a constante da grelha (dimensão de um comprimento),

$A_1$  uma constante fixada para uma forma da grelha, e

$B$  uma constante dependendo da escolha da origem do sistema de coordenadas.

Esta equação (338) é obtida supondo-se a turbulência isotrópica através da grelha ( $\bar{u}'^2 = \bar{v}'^2 = \bar{w}'^2$ ). Segundo Taylor, o valor da energia de dissipaçāo é:

$$E = \frac{15 \mu \bar{u}'^2}{\lambda^2} \quad (339)$$

$\mu$  = coeficiente de viscosidade

$\lambda$  = dimensão aproximada dos pequenos turbilhões que são a causa da dissipaçāo de energia.

Determinando-se, experimentalmente, as constantes  $A_1$  e  $B$ , para os dispositivos de dissipaçāo citados, chegamos a uma equação formalmente análoga à (337); esta determinação deve ser feita para diversos números de Froude de 5 a 40, por exemplo.

Na equação (337)  $H_2 - H_1$  corresponde à constante  $M$  da grelha.

Pode, pois, apreciar-se a estabilidade do leia-

to a jusante do dissipador; esta estabilidade é tanto maior, quanto menor fôr a velocidade máxima nas proximidades do leito. Temos, aproximadamente:

$$u_{\max} \approx \bar{u} + 3 \sqrt{\bar{u}^2} \quad (340)$$

$\bar{u}$  = velocidade média no ponto considerado, a 0,2 H<sub>2</sub> do fundo do canal.

Com as equações (339<sup>1</sup>), (340) e (334) pode, pois, fazer-se um pré-dimensionamento médio dos orifícios do dissipador.

G - Distribuição de velocidades, ao longo de uma vertical. Coeficiente de Chézy para um escoamento super rápido (considerado em primeira aproximação um escoamento axial).

Como já vimos, na literatura, a curva de distribuição de velocidades que se obtém nos levantamentos efetuados, ao longo de normais ao fundo, nêstes canais, é semelhante à curva obtida em canais de declividade fraca e forte, na região próxima das paredes, nas camadas inferiores só de água, apresentando diferenças na região mais central do escoamento, em função da forma da seção considerada e da energia cinética do escoamento. Os gráficos de distribuição das velocidades em correntes com ondulação devem ser analisados através da teoria da turbulência.

A transição de um movimento rápido a super-rápido é devida à velocidade média e a outros fatores; verifica-se, também, experimentalmente, que, para velocidades muito elevadas e números de Reynolds altos, pode ocorrer escoamento super-rápido, sem ondas que é chamado escoamento impetuoso. Nêstes escoamentos há, obviamente, grande domínio das forças de inércia sobre as forças de gravidade, pressão e viscosidade; não se formam, pois, as ondas "roll waves". Através de numerosos ensaios, realizados por diversos pesquisadores, chega-se à conclusão de que as velocidades médias numa seção qualquer de um escoamento super-rápido são maiores do que os valores calculados, por exemplo pela equação de Nikuradse, já citada. Podemos atribuir tal fato à influência da celeridade da onda superficial, e consequentemente a condições peculiares de turbulência em escoa-

mentos super-rápidos.

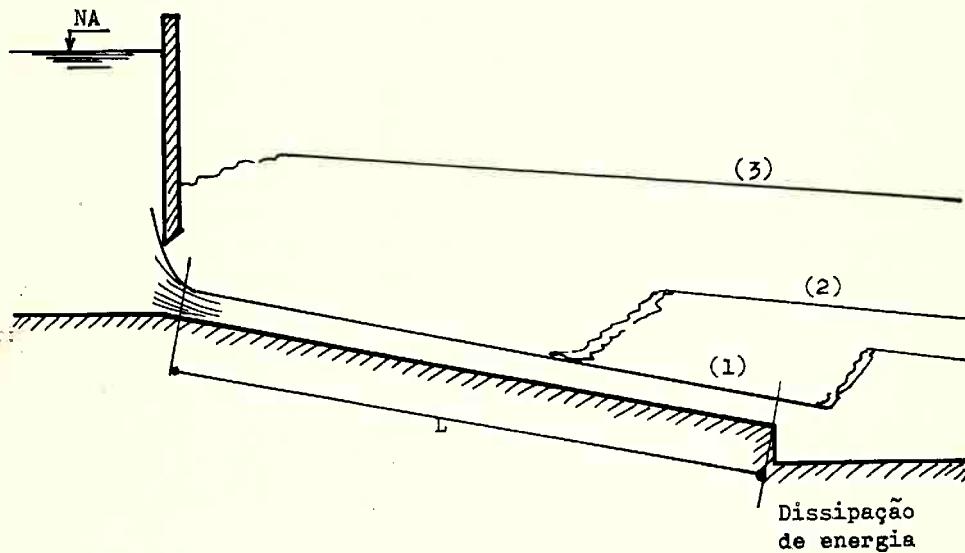
Estas diferenças observadas na distribuição de velocidades em canais em regime super-rápido, levaram pesquisadores a formular uma lei empírica de determinação do coeficiente de Chézy em função de  $R$  ( $n^o$  de Reynolds), número de Froude ( $F$ ) e número de Vedernikov ( $V$ ).

$$C = 41,2 \log \left[ \frac{R}{C} \right] + 42,3 F - 21,8 V - 113,7 \quad (341)$$

III.4.2 - Escoamento livre, num canal de descarga de fundo, através de uma aduifa

Seria analisado de forma análoga o problema de escoamento num canal dêste tipo.

Figura 70



## CAPÍTULO IV

### COMENTÁRIOS

IV.1 - Hall L. Standish elaborou, como já vimos, na Literatura, um estudo de escoamento em canais super-rápidos, sob a forma global. Assimilou este tipo de escoamento a um escoamento axial, o que não é exato, em virtude da turbulência desenvolvida. Utiliza a equação da continuidade aplicada às correntes, (axiais), calculando a vazão em função da área molhada total do escoamento, da velocidade média da corrente, na secção em observação e da percentagem, em volume, de água na mistura ar-água. Apresenta uma equação de equilíbrio, componente do peso na direção do movimento e resistência ao escoamento no filme laminar, junto à parede, chegando a uma equação análoga à de Chézy. Aplicou a equação de Bernoulli à corrente, considerada axial, e chegou a uma equação que permite calcular a variação da velocidade ao longo do canal; conhecida a vazão, determina consequentemente as alturas de água no canal, ao longo do mesmo.

Acreditamos que, para elaboração de um anteprojeto, esta equação obtida por Hall pode ser utilizada desde que se tenha um levantamento detalhado da percentagem, em volume, da água na mistura água/ar.

IV.2 - Keulegan, G.H. e Paterson, G.W., em seu trabalho, estudaram um critério de instabilidade de escoamentos em canais inclinados, impondo para um elemento de volume duma onda de translação formada, com curvatura considerada, à seguinte relação:

$$\frac{d h}{d t} > 0$$

Esta condição, aplicando-se as equações de .. Boussinesq e as fórmulas de Manning ou de Chézy, conduz a:

$$i > 2 \lambda_0 \quad (\text{já apresentada})$$

Neste trabalho não se leva em conta o estado de turbulência da corrente, nem tão pouco as correntes secundárias que dependem da forma da secção.

IV.3 - Einstein, H.A. e Sibul, O. estudaram o escoamento em canais abertos, com mistura água-ar, por analogia com o transporte de sedimentos pelas correntes líquidas. Chegaram também à conclusão de que a concentração de ar na massa líquida da corrente, ao longo de uma vertical, segue as leis de distribuição de concentração de materiais sólidos em suspensão numa corrente líquida.

O estudo do deslocamento de bôlhas de ar no seio da corrente não se pode, porém, realizar análogamente ao estudo de transporte de material sólido em suspensão, para correntes de baixa turbulência, pois neste caso (baixa turbulência) podem utilizar-se as equações de Reynolds, em que se admite para o movimento médio, proporcionalidade entre tensões e respectivas velocidades de deformação lineares ou angulares; não é o que ocorre para elevada turbulência.

Tecem considerações sobre escolha conveniente de escala em modelos deste tipo que achamos de grande interesse na fixação das escalas de modelos hidráulicos de canais em escoamentos super-rápidos. Chamam a atenção para o fenômeno do ar arrastado pela corrente que depende do padrão interno de turbulência que é afetado pelo número de Reynolds e da tensão superficial da água, na corrente, que determina parcialmente o volume das bôlhas individuais de ar.

IV.4 - Halbronn, G. desenvolveu seus trabalhos, precisando, com boa aproximação, o início da formação das "roll waves" em canais em regime super-rápido, a partir da teoria da camada limite turbulenta que se forma nas vizinhanças do leito do canal. A região de limitada por Halbronn corresponde ao encontro da camada limite turbulenta com a superfície livre da corrente.

Não dá, porém, equacionamento ao problema de correspondência da intensidade de turbulência na superfície com o arrastamento de ar. Achamos este trabalho, de alto interesse para a previsão da secção de inicio da formação das "roll waves" e consequentemente do compri-

mento mínimo do canal para que se verifique o fenômeno. Estudando as equações da camada limite turbulenta, Haltbronn G. prova que o ponto crítico se desloca para jusante quando se aumenta a vazão sobre o canal.

IV.5 - Chen-Che-Pen, M., apresenta um trabalho de cunho experimental, comparando a perda de carga em condutos circulares, para uma dada vazão e rugosidade equivalente, com a perda de carga em condutos, com outras secções. Em virtude das correntes secundárias que se formam e que vão exercer sua ação na estabilidade da superfície da corrente, chega à conclusão de que, a partir dos dados experimentais, o coeficiente de Chézy em condutos livres em regime turbulento rugoso deve ser da seguinte forma:

$$C = f \left[ \frac{\chi}{b}, F \right] \quad \text{obtida de} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} = G_1 (F_1, \frac{\chi}{b}, \chi)$$

em que:

$\lambda$  é o coeficiente de perda de carga em condutos de secção qualquer

$\lambda'$  é o coeficiente de perda de carga em condutos circulares.

IV.6 - Abecasis, F.M., Manzanares, no seu trabalho "Soleiras descarregadas - Alguns problemas especiais", apresenta um estudo dos problemas que se ligam com a estabilidade da veia descarregada e com fenômenos de cavitação em paramento de soleiras descarregadoras. Realiza suas experiências com pressão atmosférica reduzida na escala dos comprimentos, sobre o modelo, de modo que as condições de estabilidade da veia líquida no modelo e no protótipo seriam semelhantes.

Passa a citar as diversas escalas utilizadas em seus ensaios, bem como as depressões que utilizou nos diversos trabalhos feitos.

Como no estudo de dissipadores de energia em canais super-rápidos há possibilidade de ocorrer início de cavitação em alguns pontos, necessário se torna levar em conta o índice de cavitação  $K$ :

$$K = \frac{p_o - p_v}{\rho \frac{V_o^2}{2}} \quad (342)$$

$p_o$  é a pressão num determinado ponto do sistema, fora da zona de cavitação  
 $p_v$  é a pressão no interior das bôlhas de cavitação  
 $V_o$  é a velocidade num ponto de referência do escoamento.

As condições de semelhança à cavitação são, também, influenciadas pela concentração de ar, dissolvida na água.

IV.7 - Mikio Hino - Partindo das equações:

$$\frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{V_*} = f_1 \left( \frac{Y}{h} \right) \quad (I = \text{intensidade de turbulência segundo } x)$$

$$\frac{L}{h} = f \left( \frac{Y}{h} \right) \quad L \text{ é a macro-escala de turbulência}$$

$$\frac{\lambda^2 \sqrt{\bar{u}'^2}}{V L} = \text{const.}$$

em que  $\lambda$  é a micro-escala de turbulência; é aproximadamente constante, próximo à superfície  
 $\gamma$  é o coeficiente cinemático da viscosidade da água.

Aplica a equação do momentum a uma gôta de água, considerando a ação sobre a gôta de tensão superficial, do campo gravitacional e do momentum da gôta quando emerge da superfície de separação.

Elabora um gráfico  $h$  (altura de água no canal em função de  $I$  que é o seno da declividade do leito do canal. Compara a equação  $hI = \text{const.}$  com a equação de Pavel para a região de escoamento emulsionado. Aplica a teoria estatística da turbulência para chegar aos parâmetros de concentração na região superior do escoamento e na região inferior.

Neste estudo Mikio Hino apresenta analogia entre o parâmetro na região superior, obtido por Straub L. G. e Anderson, A.G. e a distribuição de concentrações ob-

tida por Viparelli, M.

IV.8 - Powell, Ralph W., - Focaliza Powell o critério de Vedernikov, para os escoamentos ultra-rápidos. Quando  $V$ , número de Vedernikov, excede 1, o escoamento é ultra-rápido, formam-se "roll waves". É um critério global que considera coeficientes da equação de perda de carga, coeficiente de forma, velocidade média numa secção transversal do canal e celeridade das ondas no canal.

Para um intervalo conveniente de declividades este critério dá resultados concordantes com outros critérios já citados na Literatura. Não explica, porém, porque é que, acima de um determinado valor, não se formam mais as "roll waves", embora com uma turbulência de maior intensidade na superfície (escoamento ultra-rápido, impetuoso). Somos levados a crer que, para números de Vedernikov não muito elevados, funciona satisfatoriamente este critério. Quando a turbulência e a energia cinética da corrente aumentam, temos de recorrer à teoria estatística da turbulência para conseguir equacionar o problema.

O coeficiente de forma  $M$  dá resultados abaixo dos obtidos por Arsenishvili, K.I.

A experiência tem mostrado que a formação das "roll waves" é ligada à magnitude da resistência de atrito nas paredes do canal que depende, por seu turno, da forma da secção transversal do canal.

IV.9 - Viparelli, M., em suas pesquisas, afirma que nos estratos superiores de água e de ar, que constituem a superfície livre das correntes normais em canais de pequena declividade, pode observar-se uma espessura proporcional ao produto da altura cinética, correspondente à velocidade máxima, por um parâmetro  $\sigma$ , assimilável ao afastamento quadrático médio da Estatística.

Tal parâmetro depende da rugosidade das paredes e não varia, sensivelmente, com a velocidade, nem com a declividade da corrente. Verificou que a lei de distribuição logarítmica de velocidades deve também ser aplicada aos casos em que a constante  $K$  de Karman seja diferente de 0,40.

Chega a uma equação relacionando a vazão hídrica  $q$  através de área unitária, com  $q_{\max}$  e com  $y-h'/\sigma_*$  (ajustamento reduzido da Estatística), para  $y > h'$  ( $h'$  corresponde a  $q_{\max}$ ), chegou à seguinte equação:

$$q = q_{\max} \cdot e^{-1/2 \left( \frac{y-h'}{\sigma_*} \right)^2} \quad (\text{já relacionada})$$

que, como já vimos, apresenta certa analogia com o parâmetro da região superior (ar mais água) obtido por ... Straub e Anderson. Estudou Viparelli predominantemente, em seu trabalho, a perda de carga e a distribuição de ar a diversas distâncias do fundo.

Determinou a vazão total circulantes, somando a vazão nas camadas hídricas inferiores ( $\Omega u$ ) com a vazão na camada superior (ar-água), isto é,  $Q_s(h)$

$$Q_T = Q_s(h) + \Omega u \quad (343)$$

em que:

$$Q_s(h) = 0,5 \sqrt{2\pi} \sigma \frac{V^3}{2g} \quad (344)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_*}{\delta_{\max}} \quad (345)$$

$\sigma_*$  = afastamento quadrático médio estatístico

$\Omega$  = secção molhada da corrente inferior

$V$  = velocidade máxima da corrente inferior

$u$  = velocidade média

$$\text{da corrente inferior } V \approx \sqrt{2g\delta_{\max}} \quad (346)$$

or

Não considerou, porém, Viparelli o caso de escoamentos pulsativos (com formação de "rool waves").

Aconselha, finalmente, a comparar os resultados de sua pesquisa com os modernos estudos estatísticos de turbulência. Já vimos a relação dos estudos de Viparelli M. com os de Straub e de Anderson.

IV.10 - Arsenishvili, K.I. elaborou um critério semi-empírico de formação de ondas, no escoamento num canal. Parte da equação de Saint Venant do movimento de uma corrente, num canal, e da equação da continuidade, aplicada às correntes de fluidos incompressíveis, em regime variado.

la. equação de Saint Venant:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S_u) = 0 \quad (\text{continuidade}) \quad (347)$$

2a. equação de Saint Venant:

$$-\frac{u^2}{C^2 R_H} = \frac{\partial y}{\partial x} - i + \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (348)$$

Ora, a obtenção da 2a. equação de Saint Venant leva em conta que  $\tau_0$  (tensão de cisalhamento viscoso na subcamada limite) seja constante em todo o perímetro molhado do canal, o que de fato não é exato, levando-se em conta, principalmente, a ação das correntes secundárias do 2º tipo, já citadas.

De outro lado, a secção molhada  $S$  de (347) terá, em problemas de escoamento super-rápido, variação algo complexa, o que torna um pouco difícil a solução da equação.

Nenhuma condição, ligada à turbulência da corrente é considerada, em adendo às equações (347) e (348). Chega, finalmente, a uma expressão geral de instabilidade do escoamento, do tipo:

$$\frac{1}{M} > (N - 1) \quad (349)$$

em que:

$$M = \frac{S_o B_o}{Q_o} \sqrt{\frac{g}{i \chi_o}} \quad (350)$$

$B_o$  é a largura de água na superfície (escoamento estável)

$S_o$  é a secção molhada, no escoamento estável

$\chi_o$  é o perímetro molhado, no escoamento estável

$$N = \frac{S_o K'}{B_o K} \quad (351)$$

$K$  é a capacidade de transporte do canal

$$K' = \frac{d}{d} \frac{K}{H} \quad (352)$$

$H$  é a altura de água na corrente =  $H_0 + \Delta H$ .

Chegou, finalmente, à seguinte equação:

$$\frac{H}{\chi_0} \geq 0,10 \quad (\text{já relacionada}) \quad (A_2)$$

como critério de estabilidade do escoamento uniforme; para  $H_0/\chi_0 < 0,10$ , o movimento passa a ser ondular.

Este critério está ligado à forma da secção em estudo. Chegou à conclusão de que este critério sózinho é insuficiente, para estabelecer o tipo do movimento; é condição necessária, porém não suficiente. É óbvio que assim seja, pois não foi considerado, na obtenção desta condição, o mecanismo da turbulência no escoamento e que certamente irá influir nas condições de instabilidade do escoamento. Chegou, através de resultados experimentais, à conclusão de que é necessária uma declividade do leito do canal variando entre 0,02 e 0,35 para que apareçam as "roll waves" em canais de rugosidade não muito acentuada (critério  $A_1$ , experimental).

Nalguns canais, porém, dá-se a formação de .. "roll waves" com declividades superiores a 0,35. Foi verificado que as "roll waves" só se formam em certos trechos do canal com declividade inferior a 0,35.

Apresenta uma série de secções transversais de canais, sem ondulações, calculadas de acordo com o critério  $A_2$ , satisfeitas as condições de  $A_1$  ( $0,02 < i < 0,35$ ). Apresenta, finalmente, dois tipos de dissipadores de energia, a jusante de canais em regime super-rápido.

#### IV.11 - Outros pesquisadores:

IV.11.1 - Ghambarian, H.H. - Institute of Water Problems - Armenian - SSR.

Fornece relações empíricas entre os parâmetros das ondas (comprimento, profundidade na região da crista, período e velocidade de propagação da onda). Através da teoria estatística estocástica, chegou às seguintes relações:

a) Comprimento de onda:

$$\frac{\bar{\lambda}}{F_{r_0}} = 0,074 (\bar{S}/4,2 F_{r_0}^{2/3} - 1) \quad (353)$$

b) Período:

$$\bar{T} = 1,9 [\bar{S}/4,2 F_{r_0}^{2/3} - 1] \quad (354)$$

c) Velocidade de propagação da onda:

$$\bar{a} = 2,2 V_0^{2/3} \quad (355)$$

em que:

$$\bar{S} = \frac{S \ i}{h_{K_p}} \quad (356)$$

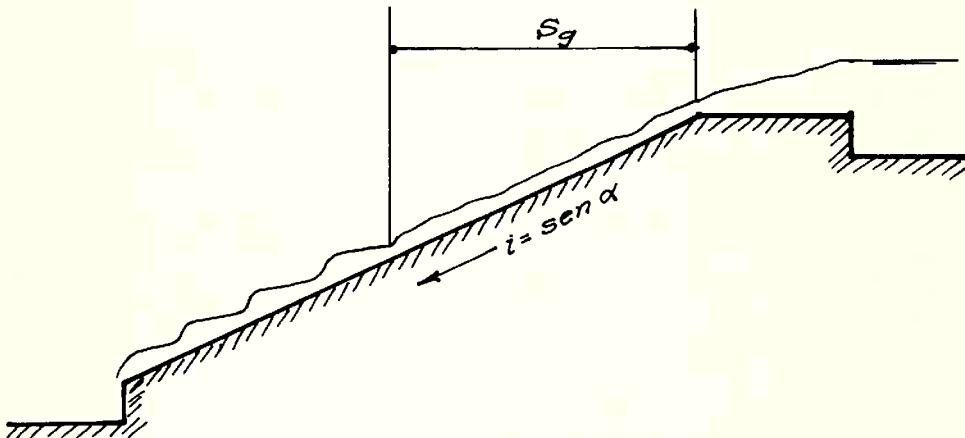
em que:

$S$  é a distância da origem do canal à secção de formação das "roll waves"

$i = \operatorname{sen} \alpha'$  (declividade do canal)

$h_{K_p}$  é a altura crítica do escoamento

Figura 71



$$\bar{S}'_g = K F_{r_0} = 4,2 F_{r_0} \quad (357)$$

$$\bar{S}'_g = \frac{S_g \ i}{h_0} \quad (358)$$

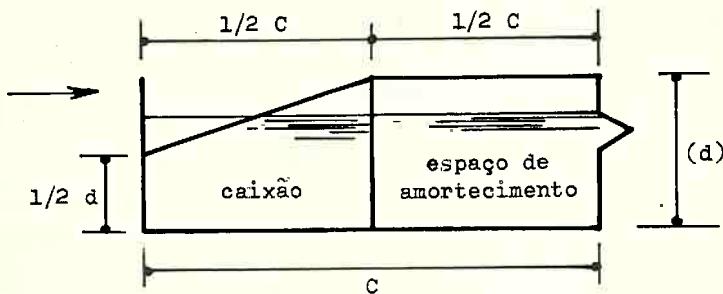
$S_g$  é a distância do início do canal até a secção de formação das "roll waves"

$h_0$  é a altura do escoamento uniforme

IV.11.2 - Haindl, K. - Hydraulic Research Institute  
Praga - Checoslováquia

Num estudo experimental, compara os efeitos das ondas de translação no canal super-rápido sobre a ondulação da superfície na bacia de tranquilização e no leito a jusante. As ondas de translação fazem nascer, no leito a jusante, ondas de uma altura várias vezes maior. Mostra que o aumento do comprimento do dissipador não resolve o problema criando uma maior ondulação no leito a jusante; a carga correspondente à menor espessura da secção de entrada da bacia de amortecimento dá origem a uma ondulação maior. Sugere o amortecimento da ondulação por meio de caixões de amortecimento, colocados acima da soleira.

Figura 72



Outro sistema adotado é o da colocação conveniente de chute blocks colocados na entrada da bacia, ocasionando defasagem das ondas de translação, na embocadura da queda.

IV.11.3 - Anderson, Alvin G. - St. Anthony Fall Hydraulic Laboratory - University of Minnesota - Minneapolis, Minnesota - USA.

Influência das rugosidades de um canal na aceleração do escoamento, num canal aberto, com alta velocidade.

Expõem os resultados de um estudo experimental sobre arrastamento de ar nos canais de forte declividade e de grande declividade; estudou duas rugosidades diferentes. A concentração do ar, na água e as características do escoamento são comparadas as do escoa-

mento não arejado, nos canais lisos e rugosos. A concentração de ar média depende da velocidade de cisalhamento a uma potência variável e da profundidade de transição. A potência é tanto maior quanto mais rugoso for o canal. Um aumento de rugosidade acarreta maiores concentrações de ar e proporciona u'a mistura mais intensa. A velocidade média do escoamento, a profundidade efetiva e a profundidade máxima aumentam.

IV.11.4 - Iwasa, Yoshiaki - Professor of Hydraulics, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering - Kyoto University, Kyoto - Japan  
Hirogi - Nakagawa e Sei-Fujimoto

Apresentam, neste trabalho, três tipos de dissipador de energia: ressalto hidráulico, trajetória e o tipo de colchão de água. Apresentam alguns exemplos de dissipadores de energia.

IV.11.5 - Abecasis, F.M. - Chefe do Serviço de Hidráulica do Laboratório Nacional de Engenharia Civil - Lisbôa, Portugal.

Abecasis, estudando os riscos de cavitação, faz a hipótese de que o valor das amplitudes das oscilações turbulentas da pressão numa parede plana em contacto com um escoamento em alta velocidade, só depende dos valores da rugosidade da parede e da velocidade de atrito ( $V_*$ ) do escoamento. Apresenta resultados de ensaios que permitiram verificar esta hipótese e estabelecer a relação entre estas três grandezas.

(V. gráfico da página seguinte)

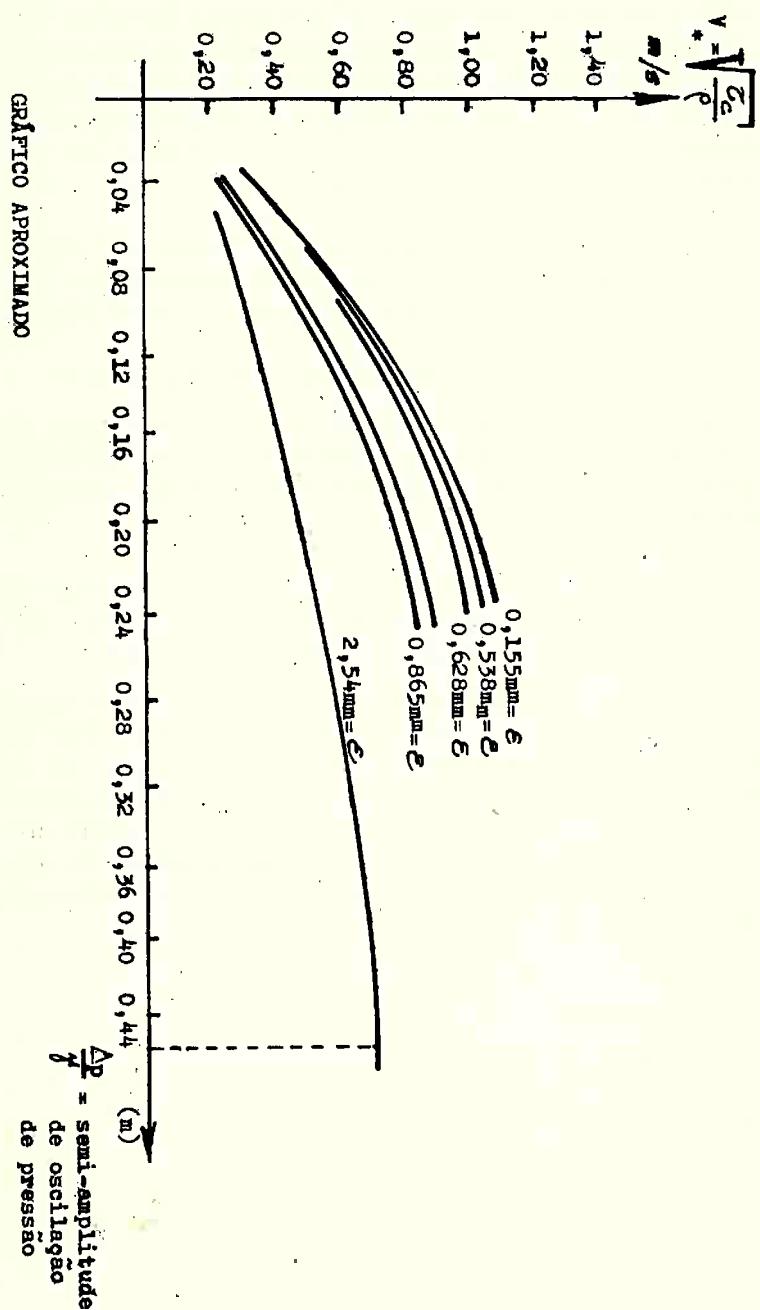


Figura 73

IV.11.6 - O Professor Constantin A. Fasso, Diretor do Laboratório de Hidráulica, da Universidade de Cagliari, Itália,

descreve um dispositivo capaz de reduzir as dimensões das bacias de dissipação de energia que foi aplicado, com sucesso, nas obras de dois aproveitamentos hidro-eletricos na bacia do Flumendosa, na Sardenha. O dispositivo é formado por uma grelha horizontal formada de vigas ou tubos de aço, que é colocada perpendicularmente à bacia, cobrindo, parcialmente, a parte mais profunda. Os ensaios foram feitos sobre um modelo que permitia estudar a influência, seja do comprimento da bacia, seja da forma da grelha. Chegou à conclusão de que, quando se introduz uma grelha numa bacia dada, tudo se passa como se o comprimento dessa fosse aumentado.

Mediu a turbulência, na superfície livre do escoamento com uma combinação de transdutor com um tubo de pressão, conectado a gravador. Portiu da equação estabelecida por Ippen:

$$\frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{\bar{u}} = g K \frac{\sqrt{\bar{H}'^2}}{\bar{u}^2} \quad (359)$$

em que:

$\bar{u}$  é a velocidade média local

$K$  é o coeficiente escala do sistema gravador

$\frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{u}$  = intensidade ou nível de turbulência

$\sqrt{\bar{u}'^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n u'^2}$  desvio médio quadrático relativo a  $u$

$\sqrt{\bar{H}'^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n H'^2}$  desvio médio quadrático da carga total  $H$

Apresenta diversos tipos de grelhas, em forma de barras e em forma de orifícios, apresentando, finalmente, um gráfico de  $\frac{\sqrt{\bar{u}'^2}}{u}$

em função do comprimento  $L$  da bacia de dissipação.

Seus estudos são análogos aos desenvolvidos por Arsenishvili.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES

Na fase de desenvolvimento em que se encontra o nosso País, um dos problemas que vem sendo enfrentado é o da necessidade premente de ampliação e construção de obras de aproveitamento hidro-elétrico, principalmente na região Centro-Sul, que já apresenta expressivo nível de produção e consideráveis fontes de energia. A construção de tais obras implica na elaboração de projetos nos quais a Hidráulica e a Mecânica dos Fluidos desempenham importante papel.

O problema de escoamento em vertedores de soleira espessa, seguidos de canais com grandes declividades dá origem, quase sempre, a escoamentos livres, em regime super-rápido ou impetuoso, nalguns casos.

Com o desenvolvimento global do País, a agricultura também passa pelo mesmo ciclo de progresso; o projeto de canais de irrigação, em regiões de relevo mais acidentado, também pode versar sobre escoamentos super-rápidos ou impetuosos. Projetos de Obras de Saneamento podem, também, versar sobre escoamentos super-rápidos ou impetuosos.

Utilizamos literatura estrangeira, por se tratar de problemas de estudo relativamente recente e que exigem aparelhagem de medida de grande sensibilidade e fidelidade que ainda não possuímos. Contamos, porém, em futuro próximo, poder contar com bons equipamentos desse tipo, graças ao empenho que nesse sentido têm feito os ilustres Professores Paulo de Menezes Mendes da Rocha, Chefe do Departamento de Engenharia Civil - Hidráulica e Transportes da EPUSP, José Augusto Martins, Vice-Chefe de nosso Departamento e ao carinho especial dedicado ao problema por parte do Snr. Diretor da Escola Politécnica da U.S.P., ilustre Prof. Tharcísio Damy de Souza Santos.

Pelos motivos expostos, o nosso trabalho não é acompanhado de dados experimentais, por nós obtidos.

Procurámos fazer uma seleção geral da Litera-

tura existente sobre o assunto, desde os estudos globais de L. Standish Hall, já clássicos, até os modernos estudos baseados na teoria estatística da turbulência, como os de Mikio Hino, Viparelli, Constantino Fasso, Jiris Kalis, entre outros.

Apresentámos outros estudos baseados na teoria da semelhança como os já clássicos de Vedernikov, Iwaza, Keulegan e Paterson, Arsenishvili e Ghambarian.

Partindo das equações de Navier-Stockes, passámos às equações de Reynolds para o movimento turbulento, transformando-as em equações com grandezas adimensionais. Tirámos delas quatro números adimensionais que são úteis no estudo da fixação das escalas de um modelo hidráulico, para estudo de escoamentos super-rápidos (número de Reynolds, número de Froude, número de Strouhal e número de Euler).

Apresentámos, a seguir, um critério para saber se um escoamento turbulento é estável ou instável, através do estudo da variação da energia do movimento pulsativo. Sugerimos, também, levantamentos instantâneos com aparelhagem adequada de  $u^i$  e  $u_n^i$ ,  $v^i$  e  $v_n^i$ ,  $w^i$  e  $w_n^i$  e colocação em gráficos, para estudo da existência ou não do predomínio de valores de sinais contrários das velocidades citadas, para sabermos se a média de seus produtos é diferente de zero.

Sugerimos, também, uma série de experiências a serem realizadas em laboratório, bem como alguma aparelhagem indicada para tal fim.

Fizemos uma interpretação da existência das correntes secundárias em canais retangulares, através do círculo de Mohr.

Destacámos algumas analogias existentes entre uma onda de choque da aerodinâmica e um ressalto hidráulico em canais de declividade muito baixa (teóricamente de declividade nula, nas vizinhanças do ressalto).

Demos um destaque todo especial às hipóteses admitidas para se chegar à equação de Chézy, nos escoamentos livres, permanentes e uniformes com o objetivo de mostrar, depois, a influência da forma da secção transversal no escoamento, a influência da instabilidade da superfície no escoamento.

Chegámos às seguintes conclusões:

- 1a.) A fórmula de Chézy em que o coeficiente de Chézy é função do número de Reynolds do escoamento e da resistividade relativa  $\varepsilon/D_H$  só se aplica, rígidamente dentro das hipóteses admitidas.
- 2a.) Para declividades baixas, quando se verificarem descontinuidades de curvatura nas linhas de igual velocidade, na secção transversal dum canal, surgem correntes secundárias de segundo tipo (diferentes das que ocorrem em curvas) que, conjuntamente com o movimento axial da corrente, dão origem a um movimento helicoidal das partículas fluidas, no canal. Estas correntes vão influir, obviamente, nas condições de estabilidade da superfície livre. Esta influência de forma aparece nos critérios de estabilidade de escoamentos turbulentos de Vedernikov, Iwaza, Arsenishvili e Enzo Macagno (este último pesquisador pertencente ao Instituto de Hidráulica da Universidade de Iowa - USA).
- 3a.) Para canais de declividades baixas (declividades fracas), o ressalto formado com número de Froude a montante  $> \sqrt{3}$  apresenta perfeita analogia com uma onda de choque da aerodinâmica.  
Citamos a equação geral da aerodinâmica
$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}$$
e a equação da hidrodinâmica:
$$- \frac{dz_2}{h} = (F^2 - 1) \frac{du}{u},$$
a primeira em função do número de Mach e a segunda em função do número de Froude.
- 4a.) Para pequenos desvios de direção das paredes dum canal retangular, formam-se, no trecho de escoamento super-crítico, pequenas ondulações de superfície que apresentam, também, analogia com as ondas de Mach que se propagam nos escoamentos supersônicos.
- 5a.) Nos canais de declividade forte, quando houver condições para a formação de um ressalto, este não preencherá mais as condições de analogia com uma onda

de choque, da aerodinâmica. Não se pode mais desprezar, na equação do momentum, a componente do peso do líquido, na direção do movimento. Admite-se a distribuição hidrostática das pressões nas secções de entrada e de saída do ressalto (o que a rigor não se verifica) para aplicação da equação do momentum.

6a.) Nos canais em regime super-rápido (número de Vedernikov  $> 1$ ) verifica-se uma instabilidade de superfície, com a formação de ondas de translação que se rompem (roll waves), de grande vorticidade, perpendiculares ao eixo do canal e que arrastam, para o interior da corrente líquida, massa de ar apreciável, sob a forma de bolhas. Estas bolhas se distribuem, na corrente líquida, em concentrações que seguem leis análogas às da distribuição de pequenas partículas sólidas, em suspensão numa corrente líquida.

O equacionamento do problema, ligando-se as equações gerais do movimento (de Reynolds) com as equações de deslocamento dessas partículas de ar é um problema de grande complexidade.

As próprias equações de Reynolds admitem uma proporcionalidade entre tensões e velocidades de deformação lineares e angulares, o que não se verifica, exatamente, em regimes de escoamento muito turbulentos.

Necessário se torna desenvolver amplo programa de medida de velocidades, ao longo de normais ao fundo de canais protótipos, para se chegar mais próximo do equacionamento do problema.

Segundo experiências feitas em laboratório, a distribuição de velocidades se aproxima muito da obtida em canais de baixa declividade, nas regiões próximas das paredes do canal, porém se afasta, nas regiões mais distantes.

7a.) Numerosas experiências já foram realizadas objetivando encontrar equações empíricas, fazendo corresponder o coeficiente de Chézy  $C$  aos números adimensionais de Froude, Vedernikov e Reynolds.

8a.) A vazão total circulante, num canal em regime super-rápido, pode ser considerada igual à soma da vazão na região do escoamento dominantemente hídri-

co com a vazão, na camada superior, formada de ar e bolhas de água, cuja distribuição é regida pela lei do acaso.

- 9a.) Além dos adimensionais já citados, devemos acrescentar, para o estudo de formação das "roll waves":  $V = \text{número de Vedernikov} = \text{const.}$  e que corresponde a uma relação de números de Froude, e

$$\frac{x_i}{h_0} = \text{constante}$$

em que  $x$  é a distância do início do canal até a região de formação das "roll waves",  $i$  é a declividade do leito do canal,  $h_0$  é a altura do escoamento uniforme no canal.

- 10a.) As características das "roll waves" são obtidas a partir de fórmulas empíricas:

$$\bar{\lambda} = \text{comprimento médio} = F [F_{ro}, \bar{S}]$$

$$\bar{T} = \text{período médio} = \psi [F_{ro}, \bar{S}]$$

$$\bar{a} = \text{celeridade média} = F (V_0)$$

em que  $\bar{S}$  é um adimensional ligado à distância da origem do canal até à formação das "roll waves", à declividade  $i$  do leito do canal e à altura crítica do escoamento.

- 11a.) Conhecendo-se o perfil das "roll waves", podemos calcular a energia dessas ondas, por m de largura, na entrada do dissipador de energia (equação 336).

- 12a.) É oportuno realizar uma pesquisa sobre tipos de dissipadores de energia, a jusante de canais, em regime de escoamento super-rápido, conhecida a energia das "roll waves" desse canal.

Para canais de declividades inferiores a  $i_1$  ... ( $i_1 - i_2$  intervalo de declividades de formação das roll waves), o ressalto hidráulico funciona bem como um dissipador de energia; funciona análogamente a uma malha de redução de turbulência, cuja constante é a diferença entre as alturas do ressalto a montante a jusante, como já foi visto.

Para canais de declividades no intervalo  $i_1 - i_2$  (super-rápidos) com "roll waves", torna-se necessário, prever, no projeto do dissipador de energia,

dispositivos especiais, visando fracionar os macro-turbilhões como, por exemplo, os dispositivos já citados:

- grelhas perpendiculares ao escoamento
- chapas com orifícios de diâmetro variável
- placas com frestas de largura variável
- caixões de amortecimento de turbulência
- blocos de choque (Chute blocks) convenientemente projetados de forma a defasar as "roll waves" do canal.

- 13a.) É de grande interesse teórico-prático, para a compreensão do fenômeno da dissipação de energia, num dissipador, o levantamento de dados experimentais que permitam o conhecimento da estrutura da turbulência, a jusante da bacia de dissipação através das funções  $F(K, t)$  que é a densidade espectral da energia,  $K^2 F(K, t)$  que representa a energia que se dissipava em calor (pequenos turbilhões), por unidade de volume, tempo e número de onda, e  $S(K, t)$  que é uma função que depende de correlações triplas. Consideremos, pois, uma corrente de alta turbulência; estudemos a evolução da turbulência nas secções que se sucedem a  $u^*$  a malha, identificando-se a variável  $t$  da teoria com  $x/V$  ( $x$  abscissa e  $V$  velocidade média).
- 14a.) Devem intensificar-se estudos teórico-experimentais objetivando conhecer a influência da rugosidade (forma e concentração) na formação das "roll waves".  
Deve pesquisar-se a função concentração média de ar, na corrente e velocidade de cisalhamento ( $V_*$ ) elevada a uma potência variável, função da rugosidade, e da profundidade de transição.  
Já se sabe que um aumento de rugosidade acarreta maiores concentrações de ar e proporciona mais intensa mistura. A velocidade média do escoamento, a profundidade efetiva e a profundidade máxima aumentam.
- 15a.) Achamos oportuno uma pesquisa sobre a amplitude das oscilações turbulentas de pressão, numa parede plana, em contato com um escoamento super-rápido (caso de dissipadores de energia) e os valores da rugosidade da parede e da velocidade de atrito,

para estudo do risco de cavitação, nalgumas regiões da bacia de dissipação.

16a.) Nos canais em regime super-crítico, quando a declividade ultrapassa o limite superior  $i_2$  (da ordem de 0,35) o escoamento torna-se muito turbulento, não ondular e com alta energia cinética; é o regime ultra-rápido, impetuoso. Neste regime há um pleno domínio das forças de inércia sobre as do campo gravitacional, as viscosas e as de pressão, atuando nas partículas fluidas, na superfície.

17a.) Os critérios de Verdenikov, Iwaza e de outros são necessários e convenientes para determinar as condições de transição de escoamentos rápidos (de declividade forte) para super-rápidos, porém são inadequados para determinar as condições de início de formação das "roll waves", pois não levam em conta a condição de mínimo comprimento do canal para que se formem as "roll waves".

18a.) É necessária e oportuna uma pesquisa de secções transversais de canais que não propiciem a formação de ondas. Foram já citadas diversas secções ensaiadas por Arsenishvili. Essas secções satisfazem o critério  $A_2$  de Arsenishvili.

19a.) Deve ser pesquisada a influência do número de Reynolds no expoente  $m$  da distribuição das velocidades dada pela equação empírica:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{Y}{r}\right)^m$$

20a.) O número de Froude é ligado à estabilidade da superfície livre.

Discutamos diversos casos:

$F > \sqrt{3}$  - Condição de formação de um ressalto estável, em canais de declividade fraca

$F > 2$  - Critério de estabilidade estabelecido por Powell, para pequenas ondações sobre a superfície livre, sob a influência da gravidade e do atrito turbulento.

Corresponde, no caso de canais retangulares muito largos, em regime turbu-

lento rugoso, ao início de formação das "roll waves", pelo critério de Verdenikov.

$F > 4$  - Corresponde, pelo critério de Verdenikov, ao início de formação das "roll waves" em canais circulares (de área molhada semi-circular) ou em canais retangulares, de secção de mínimo custo de revestimento.

$F > F_c$  é o critério de transição de escoamento rápido para escoamentos super-rápidos instáveis, com "roll waves", desde que o canal tenha comprimento adequado.

Necessário se torna, pois, pesquisar a partir de que número de Froude o escoamento passa a ser ultra-rápido, impetuoso.

21a.) A secção do canal de início de formação das "roll waves" desloca-se para jusante, quando se aumenta a vazão sobre um canal, em regime super-rápido; análogamente um ressalto hidráulico, em canal de declividade fraca ou forte, também se desloca para jusante, quando se aumenta a vazão no canal.

22a.) Nos modelos para estudo de dissipadores de energia de correntes super-rápidas é conveniente manter sobre a corrente líquida uma pressão em escala, atendendo à possibilidade de ocorrência de cavitação nalgumas regiões do dissipador (tanque de vácuo).

Deve manter-se constante, no modelo e no protótipo, o número de Leroux  $L$ :

$$L = \frac{p_0 - p_v}{\rho v_o^2}$$

Esta condição acarreta escalas convenientes para os modelos em função da depressão que se possa conseguir e manter na câmara de vácuo.

23a.) O volume médio das gotas de água projetadas na camada de ar adjacente é proporcional à micro-escala dos turbilhões.

24a.) A ondulação da água, em escoamentos super-rápidos,

é afetada pela tensão superficial e pela força gravitacional.

- 25a.) O mecanismo das bolhas de ar, em suspensão na corrente líquida, em regime super-rápido, é explicado pela hipótese de Kolmagaroff relativa à isotropia local.
- 26a.) O escoamento de uma corrente hídrica, em regime permanente e uniforme, em canais de baixa declividade, pode ser interpretado como movimento de duas correntes de densidade diferente água e ar, com ondas externas com celeridade  $a$ :

$$a = \sqrt{g (H_1 + H_2)} f \left[ \frac{\Delta \rho}{\rho} \right]$$

Quando  $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$  (caso água, ar)  $\therefore f\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \approx 1,0$

logo:

$$a = \sqrt{g (H_1 + H_2)}$$

Este regime se confunde com o regime de ondas de gravidade, em fluido homogêneo.

- 27a.) Reconhecemos a necessidade de um amplo programa de pesquisas sobre turbulência, escoamentos super-rápidos e ultra-rápidos impetuosos e dissipação de energia pelas equipes da Hidráulica, Hidráulica APLICADA, Mecânica dos Fluidos, Cálculo, Estatística e Eletrônica, trabalhando num conjunto harmônico, com perfeita identidade de objetivos, com plena liberdade de pensamento criador, iniciando assim, neste setor, um programa de pesquisas integrado nas diversas áreas didáticas da Escola Politécnica da U.S.P., dentro de um autêntico espírito universitário.

\* \* \* \* \*

## VII - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ABECASIS - F.M. Manzanares - "Soleiras Descarregadoras e alguns problemas especiais" - Ministério de Obras Públicas - Laboratório Nacional de Engenharia Civil - Memória 175 - Lisboa - 1961.
- 2 - ABECASIS - F.M. Manzanares (Portugal) - "Fluctuations de pression dans une paroi plane en contact avec un écoulement à grande vitesse" - 1-41 - Proceedings do 11º Congresso (Leningrado) da Associação Internacional de Pesquisa Hidráulica - Vol. 1 - High - Velocity - Flow, (1965)
- 3 - ANDERSON, ALVIM G. - U.S.A. - "Influence of Channel Roughness on the Aeration of High-Velocity Open Channel Flow" - 1-37 - Proceedings do 11º Congresso (Leningrado) da Associação Internacional de Pesquisa Hidráulica - Vol. 1 - High Velocity Flow (1965)
- 4 - ARSENISHVILI, K.I. - "Effect of Wave Formation on Hydro-Engineering Structures" - Israel Program for Scientific Translations - Jerusalem 1965.
- 5 - ASSY, TUFI MAMEDE - "Complementos de Mecânica dos Fluidos" - Curso de Pós-Graduação da Cadeira de Mecânica dos Fluidos - Abril - 1966 - E.P. U.S.P.
- 6 - BAKHMETEFF, BORIS A. - "Hidraulica de los Canales", M. Aguilar Editora, Madrid.
- 7 - BALLOFFET, A. - GOTELLI, L.M. - "Hidraulica" - Tomos I e II - 2a. Edição - Editoria Ediar - Buenos Aires.
- 8 - BECERIL, ENRIQUE - "Hidromecânica" - Editorial S/A - Madrid - 1960.
- 9 - BRUN, EDMOND A. - MARTINOT LAGARDE, ANDRÉ - Tomo I - Fascículo 2 - Mécanique des Fluides - "Écoulements à une dimension - Conduites" - Dunod Paris - 1960.
- 10 - BRUN, EDMOND A., M. LAGARDE - Tomo 1 - Fascículo 1

- Dunod, Paris - 1959 - "Généralités - Statique".
- 11 - BUREAU OF RECLAMATION - UNITED STATES  
DEPARTMENT OF THE INTERIOR - "Design of Small  
Dams" - Washington - 1961.
- 12 - CARAÇA, BENTO DE JESUS - "Cálculo Vectorial" - 2a.  
Edição - Lisboa - 1957 - Livraria Sá da Costa.
- 13 - COMOLET, R. - "Mécanique Expérimentale des Fluides" - Tomo I - Masson et Cie. Editeurs - Paris - 1961.  
"Mécanique Expérimentale des Fluides" - Tomo II - Masson et Cie. Editeurs - Paris - 1963.
- 14 - CRAUSSE, E. - "Hydraulique des Canaux Découverts en  
Régime Permanent" - Eyrolles - Paris - 1951.
- 15 - CRAYA, ANTOINE - "Contribution à l'Analyse de la  
Turbulence Associée à des Vitesses Moyennes"  
Publications Scientifiques et Techniques du  
Ministère de l'Air - Paris - 1958.
- 16 - DAVIS, CALVIN VICTOR - "Handbook of Applied Hydraulics" - 2a. Edição - McGraw-Hill Book Company Inc. - 1952.
- 17 - EAGLESON, P.S. - PERKINS, F.E. - "A Total Head Tube  
for the Broad - Band - Measurement of Turbulent Velocity Fluctuations in Water" - Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 39, Massachusetts U.S.A., pg. 86 - Proceedings da 9a. Convenção da Association Internationale de Recherches Hydrauliques - Dubrovnik - 1961.
- 18 - EINSTEIN, H.A. e SIBUL, O. - "Open Channel Flow of  
Water - Air - Mixtures" - Abril 1954 - Vol. 35, nº 2 - Transactions American Geophysical Union, Vol. 1935 - 1954 - Pg. 235.
- 19 - ESCANDE, L. - "Hydraulique Générale" - Tomo 1 - Edouard Privat Libraire Editeur - Toulouse - 1947.
- 20 - ESCANDE, L. - "Nouveaux Compléments d'Hydraulique"  
Deuxième partie - Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air - Paris - 1955.

- 21 - ESCANDE, L. - "Sur la similitude des phénomènes d' entraînement d'air par l'eau, en mouvement." Comptes Rendues Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences - Tomo 209 - Julho - Dezembro 1939.
- 22 - ESCANDE, L. - "Expériences sur l'écoulement à l'aval d'un barrage déversoir" - Le Génie Civil - Tomo CXIV - n<sup>o</sup> 11 - pg. 244 - 1939.
- 23 - FASSO, CONSTANTINO A. - "Energy Dissipation in Outlet Works by Means of Grids" - Director, Hydraulics Laboratory of the University Cagliari - Italy - 1-54 - Proceedings do 11<sup>o</sup> Congresso de Leningrado de 1965 - Vol. 1 - High - Velocity - Flow - Assoc. Internacional de Pesquisa Hidráulica.
- 24 - GANDOLFO, JOSÉ S. - "Canales de Fuerte Pendiente" - Boletim de la Administracion Nacional del Agua, n<sup>o</sup> 95, Maio de 1945 - Buenos Aires - 1945.
- 25 - GARCEZ, LUCAS NOGUEIRA - "Elementos de Mecânica dos Fluidos" - Hidráulica Geral - Vol. 1 - Edgard Blücher - São Paulo - 1960.
- 26 - GHAMBARIAN, H.H. - "On Waves in Inclined Open Channels" - Institute of Water Problems - Ministry of Water Economy - Armenian - SSR - 11<sup>o</sup> Congresso de Hidráulica de Leningrado (1965). Proceedings of International Association for Hydraulic Research - Vol. 1 - High - Velocity - Flow - pg. 1.
- 27 - GUMENSKY, D.B. - "Air Entrained in Fast Water Affects Design of Training Walls and Stilling Basins" - Civil Engineering - Dez. 1949 - pg. 35 - Vol. 19 - 7-12 - 1949 - Julho-Dez.
- 28 - HAINDL, K. - "Wave Agitation Damping Below Chutes Caused by Roll-Waves at a Supercritical Flow - Hydraulic Research Institute - Prague - Czechoslovakia - pg. 1.5. Proceedings do 11<sup>o</sup> Congresso de Leningrado (1965) - International Association for Hydraulic Research - Vol. 1 - High - Velocity - Flow.

- 29 - HALBRONN, G. - "Étude de la mise en régime des écoulements sur les ouvrages à forte pente" - 2<sup>ieme</sup> - pg. 347 - "La Houille Blanche", Maio - Junho de 1952, n<sup>o</sup> 3.
- 30 - HALBRONN, G. - "Étude de la mise en régime des écoulements sur les ouvrages à forte pente. Application au problème de l'entraînement d'air" - 1<sup>ière</sup> partie - pg. 21 - "La Houille Blanche", n<sup>o</sup> 1 - Janeiro-Fevereiro 1952.
- 31 - HALL, L. STANDISH - "Air Entrainment - Open Channel Flow at High Velocities" - pg. 1394 - Transactions of the American Society of Civil Engineers - Vol. 108 - 1943.
- 32 - HALL, L. STANDISH - "Open Channel Flow at High Velocities - Air Entrainment" - pg. 1100 - ... Proceedings of the American Society of Civil Engineers - Vol. 68 - 1942 - Papers and Discussions.
- 33 - HINO, MIKIO - "On the Mechanism of Self-aerated Flow on Steep Slope Channels. Applications of the Statistical Theory of Turbulence" - pg. 123 - Proceedings da 9<sup>a</sup> Assembléia Geral da Association Internationale des Recherches Hydrauliques - Dubrovnik - 1961.
- 34 - HINO, MIKIO - "Digital Computer Simulation of Turbulent Phenomena" - pg. 33 - Transactions of the Japan Society of Civil Engineers, n<sup>o</sup> 123 - Nov. de 1965.
- 35 - IPPEN, ARTHUR T. - "Mechanics of Supercritical Flow" - pg. 1290 - Papers - Novembro de 1949 - Proceedings of the American Society of Civil Engineers - Vol. 75 - n<sup>o</sup> 9.
- 36 - IWASA, YOSHIAKI - NAKAGAWA, HIROJI - FUJIMOTO, SEI - "Development of Energy Dissipators at Multiple-Purpose Projects in Japan" - 1-39 - Proceedings do 11<sup>o</sup> Congresso de Leningrado (1965) - Vol. 1 - High - Velocity - Flow - Association Internationale de Recherches Hydrauliques
- 37 - JAEGER, CHARLES - "Hydraulique Technique" - Dunod - Paris - 1954.

- 38 - KALIS, JIRI - Institute Scientifique de Recherches Hydrotechniques - BRNO - Tchecoslovaquie - "Diminution de la Turbulence Derrière le Resaut" - pg. 43 - Proceedings da 9a. Convenção da Association Internationale de Recherches Hydrauliques - Dubrovnik - 1961.
- 39 - KEULEGAN, G.H. e PATTERSON, G.W. - "A Criterion for Instability of Flow in Steep Channels" - pg. 594 - Transactions of the American Geophysical Union - 21 - Annual Meeting - 1940.
- 40 - KEULEGAN, G.H. - "Laws of Turbulent Flow in Open Channels" - U.S. Journal of Research of the National Bureau of Reclamation - Vol. 21, nº 6 - Dezembro de 1938 - Research Paper R.P. .. 1151.
- 41 - KEULEGAN, G.H. e PATTERSON, G.W. - "Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves" - pg. 47 - U.S. Department of Commerce - National Bureau of Standards, Research Paper R.P. 1272 - nº 24 - 1940.
- 42 - LANE, F.W. - "Entrainment of Air in Swiftly Flowing Water" - Universidade de Iowa - Iowa City - Iowa - Civil Engineering - Vol. 9 - 1-6-- 1939, Jan./Junho.
- 43 - LANIE, E.W. - "Recent Studies on Flow-Conditions" - Universidade de Iowa - Engineering News Record, nº 1 - Jan. 1936.
- 44 - LANGENDONCK, Telemaco van - "Cálculo de Concreto Armado" - Vol. 1 - São Paulo - 1944 - A.B.C.P.
- 45 - LANGHAAR, H.L. - "Analyse Dimensionnelle et Théorie des Maquettes" - Paris - Dunod - 1956.
- 46 - LEGENDRE, R. - "Distribution of Mean Velocities with Turbulent Flow in Cylindrical Pipes" - La Houille Blanche, número especial B/1953 - Novembro - pg. 792.
- 47 - LELIAVSKY, SERGE - "Introducción à la Hidráulica Fluvial" - Edições Omega S/A - Barcelona - .. 1964.
- 48 - LENCASTRE, A. - "Manual de Hidráulica Geral" - Tec

nica - Losbôa - 1957 - A.E.I.S.T.

- 49 - LENCASTRE, A. - "Descarregadores de Lâmina Livre" -  
Bases para o seu estudo e dimensionamento -  
Lisbôa - 1961 - Laboratório Nacional de Enge-  
nharia Civil.
- 50 - MACAGNO, E.O. - "Resistance to Flow in Channels of  
Large Aspect Ratio" - Journal of Hydraulic Re-  
search - International Association for Hydraul-  
ic Research - Vol. 3 - 1965 - n<sup>o</sup> 2 - pg. 41.
- 51 - MANDELBROT, T.L. - "Le Nombre de Richardson et les  
Critères de Stabilité des Écoulements Stratifiés" - La Houille Blanche - n<sup>o</sup> 1 - 1965 -  
pg. 24.
- 52 - MINISTRY FOR THE CONSTRUCTION OF ELECTRIC POWER  
PLANTS OF THE U.S.S.R. - "Soviet Hydro-Engineering  
- A Classified Collection of Research Reports  
- Israel Program for Scientific Translations  
- Jerusalem - 1964.
- 53 - NAVARRO, JOSÉ LUÍS GÓMEZ e ARACIL, JOSE JUAN - "Sal-  
tos de Água y Presas de Embalse" - Terceira  
Edição - Tomo primeiro: Saltos de Água - Ma-  
drid - 1952.
- 54 - NOGUEIRA, ANTÔNIO AUGUSTO DOS SANTOS - "Canais" -  
Curso de Pós-Graduação - 1966 - Singularida-  
des - 1966 - E.P.U.S.P.
- 55 - PEN-CHEN-CHE, M. - "La différence des pertes de  
charge dans un écoulement en conduit circu-  
laire, d'une part, et dans un écoulement à  
ciel ouvert, à faible tirant d'eau, d'autre  
part" - pg. 820 - La Houille Blanche - Novem-  
bro de 1959 - n<sup>o</sup> 6.
- 56 - POWELL, RALPH W. - "Vedernikov's Criterion for Ul-  
tra-Rapid Flow - Transactions of the American  
Geophysical Union - pg. 882 - Vol. 29 - n<sup>o</sup> 6 -  
Dezembro de 1948.
- 57 - RAYM, J. SEEGER e TEMPLE, G. - "Research Frontiers  
in Fluid Dynamics".
- 58 - RAZVAN, E. - "L'Etude de l'Écoulement Macroturbu-  
lent en Aval des Evacuateurs des Crues" - pg.  
13 - Proceedings da 9a. Convenção da Associa-

- tion Internationale des Recherches Hydrauliques - Institut de Recherches Hydrotechniques - Bucarest - Dubrovnik - 1961.
- 59 - ROUSE, HUNTER - "Hidráulica - Mecânica Elemental de Fluidos" - Editorial Dossat S/A - 1960.
- 60 - ROUSE, HUNTER (EDITOR) - "Engineering Hydraulics" - John Wiley and Sons Inc., New York - London - Jan. 1961.
- 61 - ROUSE, HUNTER (EDITOR) - "Advanced Mechanics of Fluids" - New York - John Wiley and Sons, Inc. - London - Set. 1963.
- 62 - ROUSE, HUNTER - "The Role of the Froude Number in Open Channel Resistance" - pg. 14 - Vol. 1 - 1963 - n<sup>o</sup> 1 - Hydraulic Research.
- 63 - ROUSE, HUNTER - ROBERTSON, J.M. - "On the Four Regimes of Open-Channel Flow" - pg. 169 - Civil Engineering - Janeiro a Junho - 1941.
- 64 - SCHLAG, ALBERT - "Hydraulique Générale" - Terceira Edição - Dunod - Paris - 1963.
- 65 - SCHLICHTING (HERMANN) - "Boundary Layer Theory" - 4a. Edição - McGraw-Hill Book Company Inc.
- 66 - SÉDILLE, M. - "Précis de Mécanique des Fluides" - Dunod - Paris - 1962.
- 67 - SHAMES, IRVING - "Mechanics of Fluids" - MacGraw-Hill Book Company Inc. (1962).
- 68 - SILBER, R. - "Étude et Tracé des Écoulements Permanents en Canaux et Rivières" - Dunod - Paris - 1954.
- 69 - SILVA LEME, RUY AGUIAR - "Curso de Estatística - Elementos" - Ao Livro Técnico S/A - Rio de Janeiro - 1965 - 2a. Edição.
- 70 - STREETER, VICTOR L. - "Fluid Mechanics" - 3a. Edição - McGraw-Hill Book Company Inc. - Kogakusha Company Ltd. - Tokyo.
- 71 - TISON, L.J. - "Cours d'Hydraulique II - Partie Théorie des Cours d'Eau en Mouvement Permanent - Phénomènes de Filtration" - Gand - 1953.

- 72 - VEN-TE-CHOW - "Open Channel Hydraulics" - McGraw-Hill Book Co. Inc. e Kogakusha Company Ltd. - Tokyo.

73 - VIPARELLI, M. - "Correnti Rapide" - L'Energia Elettrica - Janeiro de 1951 - Instituto d'Idraulica e Costruzione Idrauliche dell'Università di Napoli.

74 - VIPARELLI, M. - "Correnti Rapide" - Memória apresentada no IV Congresso de Hidráulica, de Nápoles - Maio 1953 - L'Energia Elletrica - Junho - 1954.

75 - VIPARELLI, M. - "Correnti Rapide" - L'Energia Elettrica - Vol. XXXV - Julho - 1958 - n° 2.

76 - VITUKI - HYDRAULIC LABORATORY - 1965 - "Brief Survey of Major Reserach Projects" - 1955 - 1964.

77 - W. DAILY, JAMES - STEPHAN, SAMUEL C. Jr. - "Characteristics of the Solitary Wave" - American Society of Civil Engineers - Dez. 1951 - Vol. 77 - Separata 107 - Proceedings.

78 - ZAGUSTIN, KONSTANTIN - "Analytical Solution for Turbulent Flow in Pipes" - Universidade Central da Venezuela - Caracas - Proceedings do XI Congresso Latino-Americano de Hidráulica - 1º volume - Editado pelo Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

\* \* \* \* \*



I N D I C E

	Página
I - Introdução e Agradecimentos	1
1.1 - Objetivo do trabalho .....	1
1.2 - Motivação .....	2
1.3 - Desenvolvimento da pesquisa .....	4
1.4 - Agradecimentos .....	9
II - Literatura	
Estudos e pesquisas de:	
2.1 - L. Standish-Hall .....	11
2.2 - G.H. Keulegan e G.W. Paterson .....	23
2.3 - H.A. Einstein e O. Sibul .....	28
2.4 - G. Halbron .....	34
2.5 - M. Chen-Che-Pen .....	40
2.6 - F. M. Manzanares Abecasis .....	42
2.7 - Mikio Hino .....	43
2.8 - Ralph W. Powell .....	47
2.9 - M. Viparelli .....	51
2.10 - K.I. Arsenishvili .....	55
III - Desenvolvimento da pesquisa	
3.1 - Escoamentos livres, permanentes e uniformes. A fórmula de Chézy. <u>H</u> ipóteses formuladas .....	64
3.2 - Distribuição de velocidades, no escoamento permanente médio, uniforme .....	90
3.3 - Influência da forma da secção transversal dum canal em regime de escoamento permanente e uniforme, nas características de escoamento ...	95
3.4 - Influência da declividade do leito de um canal nas características do escoamento. Pequenas ondulações de superfície. Ressalto hidráulico. Formação e características principais das "roll waves" Secções transversais de canais com regime não ondular .....	114

	Página
Dissipadores de energia de canais , com "roll waves" .....	114
IV - Comentários .....	167
VI - Conclusões .....	180
VIII - Referências bibliográficas .....	189



Bog. Oferta Autor.