

Controle passivo de vibrações aeroelásticas empregando dispositivos dissipadores não-lineares

João Pedro Calegari Mantovani
Prof. Dr. Flávio Donizeti Marques

Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo - Brasil
jp.mantovani@usp.br

Objetivos

O objetivo deste projeto de pesquisa é a compreensão do fenômeno de flutter [5] [6] [9] [10] [13] e avaliar o uso de dois dispositivos não-lineares do tipo NES [14] [15] – do inglês, *non-linear energy sink* -, um com rigidez de terceira e um de quinta ordem. Esses dispositivos são empregados para o controle passivo [2] [22] de vibrações aeroelásticas de um aerofólio com suspensão não-linear e dois graus de liberdade – de *plunge* e de *pitch* -, além do grau de liberdade do próprio NES [1] [3] [4] [8] [12] [15] [16] [21] [23]. Além disso, eles possuem: massa, rigidez, amortecimento e uma posição definida com relação ao centro elástico do aerofólio [17] [19] [20]. Neste contexto, é feita uma análise considerando um aerofólio com não-linearidade estrutural, caracterizada pelo *hardening* no grau de liberdade de *pitch*. Além disso, para contabilizar as cargas aerodinâmicas não-estacionárias, é utilizado o modelo aerodinâmico de Theodorsen [18] e as funções de Wagner [8][21]. Já para determinar a dinâmica da estrutural, são utilizadas as Equações de Lagrange [7], tomando os três graus de liberdade supracitados. Ambos os dispositivos, de terceira e de quinta ordem, são avaliados conforme uma variação de seus parâmetros: amortecimento, rigidez e posição no aerofólio. Essa avaliação é feita utilizando a técnica de bifurcação de Hopf, empregada em sistemas não-lineares. Após, também é realizada uma análise da característica de *transfer energy targeted* (TET) [12] [16], considerando alguns casos de configuração para ambos os dispositivos.

Métodos e Procedimentos

Com o intuito de descrever os métodos adotados, separa-se essa seção em quatro distintas: (i) Introdução ao modelo aeroelástico; (ii) Aerodinâmica não-estacionária utilizada; (iii) Modela-

gem da dinâmica estrutural; e (iv) Introdução às análises realizadas.

Introdução ao modelo aeroelástico

O modelo aeroelástico consiste em um aerofólio bidimensional com semi-corda b e dois graus de liberdade: *plunge* e *pitch*, conforme ilustrado na Figura 1. O movimento de *plunge* (translação vertical, positiva para baixo) é indicado por $h(t)$ e o de *pitch* (arfagem) por $\alpha(t)$. Um sistema de referência é colocado com origem no meio da corda. O aerofólio possui uma massa por unidade de comprimento representado por m ; momento de inércia da massa, I_α ; e um momento estático, S_α . A suspensão elástica é composta por molas de rigidez concentrada, a qual limita o movimento do aerofólio em *plunge* e *pitch* (k_h e k_α , respectivamente) no chamado eixo elástico com distância ab , a partir da origem do sistema de referência. O comportamento elástico do movimento de *pitch* é considerado não linear, supondo-se a característica de *hardening* da estrutura dado por um comportamento cúbico com parâmetro H_α . A posição do centro de gravidade (CG_a) do aerofólio é medida a partir do eixo elástico, em semicordas (bx_α). Sob a influência do escoamento aerodinâmico com velocidade U , a carga não estacionária da seção típica compreende a força de sustentação ($L(t)$) e o momento aerodinâmico ($M_\alpha(t)$), medido sobre o eixo elástico. Ademais, considera-se que nesse sistema os movimentos ocorrem com pequenos deslocamentos, de forma que: $\sin(\alpha) \approx \alpha$ e $\cos(\alpha) \approx 1$.

Considera-se fixando ao aerofólio um NES translacional com deslocamento relativo a superfície $w(t)$ (i.e., a massa do NES se move com deslocamento de $u(t) = w(t) + h(t) - d\alpha(t)$, advindo do regime de pequenos deslocamentos, o que restringe o movimento do NES somente à vertical), localizado a uma distância d do eixo

elástico (conforme a Figura 1). Ele possui uma massa m_n , um coeficiente de amortecimento viscoso linear c_n e uma rigidez cúbica pura k_n , colocada aqui como exemplo de formulação não-linear para o NES.

Por fim, define-se os parâmetros do sistema: $\xi(t) = h(t)/b$ é o movimento de *plunge* adimensionalizado, $x_\alpha = S_\alpha(mb)$ é a distância adimensional do eixo elástico ao centro de gravidade do aerofólio (CG_a), $r_\alpha^2 = I_\alpha(mb)^2$ é o raio de giração do aerofólio e $\omega_h^2 = k_h/m$ e $\omega_\alpha^2 = k_\alpha/I_\alpha$ são as frequências naturais desacopladas de *plunge* e *pitch*, respectivamente. Além disso sobre o NES, tem-se: $v(t) = u(t)/b$ sendo o deslocamento relativo adimensional; $\gamma_n = k_n b^2/m$, a relação da rigidez; $\lambda_n = c_n/m$, a relação do amortecimento; $\delta = d/b$, a localização adimensional do NES no aerofólio; e $\mu_n = m_n/m$, a relação de massa entre o dispositivo e o aerofólio.

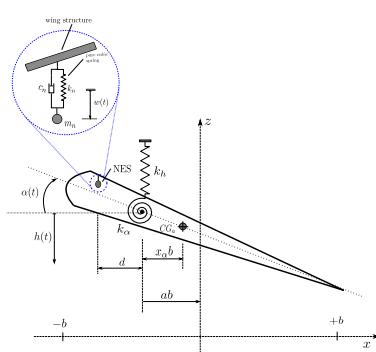


Figura 1: Seção aeroelástica típica com a inclusão de um NES..

Aerodinâmica não-estacionária utilizada

As cargas aerodinâmicas não-estacionárias são resumidas na força de sustentação e no momento aerodinâmico [3] [8] [16]. A primeira é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L = \pi \rho b^3 & \left[\ddot{\xi} + \left(\frac{U}{b} \right) \dot{\alpha} - a \ddot{a} \right] + \\ & 2\pi \rho U b^2 & \left[(c_0 - c_1 - c_3) \left(\frac{U}{b} \alpha + \dot{\xi} + \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right) \right. \\ & + \left(\frac{U}{b} \right)^2 [c_2 c_4 (c_1 + c_3)] \bar{x} \\ & \left. + \left(\frac{U}{b} \right) (c_1 c_2 + c_3 c_4) \dot{\bar{x}} \right]. \end{aligned}$$

Já o momento aerodinâmico (M_α) fica definido como:

$$\begin{aligned} M_\alpha(t) = \pi b^4 & \left[a \ddot{\xi} - \left(\frac{U}{b} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) \ddot{a} - \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] \\ & + 2\pi \rho U b^3 \left(a + \frac{1}{2} \right) (c_0 - c_1 - c_3) \left[\left(\frac{U}{b} \right) \alpha \right. \\ & + \dot{\xi} + \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} + \left(\frac{U}{b} \right)^2 [c_2 c_4 (c_1 + c_3)] \bar{x} \\ & \left. + \left(\frac{U}{b} \right) (c_1 c_2 + c_3 c_4) \dot{\bar{x}} \right] \end{aligned}$$

Na contabilização do momento aerodinâmico, as variáveis c_0 , c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são definidas conforme as funções de Wagner e estão descritas em [16].

Modelagem da dinâmica estrutural

A modelagem da dinâmica estrutural é feita baseando-se nas Equações de Lagrange, as quais se apresentam como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \frac{\partial \nu}{\partial q_i} + \frac{dR}{d\dot{q}_i} = p_i(t) ,$$

em que τ indica a energia cinética; ν , a potencial; R , a não conservativa; p_i , a força efetiva externa; e q_i denota a coordenada generalizada, a qual, em questão, é tanto h como α , para o aerofólio, e w , para o NES.

As energias cinética, potencial e dissipativa são apresentadas na próxima seção, pois se discute sobre as componentes de energia presentes no sistema, a fim de avaliar o efeito do TET. Dessa forma, apresenta-se, a seguir, as equações adimensionalizadas do sistema. Tomando, em primeiro lugar o dispositivo com rigidez de terceira ordem, tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \chi_\alpha \ddot{\alpha} + \omega_h^2 \xi + \lambda_n \dot{\nu} + \gamma_n v^3 = -\frac{L(t)}{mb} \\ \chi_\alpha \ddot{\xi} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + \omega_\alpha^2 r_\alpha^2 (\alpha + H_\alpha \alpha^3) = \frac{M(t)}{mb^2} \\ -\delta \lambda_n \dot{\nu} - \delta \gamma_n v^3 = 0 \\ \mu_n (\ddot{\xi} - \delta \ddot{\alpha} - \ddot{\nu}) - \lambda_n \dot{\nu} - \gamma_n v^3 = 0 \end{cases}$$

Agora, considera-se o de quinta ordem, obtendo:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \chi_\alpha \cdot \ddot{\alpha} + \omega_h^2 \cdot \xi + \lambda_n \cdot \dot{\nu} + \gamma_n \cdot v^5 = -\frac{L(t)}{m \cdot b} \\ r_\alpha^2 \cdot \ddot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \cdot r_\alpha^2 \cdot (\alpha + H_\alpha \cdot \alpha^3) = \frac{M(t)}{m \cdot b^2} \\ -\delta \cdot \lambda_n \cdot \dot{\nu} - \delta \cdot \gamma_n \cdot v^5 = 0 \\ \mu_n \cdot (\ddot{\xi} - \delta \cdot \ddot{\alpha} - \ddot{\nu}) - \lambda_n \cdot \dot{\nu} - \gamma_n \cdot v^5 = 0 \end{cases}$$

Introdução às análises realizadas

Com o sistema definido, para analisar os resultados obtidos, são utilizadas duas técnicas: a bifurcação de Hopf e a TET. A primeira é amplamente utilizada no contexto de sistemas dinâmicos não-lineares, em que se altera um dos parâmetros de entrada do sistema e observa-se como ele responde a essa variação. No presente estudo, a velocidade de escoamento é o parâmetro a ser variado, considerando como referência a velocidade crítica de flutter. O sistema, então, é submetido a velocidades acima e abaixo dela, a fim de entender o seu comportamento quando o dispositivo de dissipação está acoplado a ele, assim como também compreender a influência da variação do amortecimento, da rigidez e da posição do NES na dinâmica do sistema. Por sua vez, a segunda análise é realizada com o objetivo de reiterar os resultados que são obtidos na primeira, porém utilizando uma análise de energia. Nela, são consideradas: a energia mecânica da estrutura (E_m), a qual inclui a do aerofólio (E_s) e a do dispositivo (E_n); a energia injetada na estrutura através do escoamento, i.e., o trabalho realizado pelas cargas aerodinâmicas (E_a); e a energia dissipada pelo dispositivo, i.e., o trabalho realizado pela força de amortecimento (E_d). Essas energias ficam definidas da seguinte forma:

Energia mecânica:

$$\begin{aligned} E_m &= E_s + E_n = \tau_s + \nu_s + \tau_n + \nu_s \\ &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} r_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + \chi_\alpha \dot{\xi} \dot{\alpha} \\ &+ \frac{1}{2} \omega_h^2 \xi^2 + \frac{1}{2} r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \alpha^2 + \frac{1}{4} r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 H_\alpha \alpha^4 \\ &+ \frac{1}{2} \mu_n (\dot{\xi} - \delta \dot{\alpha} - \dot{\nu})^2 + \frac{1}{4} \gamma_n v^4 \end{aligned}$$

Trabalho das cargas aerodinâmicas:

$$E_a = \int_0^t \left(-\frac{L(t)}{mb} \dot{\xi} + \frac{M_\alpha(t)}{mb^2} \dot{\alpha} \right) dt$$

Trabalho da força de amortecimento:

$$E_d = \int_0^t \lambda_n \dot{\nu} \cdot \dot{\nu} dt$$

Resultados

Análise paramétrica

Em princípio, ressalta-se que todo estudo aqui realizado não apresenta, em nenhum momento, mudança no valor de massa do dispositivo dissipador, sendo ela sempre considerada como: $\mu_n = 0.1$. Além disso, considera-se as condições de contorno iniciais do sistema sempre como nulas, com exceção do ângulo de *pitch*, o qual é dado como 1° .

Realizou-se a análise paramétrica dos dispositivos, ou seja, variou-se: amortecimento (λ_n), rigidez (γ_n) e posição (δ) deles.

Iniciando pelo amortecimento, considerou-se a seguinte configuração de referência: $\gamma_n = 5 \cdot 10^5$ e $\delta = -0.75$, utilizando como referência [8]. Obtendo os resultados descritos nas curvas das figuras 2 e 3, para o dispositivo de terceira e de quinta ordem, respectivamente.

Nessas curvas, está presente a variável r , a qual é definida como: $r = \lambda_n / \lambda_{n_{crit}}$. Ela é definida em [8] e denota o amortecimento crítico do dispositivo em função da frequência crítica de flutter (ω_n) e da sua razão de massa (μ_n).

Ao observar a figura 2, a diminuição da razão r proporciona um aumento da faixa de velocidades nos quais o sistema mantém as amplitudes médias do movimento de *plunge* ($rm(\xi)$) praticamente nulas. Em outras palavras, esse grau de liberdade não entra em regime de LCO (*limit*

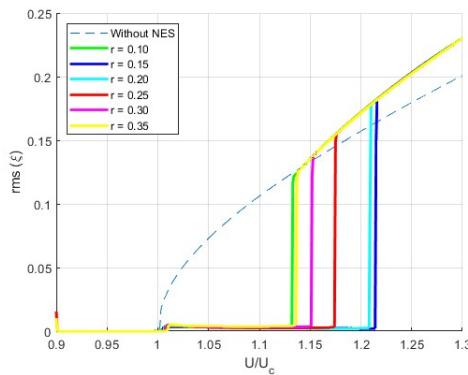


Figura 2: Variação do parâmetro λ_n considerando um NES de rigidez de terceira ordem.

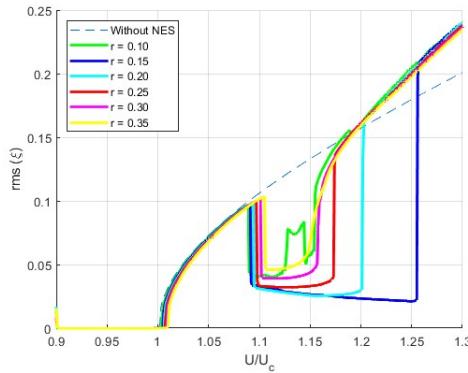


Figura 3: Variação do parâmetro λ_n considerando um NES de rigidez de quinta ordem.

cycle oscillations)) e, por conseguinte, não está em situação de *flutter*.

A segunda avaliação paramétrica feita é com relação ao valor de rigidez (γ_n), mais precisamente com relação a ordem de grandeza e a sua influência sobre as curvas de amplitudes médias do movimento de *plunge*.

Na figura 4, é possível observar que, considerando a configuração de referência como sendo: $r = 0.5$ e $\delta = -0.75$, a ordem de grandeza de 10^5 é um valor tido como bom, pois, conforme ela é diminuída, as curvas se deslocam verticalmente para cima, o que significa uma existência de amplitudes de movimento. Quando esse valor é aumentado, não ocorre nenhuma mudança significativa, haja visto que os valores de amplitudes já são nulos.

Nas figuras 5 e 6, é possível aferir, considerando a mesma configuração expressa para o de terceira ordem, que os valores de rigidez para

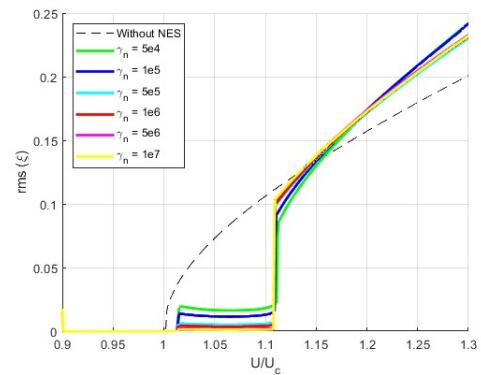


Figura 4: Variação do parâmetro γ_n considerando um NES de rigidez de terceira ordem.

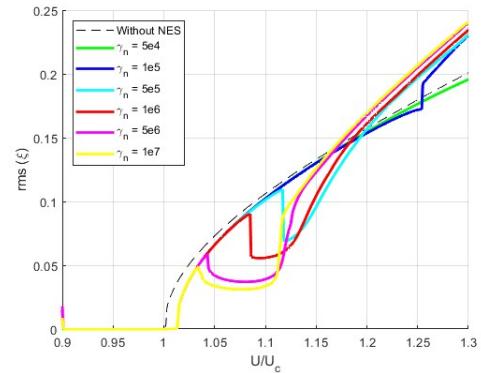


Figura 5: Variação do parâmetro γ_n considerando um NES de rigidez de quinta ordem.

o de quinta ordem devem ser muito elevados, quando o objetivo é ter um comportamento minimamente aceitável, o qual se torna comparável com o de terceira ordem, como é possível ver nas curvas da figura 6.

Como último variação dentro da análise paramétrica, variou-se a posição (δ). Sabe-se, da literatura, que as posições mais próximas ao bordo de fuga do aerofólio são menos eficientes; logo, considerou-se somente aquelas que vão do centro elástico do aerofólio (origem do sistema de coordenadas) até o bordo de ataque.

Nota-se que, a partir da figura 7, confirma-se o que encontra-se nas referências bibliográficas, ou seja, a diminuição de dissipação conforme desloca-se o dispositivo em direção ao eixo elástico. Já na figura 8, aferir-se a presença de uma mudança de comportamento nesse deslocamento, o que não é algo visto no dispositivo de terceira ordem. Na posição definida como cen-

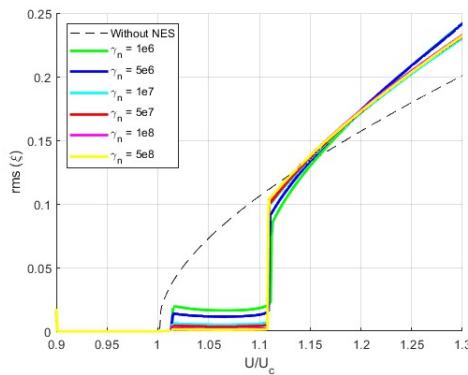


Figura 6: Variação do parâmetro γ_n considerando um NES de rigidez de quinta ordem, com maiores ordens de grandeza.

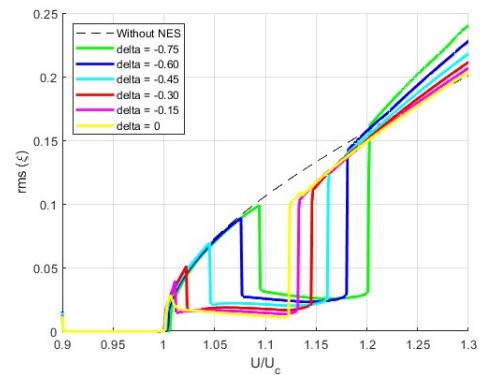


Figura 8: Variação do parâmetro δ considerando posições desde o bordo de ataque até o bordo de fuga do aerofólio considerando o NES de rigidez de quinta ordem.

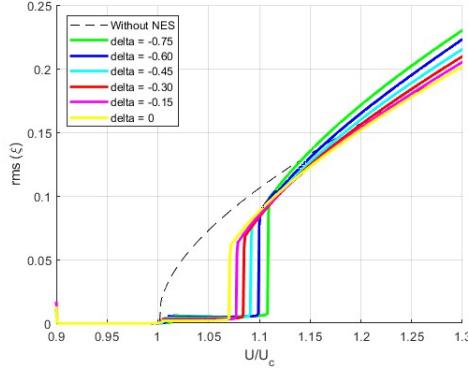


Figura 7: Variação do parâmetro δ considerando posições desde o centro elástico até o bordo de ataque do aerofólio considerando o NES de rigidez de terceira ordem.

tro elástico ($\delta = 0$), o de quinta ordem comporta-se de maneira similar ao de terceira, apesar de não anular por completo a média das amplitudes do movimento de *plunge*, as mantêm em um valor de ordem de grandeza muito baixo, menores que 0.05. Na posição em que $\delta = -0.75$, por sua vez, há o mesmo comportamento visto e já explicado na figura 3, algo exclusivo desse tipo nesta análise.

Transfer Energy Targeted (TET)

Nessa parte, como fora supracitado, buscou-se reiterar os resultados observados na análise paramétrica, mas, agora, utilizando uma análise de energia.

Na figura 9, está disposta uma visualização

das componentes de energia presentes no sistema: energia mecânica, energia injetada através do escoamento aerodinâmico e a energia dissipada. Está sendo exposto um sistema no qual está acoplado um dispositivo dissipador com as seguintes configurações: $\delta = -0.75$, $r = 0.5$ e $\gamma_n = 5 \cdot 10^5$, e a velocidade de escoamento é igual a: $U = 1.15 \cdot U_c$.

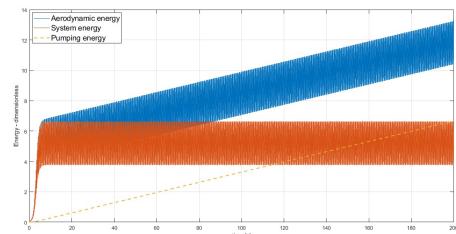


Figura 9: Visualização das componentes de energia presentes no sistema analisado.

Observa-se um fenômeno interessante que a energia mecânica do sistema é o resultado da diferença entre a energia injetada no sistema e a energia dissipada, de tal forma que ela se mantém praticamente constante ao longo do tempo.

Na figura 10, está disposta uma comparação entre a energia mecânica do sistema com e sem a presença do dispositivo *nonlinear energy sink*. Ela permite avaliar o tamanho da efetividade da dissipação do NES. É interessante ressaltar que a energia mecânica do dispositivo é muito menor que a energia mecânica do aerofólio, de forma

que ela não influencia de maneira significativa essa análise.

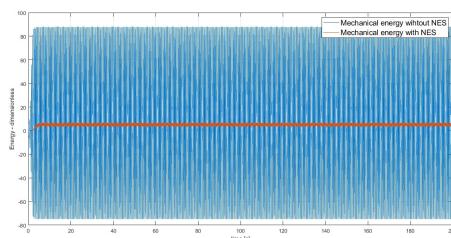


Figura 10: Comparação entre a energia mecânica do sistema com e sem a presença do *nonlinear energy sink*.

Conclusões

Conclui-se, a partir dos resultados obtidos, que a utilização do dispositivos de dissipação não-lineares, em específico, os do tipo *nonlinear energy sink*, são boas formas de controle passivo de vibrações aeroelásticas, como o *flutter*.

Esses dispositivos podem se apresentar de diversas formas e em diversas configurações. No presente estudo, ao considerar dois deles, os quais possuem diferenças no comportamento de sua rigidez não-linear (um de terceira e um de quinta ordem), e os comparar, foi possível verificar que eles podem se comportar tanto de maneira similar quanto de maneira completamente distinta.

Quando varia-se o valor de amortecimento de ambos, percebe-se um comportamento completamente distinto entre eles; já que, enquanto o de terceira ordem não permite com que o sistema entre em LCO da velocidade crítica de *flutter* até determinada velocidade acima, o de quinta ordem, por sua vez, permite, mas, depois de uma determinada velocidade, passa a dissipar a energia do sistema, de forma a diminuir o valor médio da amplitude do movimento de *plunge*. Considerando valores muito altos de rigidez, o dispositivo de quinta ordem passa a se comportar como se fosse o de terceira, que necessita de valores de rigidez menores, mantendo-se os demais parâmetros iguais entre eles. Com relação à posição de ambos no aerofólio, apesar do comportamento ainda ser distinto, de maneira similar ao que ocorre quando varia-se λ_n , sabe-se que ambos possuem melhor eficiência e funcionalidade quando estão mais próximos ao bordo de ataque do aerofólio.

Por fim, toma-se que ambos possuem boa capacidade de dissipação da energia e diminuem em muito a energia mecânica presente no sistema, o que tem por consequência a diminuição da amplitude dos movimentos de vibração do sistema.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, ao Prof. Dr. Flávio Donizeti Marques, o qual confiou em mim desde o início da elaboração do projeto, além de ter fornecido o apoio necessário para que a iniciação científica pudesse ter sido realizada. Ademais, também se faz necessário agradecer ao Eng. Gabriel Araujo, mestrandando e orientado do Prof. Dr. Flávio, que me forneceu suporte técnico e psicológico, o que foi essencial para o desenvolvimento e conclusão da pesquisa. Por fim, agradeço também a Universidade de São Paulo (USP), a Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) e o Laboratório de Dinâmica, vinculado ao Departamento de Engenharia Mecânica da EESC, que me proporcionaram a oportunidade de ter participado desse projeto enriquecedor ligado ao desenvolvimento de conhecimento e tecnologias no setor aeroespacial.

Referências

- [1]. M. A. Al-Shudeifat. **Highly efficient nonlinear energy sink**. *Nonlinear Dynamics*, 76:1905–1920, 2014.
- [2]. N. A. Alexander and F. Schilder. **Exploring the performance of a nonlinear tuned mass damper**. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2):445–462, 2009.
- [3]. G. P. Araujo, J. A. I. da Silva, and F. D. Marques. **Passive flutter mitigation with rotary nonlinear energy sink**. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–19, 2024.
- [4]. Y. Bichou, M. R. Hajj, and A. H. Nayfeh. **Effectiveness of a nonlinear energy sink in the control of an aeroelastic system**. *Nonlinear Dynamics*, 86:2161–2177, 2016.
- [5]. R. L. Bisplinghoff and H. Ashley. **Principles of aeroelasticity**. Courier Corporation, 1975.
- [6]. R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. L. Halfman. **Aeroelasticity**. Courier Corporation, 2013.
- [7]. R. R. Craig Jr and A. J. Kurdila. **Fundamentals of structural dynamics**. John Wiley

- Sons, 2006.
- [8]. J. A. I. da Silva, L. Sanches, and F. D. Marques. **Dynamic characterization of an aeroelastic typical section under nonlinear energy sink passive control by using multiple scales and harmonic balance methods.** *Acta Mechanica*, 234(4):1571–1598, 2023.
- [9]. G. Dimitriadis. **Introduction to nonlinear aeroelasticity.** John Wiley Sons, 2017.
- [10]. Y. C. Fung. **An introduction to the theory of aeroelasticity.** Courier Dover Publications, 2008.
- [11]. O. Gendelman, L. I. Manevitch, A. F. Vakakis, and R. M'Closkey. **Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part I - Dynamics of the underlying Hamiltonian systems.** *Journal of Applied Mechanics*, 68(1):8, 2001.
- [12]. H. Guo, S. Cao, T. Yang, and Y. Chen. **Aeroelastic suppression of an airfoil with control surface using nonlinear energy sink.** *Nonlinear Dynamics*, 94:857–872, 2018.
- [13]. D. H. Hodges and G. A. Pierce. **Introduction to structural dynamics and aeroelasticity**, volume 15. cambridge university press, 2011.
- [14]. Y. Liu, G. Chen, and X. Tan. **Dynamic analysis of the nonlinear energy sink with local and global potentials: geometrically nonlinear damping.** *Nonlinear Dynamics*, 101:2157–2180, 2020.
- [15]. Z. Lu, Z. Wang, Y. Zhou, and X. Lu. **Nonlinear dissipative devices in structural vibration control: A review.** *Journal of Sound and Vibration*, 423:18–49, 2018.
- [16]. D. Q. Q. Pacheco, F. D. Marques, and A. J. M. Ferreira. **Panel flutter suppression with nonlinear energy sinks: Numerical modeling and analysis.** *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 106:108–114, 2018.
- [17]. A. S. Saeed, R. Abdul Nasar, and M. A. AL-Shudeifat. **A review on nonlinear energy sinks: designs, analysis and applications of impact and rotary types.** *Nonlinear Dynamics*, 111(1):1–37, 2023.
- [18]. T. Theodorsen. **General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter.** Technical report, 1979.
- [19]. A. F. Vakakis. **Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems.** *J. Vib. Acoust.*, 123(3):324–332, 2001.
- [20]. A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, and Y. S. Lee. **Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems**, volume 156. Springer Science Business Media, 2008.
- [21]. R. Vasconcellos, A. Abdelkefi, F. D. Marques, and M. R. Hajj. **Representation and analysis of control surface freeplay nonlinearity.** *Journal of Fluids and Structures*, 31:79–91, 2012.
- [22]. H. Yamaguchi and N. Harnpornchai. **Fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations.** *Earthquake engineering structural dynamics*, 22(1):51–62, 1993.
- [23]. Z. Yan, S. A. Ragab, and M. R. Hajj. **Passive control of transonic flutter with a nonlinear energy sink.** *Nonlinear Dynamics*, 91:577–590, 2018.