

nº 70

Quase-fólheações e integrais de curvatura no plano.

Remi Langevin e Claudio Possani

Agosto 1984

QUASE-FOLHEAÇÕES E INTEGRAIS DE CURVATURA NO PLANO

Remi Langevin

Claudio Possani

I. INTRODUÇÃO

Seja M uma variedade Riemanniana e \mathcal{F} uma folheação de M com singularidades isoladas. Para x em $M - \text{Sing}\mathcal{F}$ indicamos por $|k(x)|$ o módulo da curvatura geodésica, em x , da folha que passa por x . A *curvatura total* de \mathcal{F} , $k(\mathcal{F}) \in [0; +\infty]$, é, por definição, o valor da integral

$$\int_M |k(x)|.$$

Em [L.L.1], R. Langevin e G. Levitt demonstram que se M é uma superfície de curvatura constante -1 e \mathcal{F} é uma folheação de M com singularidades do tipo sela, então a curvatura total de \mathcal{F} é maior do que ou igual a $(12 \log 2 - 6 \log 3) \cdot |X(M)|$.

Em [L.L.2], R. Langevin e G. Levitt mostram que se \mathcal{F} é uma folheação orientável do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, tangente ao bordo, então $k(\mathcal{F}) \geq 2\pi - 4$.

Nos dois trabalhos citados são exibidas as folheações que minimizam a curvatura total.

Neste trabalho demonstraremos os seguintes resultados na linha dos trabalhos acima:

Teorema 1: Seja D uma região do plano \mathbb{R}^2 , homeomorfa ao disco D^2 e limitada por uma curva regular, ∂D , e seja F uma folheação de D , tangente ao bordo, com singularidades de índice positivo. Então $k(F) \geq \ell(\partial D) - 2d$, onde $\ell(\partial D)$ é o comprimento do bordo de D e d é o diâmetro (ou diâmetro geodésico) de D . (Veja definição de diâmetro interior no parágrafo III).

Teorema 2: Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ uma região homeomorfa ao anel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r_1 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}$ com bordo ∂A formado por duas curvas regulares, C_1 (externa) e C_2 (interna) e seja F uma folheação de A , tangente ao bordo, sem singularidades. Então

$$k(F) \geq \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d \quad \text{onde } d \text{ é o comprimento da envoltória convexa geodésica interior de } C_2. \text{ (Veja definição no parágrafo V).}$$

Definiremos a noção de quase-folheação e mostraremos que em cada um dos casos acima o mínimo da curvatura total é atingido numa quase-folheação de D ou A , respectivamente.

II - QUASE-FOLHEAÇÕES

Uma quase-folheação de uma região D pode ser pensada como uma folheação de D que possui um conjunto crítico C , onde a folheação é "angulosa", mas de modo que

possamos calcular a "curvatura da folheação acumulada em C ".

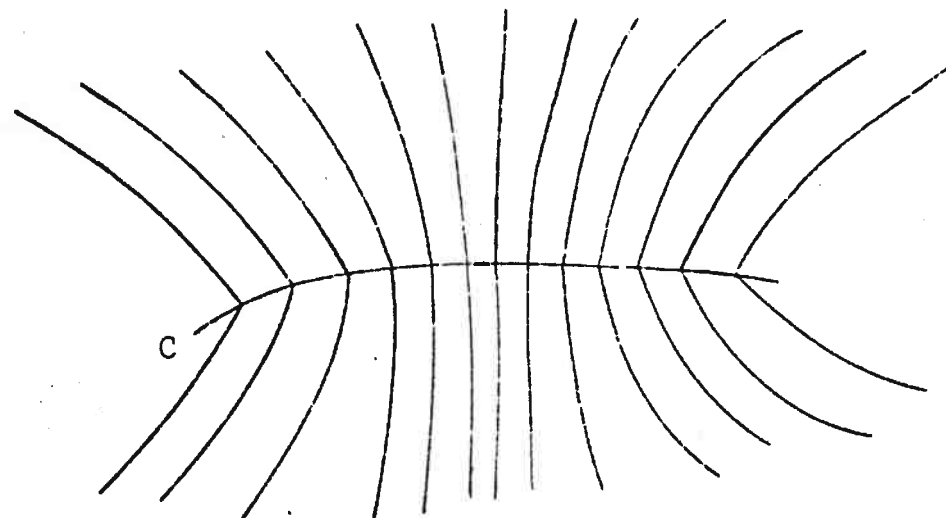


figura 1

No que segue D será sempre uma região do plano homeomorfa ao disco $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, com bordo D , curva regular.

Definição. Se \mathcal{F} é uma folheação de uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ e L é uma reta do plano então $|\mu|(\mathcal{F}; L) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é o número de pontos de contato entre L e \mathcal{F} . Analogamente se I é um intervalo aberto em \mathbb{R}^2 , $|\mu|(\mathcal{F}; I)$ é o número de pontos de contato entre I e \mathcal{F} .

Definição: Uma *quase-folheação* de uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma terna $(\mathcal{F}^{(n)}; \mathcal{F}; C)$ onde $\mathcal{F}^{(n)}$ é uma sequência de folheações de D tangentes ao bordo de D , C é um conjunto finito de curvas e \mathcal{F} uma folheação de $D-C$ verificando:

- (I) $\mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \mathcal{F}$ em $D-C$, na topologia C^2 .

(II) Para todo segmento I do \mathbb{R}^2 , existe o limite

$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu|(F^{(n)}; I)$. Este limite será indicado

por $|\mu|(F; I)$.

(III) $k(F^{(n)}) < M$, para algum $M \in \mathbb{R}^+$ independente de n .

Se F é uma folheação por retas de D-C, então $(F^{(n)}; F; C)$ será dita *quase-folheação geodésica*.

Quando não houver possibilidade de confusão indicaremos a quase folheação por F .

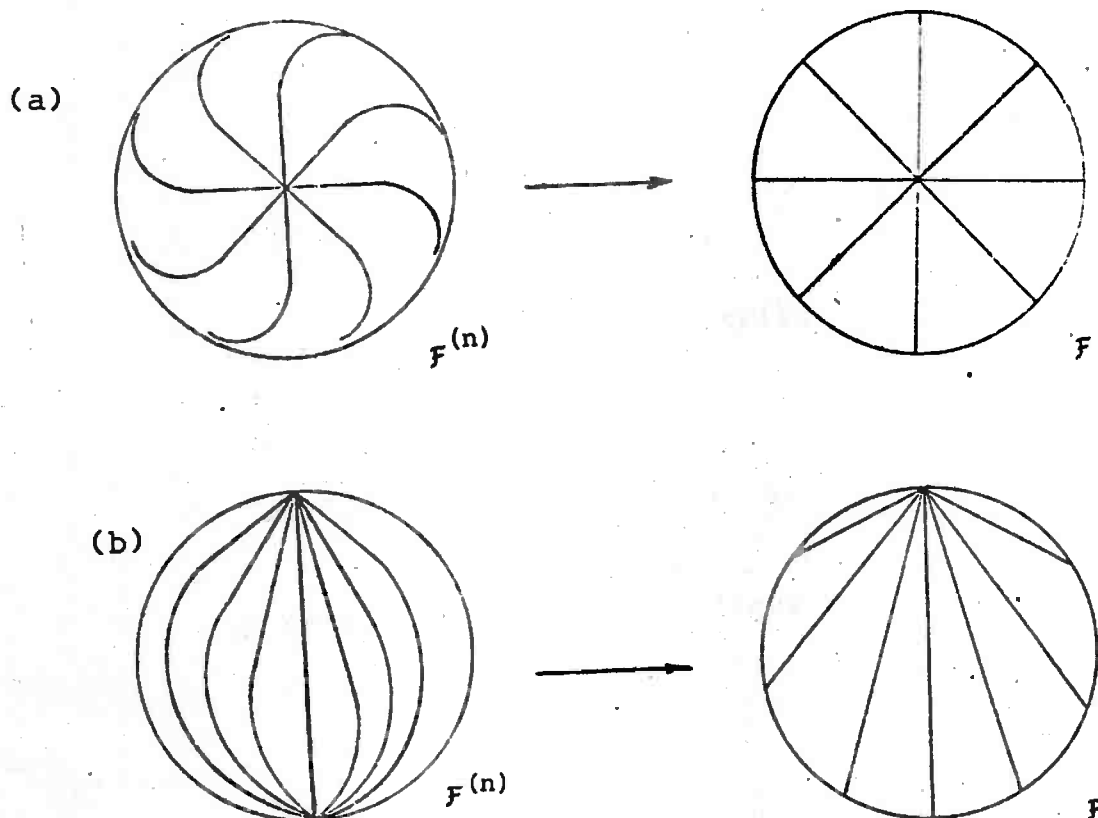


figura 2

Por analogia ao Teorema da Troca (Exchange Theorem) [BLR] definimos a *curvatura total* $k(\mathcal{F})$ da quase-folheação \mathcal{F} por

$$k(\mathcal{F}) = \int_G |\mu|(\mathcal{F}; L) \, dm(L).$$

Da condição III da definição de quase-folheação e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\begin{aligned} k(\mathcal{F}) &= \int_G |\mu|(\mathcal{F}; L) \, dm(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |\mu|(\mathcal{F}^{(n)}; L) \, dm(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D |k^{(n)}|(x) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} k(\mathcal{F}^{(n)}). \end{aligned}$$

Uma folheação $\mathcal{F}^{(n)}$ determina, de modo natural, uma distribuição de curvatura $T_{\mathcal{F}^{(n)}}$ (em nosso caso esta distribuição é uma medida) em D : a cada $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{C}^∞ de suporte compacto, $T_{\mathcal{F}^{(n)}}(\phi) = \int_D \phi(x) |k^{(n)}|(x) \, dx$.

Em $D-C$, \mathcal{F} determina uma distribuição de curvatura $T_{\mathcal{F}}$ de modo análogo:

$$T_{\mathcal{F}}(\phi) = \int_{D-C} \phi(x) \cdot |k|(x) \, dx$$

Das condições I, II e III segue que existem, no sentido de distribuições, os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathcal{F}^{(n)}}$ e

$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_{\mathcal{F}^{(n)}} - T_{\mathcal{F}})$ que são também medidas, em nosso caso. O suporte da distribuição $T = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_{\mathcal{F}^{(n)}} - T_{\mathcal{F}})$ está contido no conjunto crítico C porque $\mathcal{F}^{(n)} \rightarrow \mathcal{F}$ com classe \mathcal{C}^2 , fora

de C [L1].

Se F é uma quase-folheação geodésica, a curvatura total de F está concentrada em C , e pode ser calculada de uma maneira simples, a partir do ângulo θ determinado em cada ponto de C pelas retas da quase-folheação e por C .

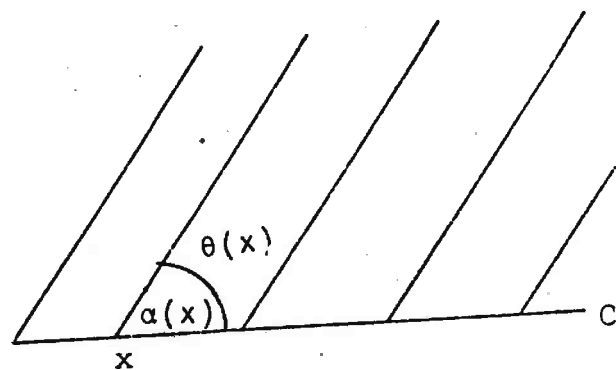
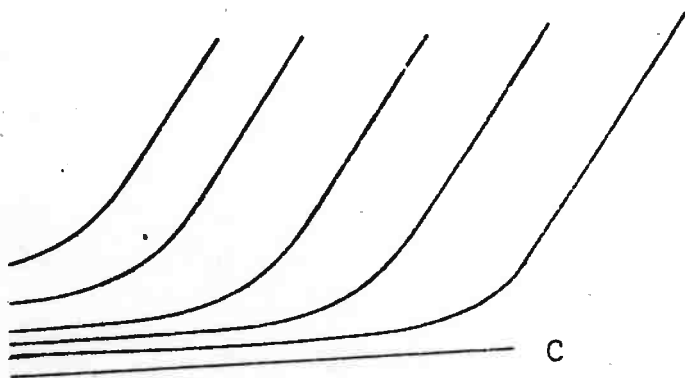


figura 3

Toda reta pertencente a $\theta(x)$ e passando por x tem contato com F .

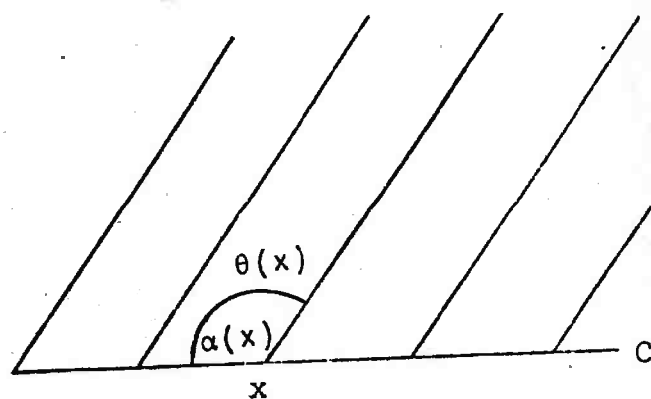
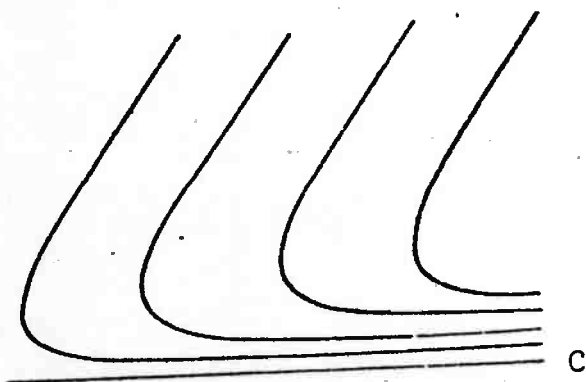


figura 4

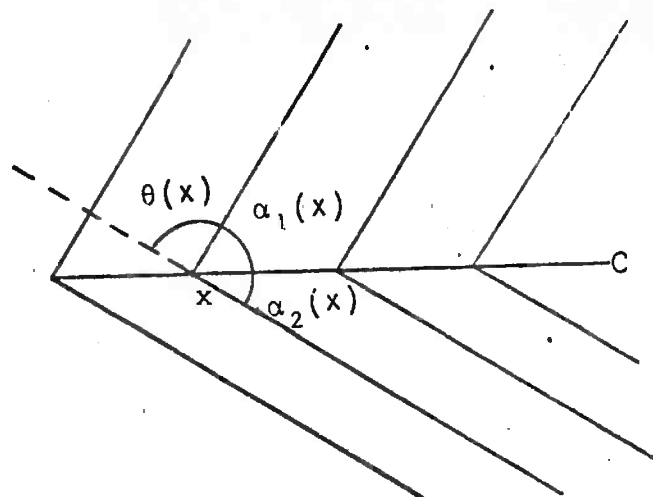
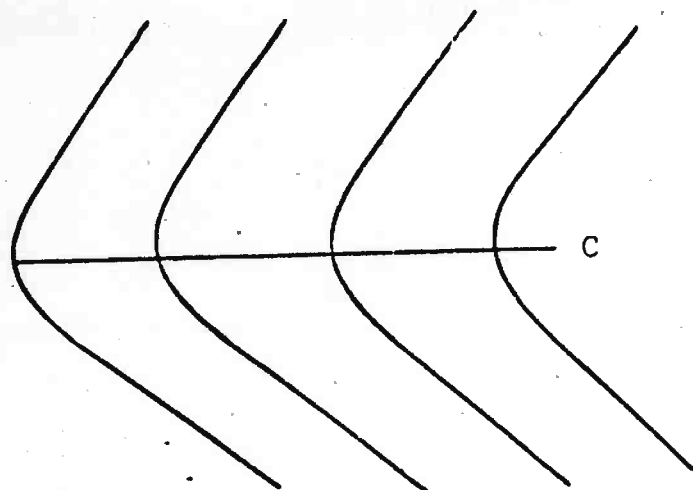


figura 5

Seja L uma reta do plano passando por $x \in C$, e suponhamos que L e F tenham contato; indicando por ds o elemento de arco em C tem-se

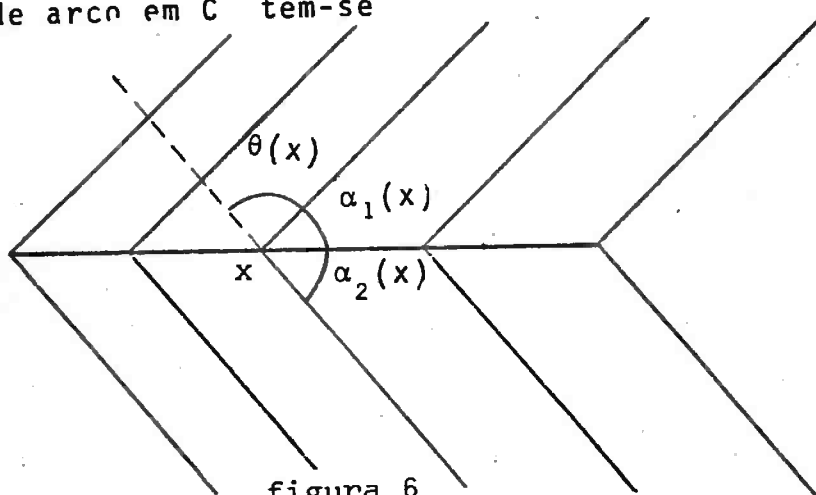


figura 6

A medida das retas que passam por ds e são paralelas a L é

$\sin \alpha \, ds$.

Como toda reta pertencente ao ângulo $\theta(x)$ tem contato a medida do conjunto de retas que passam por ds e têm contato com F é

$$\left(\int_{\alpha_2}^{\pi - \alpha_1} \sin \phi(x) \, dx \right) ds = (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) ds$$

Logo se F é geodésica

$$\int_G |\mu|(F_i L) = \int_C (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi$$

Assim nos exemplos anteriores tem-se

$$(a) \quad k(F) = \int_C \cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = \int_0^{2\pi} 1 \, ds = 2\pi.$$

$$(b) \quad k(F) = \int_C \cos \alpha_1 + \cos 0 = 2 \int_0^\pi [\cos(\pi - \frac{\phi}{2}) + 1] \, d\phi = 2\pi - 4.$$

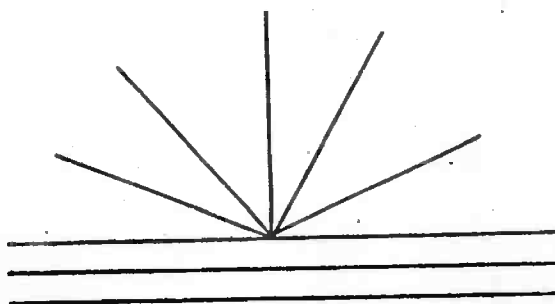
III - CURVATURA TOTAL

Teorema: Sejam D uma região do plano \mathbb{R}^2 , homeomorfa ao disco D^2 , com bordo ∂D , curva regular e F uma folheação de D , tangente ao bordo com singularidades de índice positivo. Então

$$k(F) \geq \ell(C) - 2d,$$

onde $\ell(C)$ é o comprimento do bordo C e d é o diâmetro geodésico de D : $d = \sup\{d(x,y); x,y \in D\}$, onde $d(x,y)$ é o comprimento da geodésica γ D , ligando x e y .

Demonstração: Podemos supor que F tenha 2 singularidades do tipo "por-do-sol":



Singularidades de índice $+1$ ou $\frac{1}{2}$ podem ser transformadas em singularidades do tipo por-do-sol, através das operações indicadas abaixo aumentando-se a curvatura total de F , tão pouco quanto se queira.

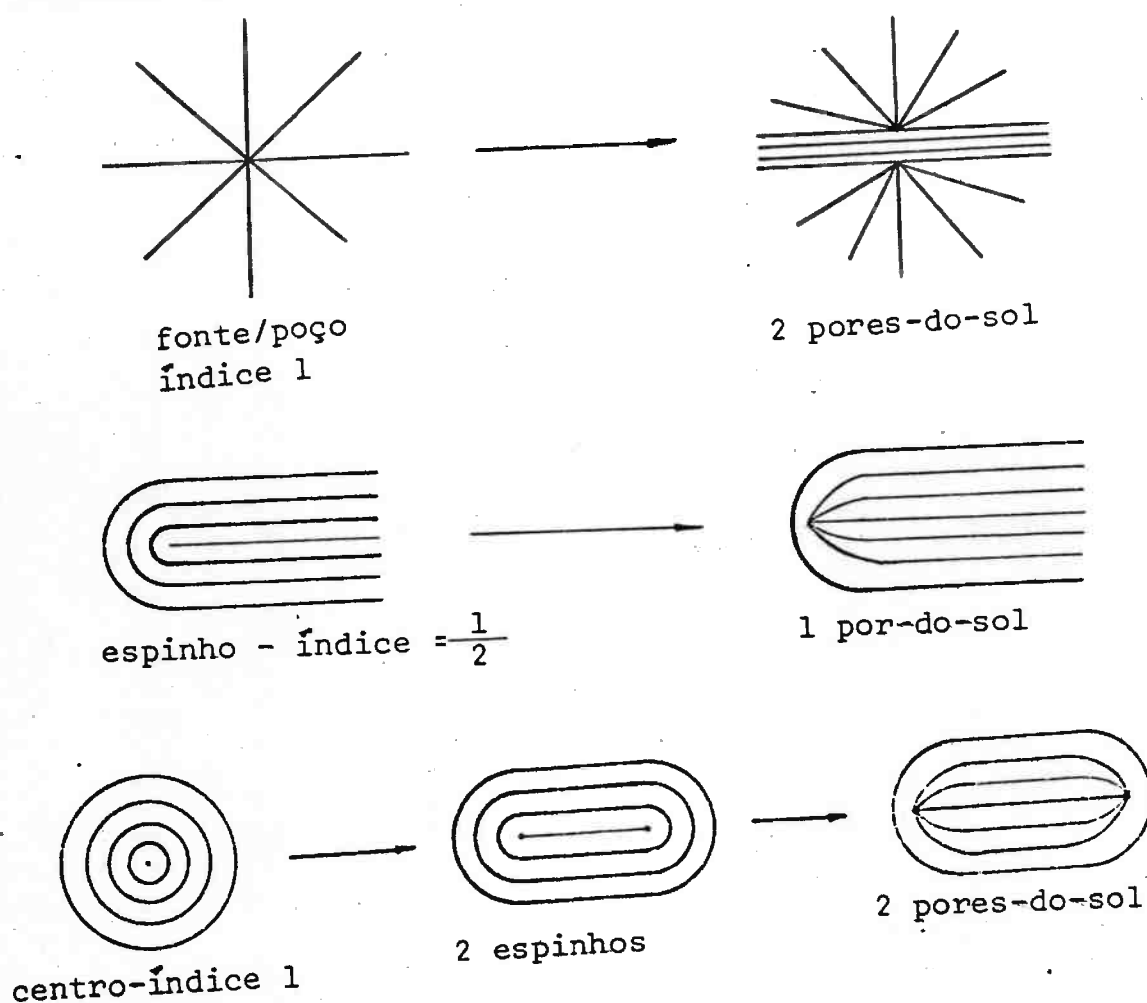
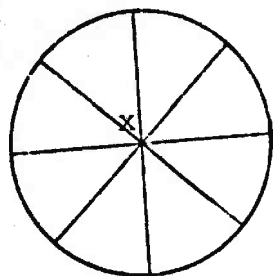


figura 8

De uma maneira mais geral, qualquer singularidade civilizada, isto é, tal que a oscilação do campo de retas restrito a qualquer círculo centrado no ponto singular seja uniformemente majorada, pode ser substituída por um poço ou um por-do-sol aumentando-se a curvatura total tão pouco quanto se queira.

Vamos substituir a folheação numa vizinhança

de raio r do ponto crítico x , por uma das duas folheações padrões seguintes



índice 1

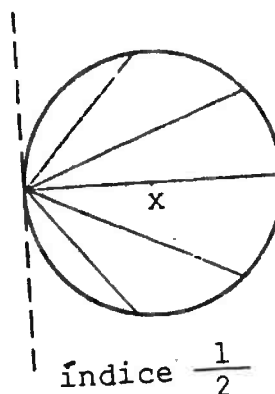


figura 9

Seja θ_1 a função ângulo no círculo bordo de D_r , das folheações padrões acima e θ_0 a função ângulo determinada por F . θ_0 é de oscilação majorada e é homotópica a uma das funções θ_1 definidas acima. Existe homotopia entre θ_0 e θ_1 com oscilação majorada (por exemplo usando interpolação linear de funções de recobrimento de θ_0 e θ_1).

Num anel de largura $\delta \ll r$ a homotopia θ_+ determina um campo de retas nos círculos concêntricos de raio entre r e $r-\delta$. A curvatura total da folheação assim determinada é majorada por

$$\int_{\text{anel}} |k| \leq \int_{\text{anel}} \sqrt{k^2 + k^{\perp 2}} = \int_{\text{anel}} \|\text{grad } \theta\|$$

As componentes de $\text{grad } \theta$ em coordenadas polares $(\rho; \phi)$ são $\frac{\partial \theta}{\partial \rho}$ e $\rho \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$. Então vale a seguinte majo-

ração

$$\int_{\text{anel}} |k| \leq \int_{\text{anel}} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right| + \int_{\text{anel}} r \left| \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|$$

Pela definição do campo essas duas integrais são de mesma ordem de grandeza que r .

Agora colocamos no disco de centro x e raio r uma das folheações padrões e fazendo r tender a zero, obtemos folheações com um poço do tipo padrão ou um por-do-sol do tipo padrão e com curvatura total tão próxima da curvatura total de F quanto quisermos.

A demonstração do teorema está baseada no Teorema da Troca ([L-2] ou [BLR]). Seja γ a geodésica interior a D ligando os dois pores-do-sol,

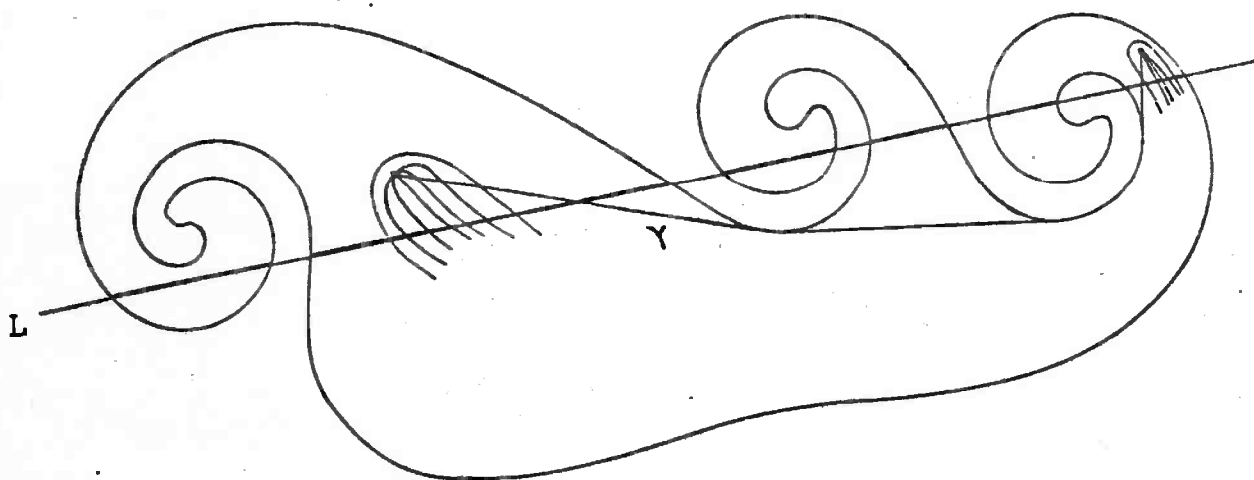


figura 10

Vamos determinar o número de contatos de uma reta L , do plano, e \mathcal{F} . Salvo num conjunto de retas de medida nula, L encontra D num número finito de segmentos. Em cada segmento que não encontra γ há pelo menos um contato entre \mathcal{F} e L . De fato se \overline{AB} é um segmento de LND que não encontra γ , então o bordo C e AB determinam dois "discos" no plano e como $AB \cap \gamma = \emptyset$, os dois pores-do-sol estão num mesmo disco.

No disco que não contém os pores-do-sol a folheação é orientável e a situação está descrita abaixo

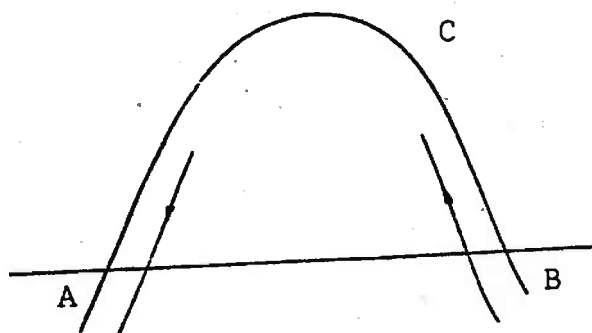


figura 11

Assim há pelo menos um ponto de contato em AB . Indicando por $n(L)$ número de segmentos em que L encontra D e não corta γ e por $s(L)$ o número de segmentos em que L encontra γ temos

$$|\mu|(\mathcal{F}; L) \geq n(L), \text{ e}$$

$$L(C) = \frac{1}{2} \int_G \#(LNC) = \int_G n(L) + s(L) \quad [S].$$

Daí

$$L(C) = \int_G n(L) + \int_G s(L)$$

$$L(C) \leq \int_G |\mu|(F; L) + \int_G s(L) = \int_G |\mu|(F; L) + 2L(\gamma)$$

$$\text{e portanto } k(F) = \int_G |\mu|(F; L) \geq L(C) - 2d$$

onde d é o diâmetro interior de D .

IV - MÍNIMO DA CURVATURA TOTAL

Mostraremos neste parágrafo que em D sempre existe uma quase-folheação F que minimiza a curvatura total, isto é,

$$k(F) = L(D) - 2d.$$

Lema 1: Quaisquer que sejam p e q em D , existe uma única geodésica $\gamma \subset D$, ligando p e q .

A existência desta geodésica está demonstrada em [H, pg. 184]. Para um estudo da existência de geodésicas em casos mais gerais ver [A, A].

A unicidade segue do fato de D ser simplesmente conexa: Se γ_1 e γ_2 forem geodésicas ligando p e q , $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, então a curva fechada $\gamma_1 \cup \gamma_2$ limita uma região R homeomorfa a um disco, com $R \subset D$. Existirá então um arco \widehat{AB} , localmente convexo em ∂R . Suponhamos $\widehat{AB} \subset \gamma_1$. A curva γ_3

obtida de γ_1 , trocando-se \widehat{AB} pelo segmento AB , esta contida em R , liga p e q e tem comprimento menor que γ_1 , o que é impossível.

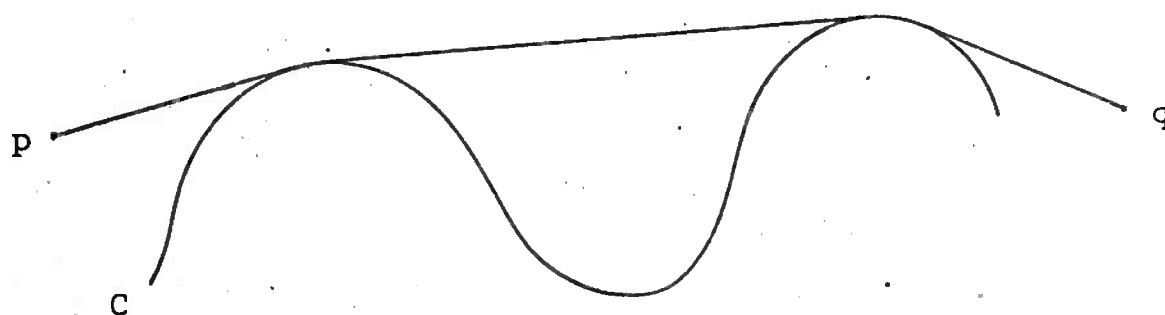


figura 12

Em D sejam P e Q dois pontos tais que a geodésica γ ligando P e Q seja um diâmetro interior de D . P e Q estão necessariamente em ∂D . Todo ponto $x \in D$ pode ser unido a P por uma (única) geodésica γ_x contida em D . Estas geodésicas determinam uma folheação de $D - \partial D$, por retas.

Lema 2. A folheação de $D - \partial D$, por retas, determinada acima é uma quase-folheação \mathcal{F} de D .

Demonstração: O conjunto crítico é $C = \partial D$, \mathcal{F} é a folheação por retas determinada acima. Para definirmos a sequência de folheações $\mathcal{F}^{(n)}$ procedemos como segue: todas as folheações terão 2 pores-do-sol, em P e Q . Como P e Q pertencem a ∂D , as folheações $\mathcal{F}^{(n)}$ serão orientáveis e podemos defini-las através de campos de vetores.

Seja V_{ϵ_n} a vizinhança tubular de ∂D em D de raio ϵ_n . Em $D - \partial D$ \mathcal{F} determina um campo de vetores C^∞ , X . Em $D - V_{\epsilon_n}$, tomamos $Y_n = X$. Em $V_{\epsilon_n/2}$, colocamos uma folheação com dois pores-do-sol, paralela a ∂D , conforme modelo abaixo, e definimos $Y_n|_{V_{\epsilon_n/2}}$ como sendo o campo induzido pela folheação.

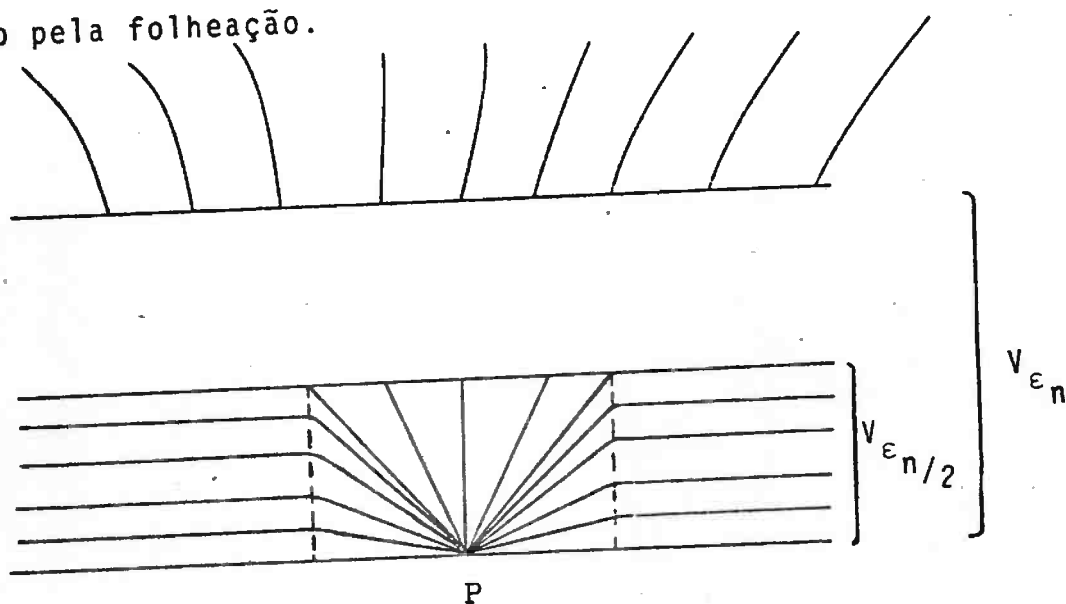


figura 13

Estendemos o campo Y_n definido acima, a $\overline{V_{\epsilon_n} - V_{\epsilon_n/2}}$, de modo que Y_n não tenha singularidades em D : tomamos Y_n em $\overline{V_{\epsilon_n} - V_{\epsilon_n/2}}$, que varie linearmente nas secções ortogonais à curva σ que limita V_{ϵ_n} internamente, e coincida em $\partial(V_{\epsilon_n} - V_{\epsilon_n/2})$ com o campo Y_n como foi definido acima e em seguida tomamos a folheação $\mathcal{F}^{(n)}$ como sendo a folheação induzida por Y_n .

A folheação construída acima é de classe C^1 , e de classe C^∞ fora das curvas que limitam internamente as

vizinhanças tubulares V_{ϵ_n} e $V_{\epsilon_n/2}$.

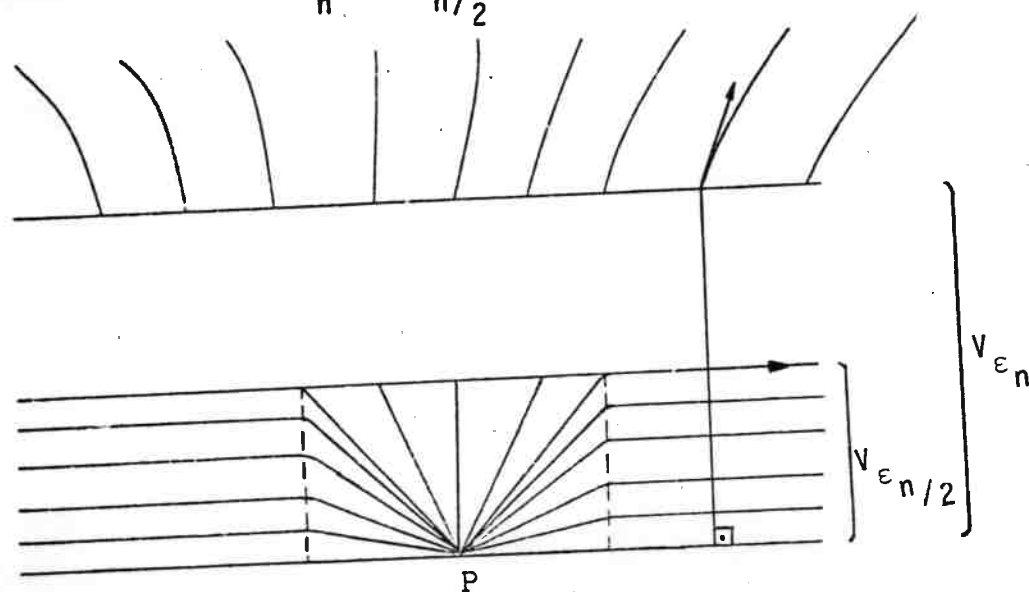


figura 14

Se fizermos ϵ_n tender a 0, então $\mathcal{F}^{(n)}$ tenderá a \mathcal{F} em D-C e existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu|(\mathcal{F}^{(n)}; L).$$

Para concluirmos a demonstração do teorema A basta mostrarmos que com exceção de um conjunto de medida nula de retas do plano, toda reta L do plano verifica a seguinte propriedade: $L \cap D$ é formada por um número finito de segmentos de reta e

a) se um segmento AB não encontra o diâmetro γ então há exatamente um ponto de contato entre L e \mathcal{F} , em AB , isto é, $|\mu|(\mathcal{F}; AB) = 1$.

b) se $AB \cap \gamma \neq \emptyset$ então $|\mu|(\mathcal{F}; AB) = 0$.

Daí seguirá por um raciocínio semelhante ao da demonstração do teorema do parágrafo III que $k(\mathcal{F}) = \lambda(\partial D) - 2d$.

Seja portanto uma reta L do plano e AB um segmento, em $L \cap D$, tal que $AB \cap \gamma = \emptyset$.

Em $D - V_{\varepsilon_n}$, L e $\mathcal{F}^{(n)}$ não possuem contatos pois $\mathcal{F}^{(n)}$ é formada por retas. AB divide D em dois discos homeomorfos ao disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, um dos quais não contém P nem Q .

Neste disco cada folheação $\mathcal{F}^{(n)}$ é orientável e $|\mu|(\mathcal{F}^{(n)}; L) = 1$, para n suficientemente grande, e portanto $|\mu|(\mathcal{F}; L) = 1$.

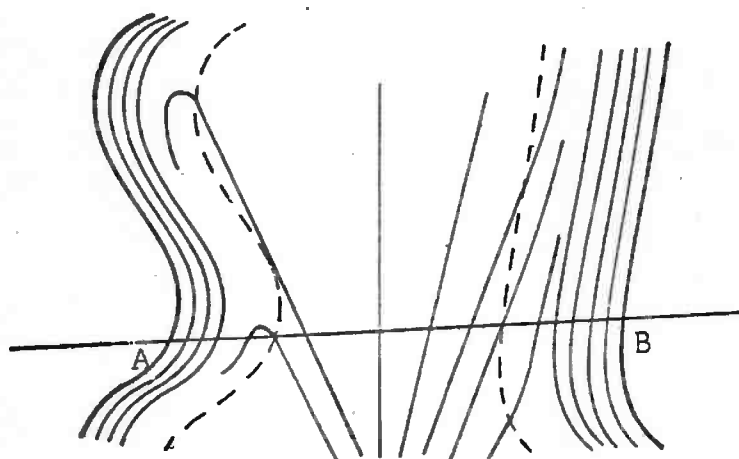


figura 15

Se $AB \cap \gamma \neq \emptyset$ então P e Q estão de lados opostos de AB e $|\mu|(\mathcal{F}^{(n)}; L) = 0$ para n suficientemente grande. Portanto $|\mu|(\mathcal{F}; L) = 0$. (Veja fig. 15).

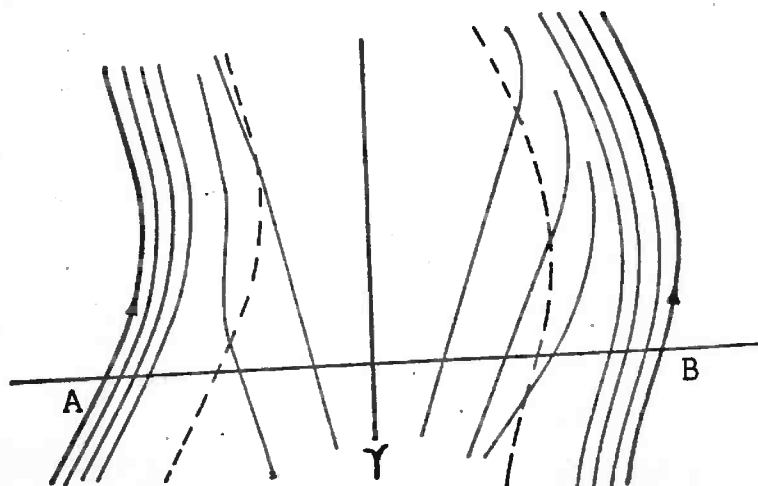


figura 16

Observação: com um pouco mais de paciência poderíamos construir uma aproximação de classe C^∞ para a quase-folheação F .

V - O ANEL

Seja A uma região homeomorfa ao anel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r_1 \leq x^2+y^2 \leq r_2\}$ com bordo ∂A formado por duas curvas regulares, C_1 (externa) e C_2 (interna).

Um conjunto $X \subset A$ é convexo por geodésicas em A se para todo par de elementos x e y em X , as geodésicas unindo x a y em A estão contidas em X .

Definição: a envoltória convexa geodésica interior de um conjunto $U \subset A$, é a intersecção de todos os conjuntos $X \subset A$, convexos por geodésicas tais que $U \subset X$.

Com pequenas modificações nos argumentos já utilizados demonstraremos o

Teorema 2: Seja A uma região homeomorfa a um anel, como acima,

- (a) Se F uma folheação de A , sem singularidades, tangente ao bordo então $k(F) \geq \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$, onde d é o comprimento da curva γ que limita exteriormente a envoltória convexa geodésica interior de C_2 em A . (veja fig. 16).

- (b) Existe uma quase-folheação \mathcal{F} de A que minimiza a curvatura total, isto é, $k(\mathcal{F}) = \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$.

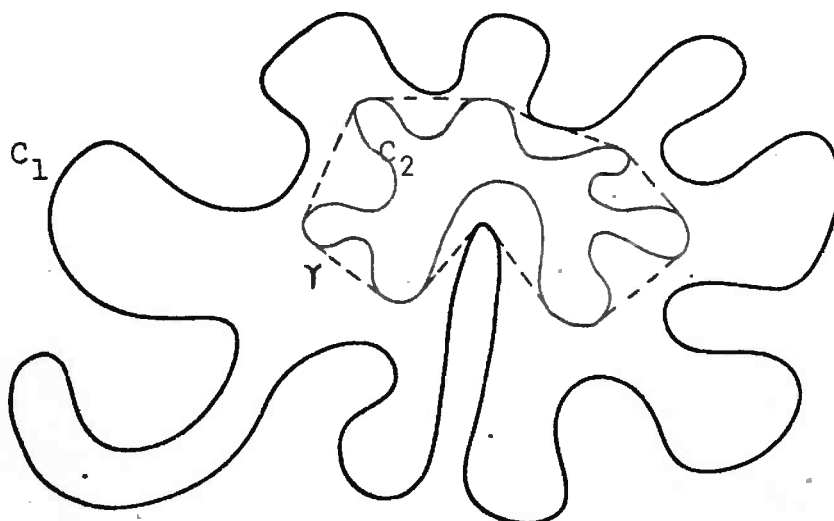
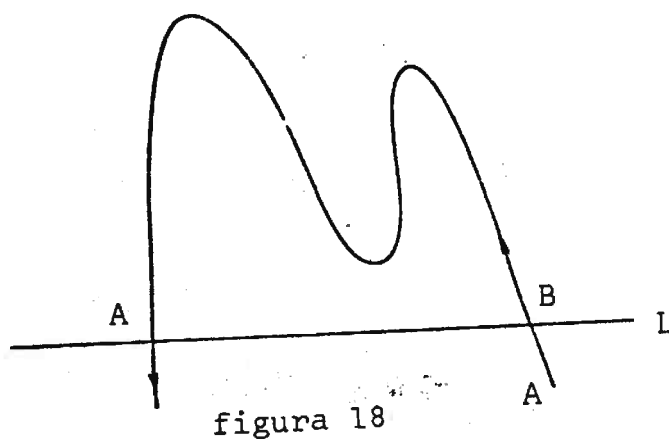


figura 17

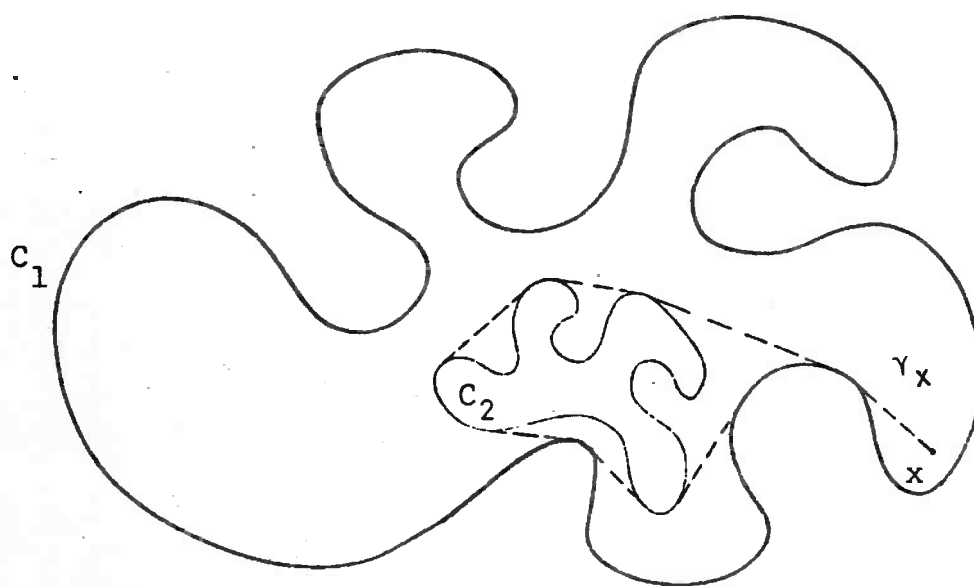
A parte a) do Teorema 2 repousa na seguinte observação: com exceção de um conjunto de medida nula de retas do plano, toda reta $L \subset \mathbb{R}^2$, intercepta A num número finito de segmentos e se um tal segmento AB não intercepta γ , isto é, $AB \cap \gamma = \emptyset$ então AB e \mathcal{F} têm pelo menos 1 contato. Isto ocorre porque se $AB \cap \gamma = \emptyset$ então $\{A; B\} \subset C_1$ ou $\{A; B\} \subset C_2$ e em qualquer caso fica determido um disco do plano como abaixo e $|\mu|(\mathcal{F}; AB) \geq 1$.



A partir daí, repetindo os argumentos usados na parte a) do Teorema 1, conclui-se que $k(F) \geq \ell(\partial A) - 2d = \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$.

Parte b). Começamos com as observações seguintes:

- (1) Qualquer que seja $x \in A$, existe uma única geodésica fechada contida em A , γ_x , passando por x .



(2) Uma orientação em C_2 induz uma orientação em γ_x . Indicamos por $\tilde{\gamma}_x$ o trecho de γ_x que une x até $C_2(x)$ = primeiro ponto de C_2 em que γ_x encontra C_2 , com a orientação induzida por C_2 em γ_x .

(3) Se $x \neq y$ então (a) $\tilde{\gamma}_x \subset \tilde{\gamma}_y$ ou
 (b) $\tilde{\gamma}_y \subset \tilde{\gamma}_x$ ou
 (c) $\tilde{\gamma}_x$ e $\tilde{\gamma}_y$ não se encontram no interior de A .

(4) As geodésicas $\tilde{\gamma}_x$, $x \in A$, determinam uma quase-folheação de A por retas, \mathcal{F} .

Para definirmos a sequência de folheações $\mathcal{F}^{(n)}$ procedemos de modo análogo ao do Lema 2, tomando o cuidado de escolher em C_1 e C_2 a mesma orientação.

(5) Para completarmos a demonstração observamos que se L é uma reta genérica do plano então $L \cap A$ é formada por um número finito de segmentos de retas. Seja AB um destes segmentos.

(a) se $AB \cap \gamma = \emptyset$ então $|\mu|(\mathcal{F}^n; AB) = 1$ para n suficientemente grande e portanto $|\mu|(\mathcal{F}; AB) = 1$.

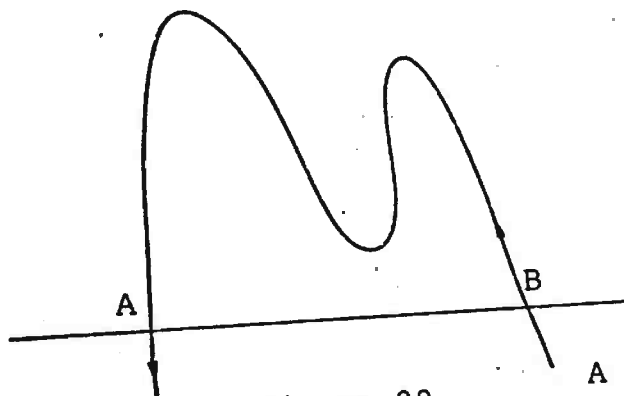


figura 20

(b) Se $AB \cap \gamma \neq \emptyset$ então $|\mu|(F^{(n)}; AB) = 0$ para n suficientemente grande e $|\mu|(F; AB) = 0$.

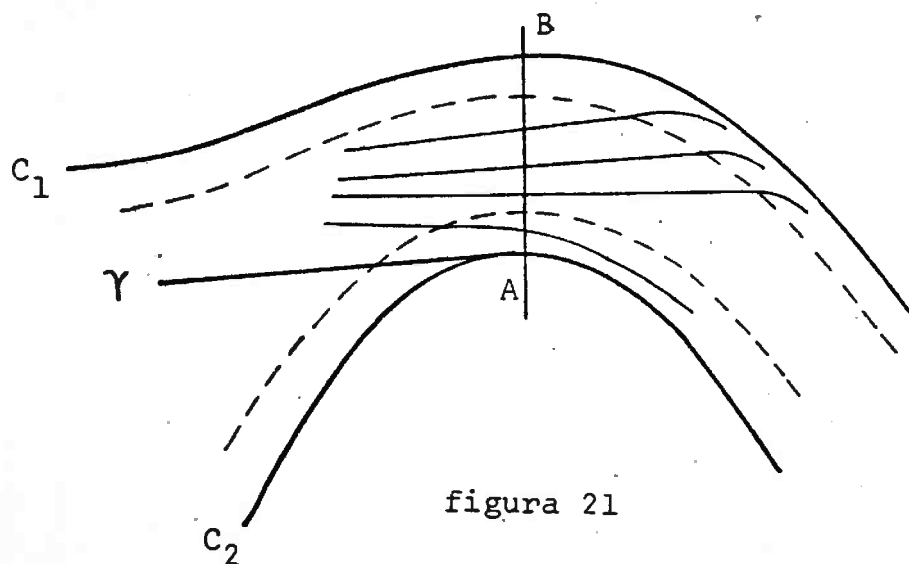
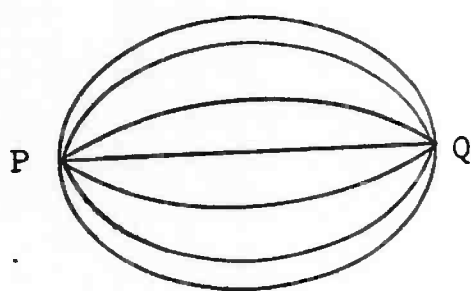


figura 21

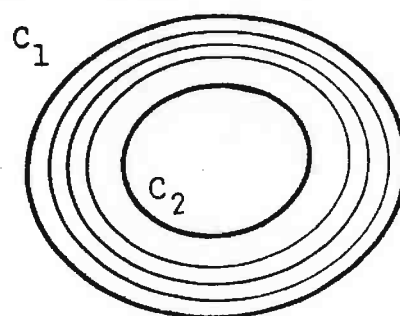
Desta última observação, segue como no Teorema 1, que $k(F) = \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$.

Observações: 1) se C_2 é uma curva convexa, então $\gamma = C_2$, $d = \ell(C_2)$ e $\ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d = \ell(C_1) - \ell(C_2)$.

2) Nos dois casos analisados neste trabalho, se as regiões D e A forem limitadas por curvas convexas então existem folheações da região que minimizam a curvatura total.



$$K(F) = \ell(C) - 2d$$



$$K(F) = \ell(C_1) - \ell(C_2)$$

figura 22

Por outro lado se $C = \partial D$, no caso do disco, ($C = C_1$ ou $C = C_2$ no caso do anel) não é uma curva convexa então não existe folheação de $D(A)$ que minimize a curvatura total, isto é, este mínimo é atingido apenas por quase-folheações.

De fato, suponhamos que F é uma folheação de $D(A)$. Se C possui apenas 2 pontos de inflexão e cada um é um por-do-sol, então a geodésica γ que os une não é um diâmetro como mostra um cálculo de variações, e da demons

tração do Teorema 1 segue que

$$k(F) \geq L(C) - 2L(\gamma) > L(C) - 2d$$

Podemos supor, portanto que C possui um ponto de inflexão regular para F . Seja T a reta tangente a C em P .

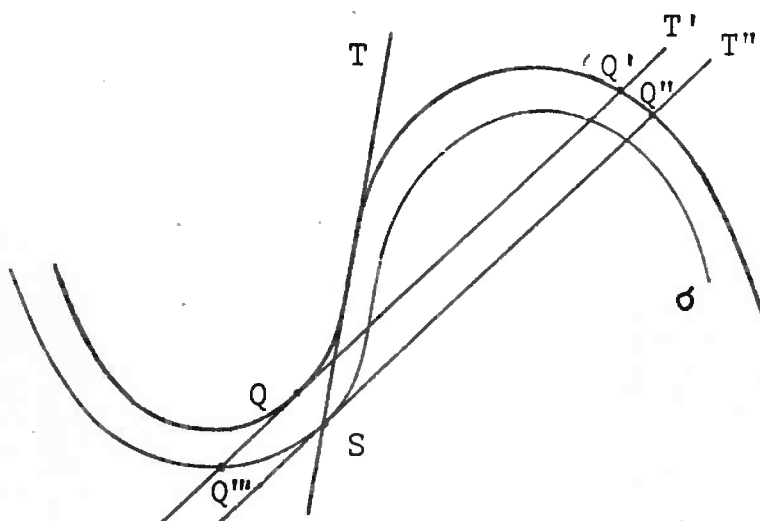


figura 23

Existe Q numa vizinhança de P tal que a reta T' tangente a C em Q encontra C em pelo menos três pontos, Q, Q' e Q''' . Existe uma folha σ de F tal que $\#(\sigma \cap T') \geq 2$, (α numa vizinhança tubular V de C , de raio suficientemente pequeno).

Seja T'' uma reta paralela a T' , tangente a σ em S , com $S \in V$, e seja Q'' a intersecção de T'' e C (Q'' numa vizinhança de Q').

Seja G o conjunto de retas do plano que interceptam os segmentos QQ''' e $Q'Q''$. G é um aberto no conjunto das retas e se $L \in G$ então $|\mu|(F; L) \geq 2$.

BIBLIOGRAFIA:

- [A,A] R. Alexander, S. Alexander, "Geodesic in Riemannian Manifolds with boundary". Indiana University Mathematics Journal, 30(1981) 481-487.

- [BLR] F. Brito, R. Langevin, H. Rosenberg: "Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées; Jour. Diff. Géom. 16 (1981), 19-50.

- [H] J. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. (Hermann Paris 1910).

- [K] A. Kafker, "Geodesic fields with singularities". Ph.D. Univ of Pennsylvania, fev. 1979.

- [L.1] R. Langevin, "Courbure, Feuilletages et surfaces". Tese. Publications Mathematiques D'Orsay. 80-03.

- [L.2] R. Langevin, "Feuilletages tendus". Bull. Soc. Math. France, 107 (1979) p 271-281.

- [L.L.1] R. Langevin, G. Levitt, "Courbure totale des feuilletages des surfaces". Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 175-195.

- [L.L.2] R. Langevin, G. Levitt, "Sur la courbure totale des feuilletages des surfaces a bord". (a aparecer).

- [S]. L.A. Santalo, "Integral Geometry and geometric probability", Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley.

Remi Langevin
Université de Dijon
IME-USP

Claudio Possani
IME-USP
C. Postal 20570 - Ag.Iguatemi
01498 - São Paulo - Brasil

TRABALHOS
DO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TITULOS PUBLICADOS

- 8001 - PLETCH, A. Local freeness of profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8002 - PLETCH, A. Strong completeness in profinite groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- 8003 - CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Transfinite induction on ordinal configurations. São Paulo, IME-USP, 1980. 22p.
- 8004 - JONES RODRIGUES, A.R. Integral representations of cyclic p-groups. São Paulo, IME-USP, 1980. 13p.
- 8005 - CORRADA, M. & ALCANTARA, L.P. de. Notes on many-sorted systems. São Paulo, IME-USP, 1980. /25/p.
- 8006 - POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. FC-elements in a group ring. São Paulo, IME-USP, 1980. /10/p.
- 8007 - CHEN, C.C. On the Ricci condition and minimal surfaces with constantly curved Gauss map. São Paulo, IME-USP, 1980. 10p.
- 8008 - CHEN, C.C. Total curvature and topological structure of complete minimal surfaces. São Paulo, IME-USP, 1980. 21p.
- 8009 - CHEN, C.C. On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in R^4 . São Paulo, IME-USP, 1980. 8p.
- .8110 - JONES RODRIGUES, A.R. Units of ZCp^n . São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- .8111 - KOTAS, J. & COSTA, N.C.A. da. Problems of modal and discussive logics. São Paulo, IME-USP, 1981. 35p.

- .8112 - BRITO, F.B. & GONÇALVES, D.L. Algebras não associativas, sistemas diferenciais polinomiais homogêneos e classes características. São Paulo, IME-USP, 1981. 7p.
- .8113 - POLCINO MILIES, F.C. Group rings whose torsion units form a subgroup II. São Paulo, IME-USP, 1981. 1v. (não paginado)
- .8114 - CHEN, C.C. An elementary proof of Calabi's theorems on holomorphic curves. São Paulo, IME-USP, 1981. 5p.
- .8115 - COSTA, N.C.A. da & ALVES, E.H. Relations between paraconsistent logic and many-valued logic. São Paulo, IME-USP, 1981. 8p.
- .8116 - CASTILIA, M.S.A.C. On Przymusiński's theorem. São Paulo, IME-USP, 1981. 6p.
- .8117 - CHEN, C.C. & GOES, C.C. Degenerate minimal surfaces in \mathbb{R}^4 . São Paulo, IME-USP, 1981. 21p.
- .8118 - CASTILLA, M.S.A.C. Imagens inversas de algumas aplicações fechadas. São Paulo, IME-USP, 1981. 11p.
- .8119 - ARAGONA VALEJO, A.J. & EXEL FILHO, R. An infinite dimensional version of Hartogs' extension theorem. São Paulo, IME-USP, 1981. 9p.
- .8120 - GONÇALVES, J.Z. Groups rings with solvable unit groups. São Paulo, IME-USP, 1981. 15p.
- .8121 - CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de. Paraconsistent algebras. São Paulo, IME-USP, 1981. 16p.
- .8122 - GONÇALVES, D.L. Nilpotent actions. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8123 - COELHO, S.P. Group rings with units of bounded exponent over the center. São Paulo, IME-USP, 1981. 25p.

- .8124 - PARMENTER, M.M. & POLCINO MILIES, F.C. A note on isomorphic group rings. São Paulo, IME-USP, 1981. 4p.
- .8125 - MERKLEN, H.A. Hereditary algebras with maximum spectra are of finite type. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8126 - POLCINO MILIES, F.C. Units of group rings: a short survey. São Paulo, IME-USP, 1981. 32p.
- .8127 - CHEN, C.C. & GACKSTATTER, F. Elliptic and hyperelliptic functions and complete minimal surfaces with handles. São Paulo, IME-USP, 1981. 14p.
- .8128 - POLCINO MILIES, F.C. A glance at the early history of group rings. São Paulo, IME-USP, 1981. 22p.
- .8129 - FERRER SANTOS, W.R. Reductive actions of algebraic groups on affine varieties. São Paulo, IME-USP, 1981. 52p.
- .8130 - COSTA, N.C.A. da. The philosophical import of paraconsistent logic. São Paulo, IME-USP, 1981. 26p.
- .8131 - GONÇALVES, D.L. Generalized classes of groups, spaces c-nilpotent and "the Hurewicz theorem". São Paulo, IME-USP, 1981. 30p.
- .8132 - COSTA, N.C.A. da & MORTENSEN, Chris. Notes on the theory of variable binding term operators. São Paulo, IME-USP, 1981. 18p.
- .8133 - MERKLEN, H.A. Homogeneous λ -hereditary algebras with maximum spectra. São Paulo, IME-USP, 1981. 32p.
- .8134 - PERESI, L.A. A note on semiprime generalized alternative algebras. São Paulo, IME-USP, 1981. 10p.
- .8135 - MIRAGLIA NETO, F. On the preservation of elementary equivalence and embedding by filtered powers and structures of stable continuous functions. São Paulo, IME-USP, 1981. 9p.

- 8248 - CHEN, C.C. The generalized curvature ellipses and minimal surfaces. São Paulo, IME-USP, 1982. 10p.
- 8249 - COSTA, R.C.F. On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles. São Paulo, IME-USP, 1982. 24p.
- 8350 - GONÇALVES, J.Z. Free subgroups in the group of units of group rings over algebraic integers. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.
- 8351 - MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Free k-triples in linear groups. São Paulo, IME-USP, 1983. 7p.
- 8352 - BRITO, F.G.B. A remark on closed minimal hypersurfaces of S^4 with second fundamental form of constant length. São Paulo, IME-USP, 1983. 12p.
- 8353 - KIIHL, J.C.S. U-structures and sphere bundles. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.
- 8354 - COSTA, R.C.F. On genetic algebras with prescribed derivations. São Paulo, IME-USP, 1983. 23p.
- 8355 - SALVITTI, R. Integrabilidade das distribuições dadas por subálgebras de Lie de codimensão finita no $gh(n,C)$. São Paulo, IME-USP, 1983. 4p.
- 8356 - MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Construction of open sets of free k-Tuples of matrices. São Paulo, IME-USP, 1983. 18p.
- 8357 - BRITO, F.G.B. A remark on minimal foliations of codimension two. São Paulo, IME-USP, 1983. 24p.
- 8358 - GONÇALVES, J.Z. Free groups in subnormal subgroups and the residual nilpotence of the group of units of group rings. São Paulo, IME-USP, 1983. 9p.

- 8359 - BELOQUI, J.A. Modulus of stability for vector fields on 3-manifolds. São Paulo, IME-USP, 1983. 40p.
- 8360 - GONÇALVES, J.Z. Some groups not subnormal in the group of units of its integral group ring. São Paulo, IME-USP, 1983. 8p.
- 8361 - GOES, C.C. & SIMÕES, P.A.Q. Imersões mínimas nos espaços hiperbólicos. São Paulo, IME-USP, 1983. 15p.
- 8462 - GIAN BRUNO, A.; MISSO, P. & POLCINO MILIES, F.C. Derivations with invertible values in rings with involution. São Paulo, IME-USP, 1984. 12p.
- 8463 - FERRER SANTOS, W.R. A note on affine quotients. São Paulo, IME-USP, 1984. 6p.
- 8464 - GONÇALVES, J.Z. Free-subgroups and the residual nilpotence of the group of units of modular and p-adic group rings. São Paulo, IME-USP, 1984. 12p.
- 8465 - GONÇALVES, D.L. Fixed points of S^1 -fibrations. São Paulo, IME-USP, 1984. 18p.
- 8466 - RODRIGUES, A.A.M. Contact and equivalence of submanifolds of homogenous spaces. São Paulo, IME-USP, 1984. 15p.
- 8467 - LOURENÇO, M.L. A projective limit representation of (DFC) - spaces with the approximation property. São Paulo, IME-USP, 1984. 20p.
- 8468 - FORNARI, S. Total absolute curvature of surfaces with boundary. São Paulo, IME-USP, 1984. 25p.
- 8469 - BRITO, F.G.B. & WALCZAK, P.G. Totally geodesic foliations with integral normal bundles. São Paulo, IME-USP, 1984. 6p.