



### 389

Nas extremidades de um diâmetro de uma circunferência, escreva o número 1. Divida cada uma das duas semicircunferências determinadas pelo diâmetro ao meio e nos pontos médios escreva a soma, 2, dos dois números das extremidades da semicircunferência. Num terceiro passo, divida cada um dos quatro arcos de circunferência obtidos ao meio e em cada um dos pontos médios escreva a soma dos números que estão nas extremidades do arco correspondente.

Continuando o processo, qual será a soma de todos os números escritos após  $n$  passos?

### 390

Seja  $P(r, F)$  a parábola com reta diretriz  $r$  e foco  $F$ ,  $F \notin r$ . Observe que uma parábola divide o plano em duas regiões, sendo que somente a região que contém o foco é convexa.

(i) Use a Geometria Analítica para provar que três pontos distintos dessa parábola não são alinhados.

(ii) Obtenha a equação da reta  $t$  que passa por um ponto  $P(x_0, y_0)$  dessa parábola e que a deixe toda num mesmo semiplano.

(iii) Obtenha o maior raio possível de uma circunferência contida na região convexa determinada por essa parábola e que seja tangente à reta  $t$ .

## PROBLEMINHAS

respostas na página 59

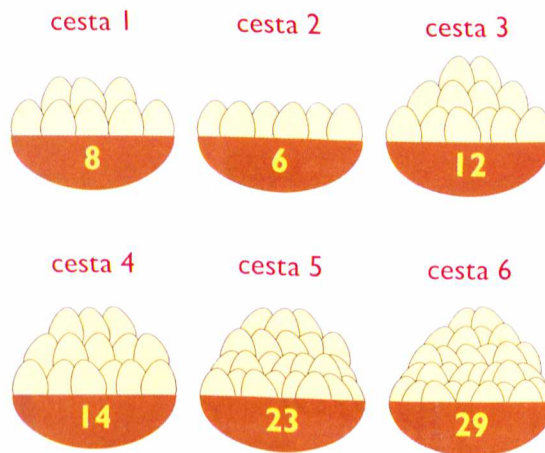
**1.** Uma mulher que ganhava a vida vendendo ovos, tinha 90 ovos para vender. Para isso, mandou suas três filhas à feira: a mais velha com 10 ovos para vender, a do meio com 30 e a mais nova com 50 ovos. As filhas devem seguir as seguintes regras:

A cada momento todos os ovos devem ser vendidos pelo mesmo preço, podendo ser menor no início da feira e, no final, com poucos ovos disponíveis, pode-se aumentá-lo. Cada uma das filhas deve arrecadar, no fim das vendas, a mesma quantia: R\$30,00.

As meninas seguiram instruções da filha mais velha, muito esperta, e conseguiram realizar a venda dos ovos seguindo as regras da mãe. Qual foi a estratégia proposta pela filha mais velha?



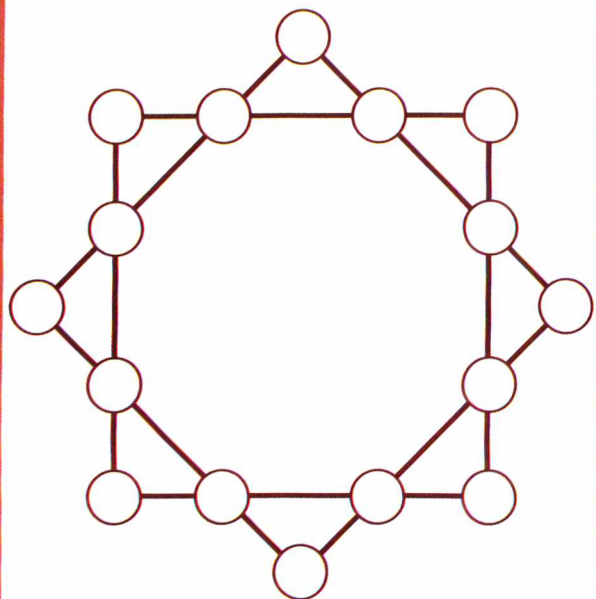
**2.** Um feirante vende ovos de patas e de galinhas. Ele coloca os ovos em seis cestas, cada uma contendo apenas ovos de galinhas ou apenas de patas. As cestas têm as quantidades de ovos indicadas na figura.



Ele olha para uma das cestas e diz: "Se eu vender todos os ovos desta cesta, ficarei com a quantidade de ovos de galinhas igual ao dobro da de ovos de patas."

Quais cestas contêm ovos de galinhas?

3. Escreva um número de 1 a 16, sem repetir nenhum deles, nos círculos da figura de modo que somem um total de 34 em cada lado dos quadrados e também somem 34 nos vértices dos quadrados.



Probleminhas tirados e/ou adaptados do livro *Aprenda Matemática brincando* de I. Perelmann.

### SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NA RPM 86

376

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  três números reais, com  $a$  diferente de  $c$ . Resolva as seguintes equações

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 \text{ e}$$

$$x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

sabendo que elas têm duas raízes reais em comum.

#### SOLUÇÃO

Sejam

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \text{ e}$$

$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

com uma raiz comum  $x_0$ , isto é:  $P(x_0) = 0$  e  $Q(x_0) = 0$ . Assim, essa raiz comum também é uma raiz da equação

$$P(x) - Q(x) = (a - c)x^3 - (a - c)x = 0$$

que tem por raízes 1, -1, 0, pois  $a$  é diferente de  $c$ . Como  $P(0) = 1$ , temos que as duas raízes comuns são 1 e -1.

Assim sendo, do sistema de equações lineares

$$P(1) = a + b + c + 2 = 0$$

$$P(-1) = -a + b - c + 2 = 0,$$

temos  $b = -2$  e  $a = -c$ . Observamos ainda que o sistema

$$Q(1) = 0$$

$$Q(-1) = 0,$$

resulta nas mesmas condições acima. Assim, temos, escrevendo as equações em função de  $a$ :

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + ax - 1) = 0$$

$$Q(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + ax + 1 = (x^2 - 1)(x^2 - ax - 1) = 0$$

Resolvendo essas equações em função de  $a$ ,

$$S_{(P(x)=0)} = \left\{ 1, -1, \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right\}$$

$$S_{(Q(x)=0)} = \left\{ 1, -1, \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right\}$$

377

Sabendo que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais tais que:

$$abc = 1 \text{ e}$$

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

prove que um desses números é igual a 1.

#### SOLUÇÃO

Como  $abc = 1$  e

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc},$$