

ÁLGEBRAS DE KOSZUL BB-INCLINADAS

R. Aquino, E.N.Marcos

I. Conceitos preliminares

I.1. Definição de álgebras de Koszul

Seja Λ uma k -álgebra graduada cuja componente de grau zero é um produto finito de cópias de k , e, é finitamente 1-gerada, ou seja $\Lambda_i \circ \Lambda_j = \Lambda_{i+j}$, $\forall i, j$; e $\dim_k \Lambda_1$ finita.

Seja $J = \sum_{n \geq 1} A_n$ o radical graduado de Λ .

Seja M um Λ -módulo graduado gerado em grau zero, i.é., $\Lambda_j M_0 = M_j$.

Dizemos que M é um Λ -módulo de Koszul se possui resolução linear, isto é, se dada uma Λ -resolução projetiva minimal graduada

$$\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

temos que

(1) $f_i : \bigoplus_r \Lambda_{e_r} \rightarrow \bigoplus_s \Lambda_{e_s}$ satisfaz $f_i(e_r) \in \Lambda_1$ para cada idempotente e_r e cada $i = 1, \dots$

(2) $r_\Lambda \text{Ker } f_i = r_\Lambda^2 P_i \cap \text{Ker } f_i$, $\forall i$.

Observamos que isto é equivalente à dizer que cada projetivo P_i da resolução linear é gerado em grau i .

Definição: Uma álgebra graduada Λ como a que descrevemos acima, é *Koszul*, quando todo Λ -módulo simples é um álgebra de Koszul.

I.2. Definição de álgebras Brenner-Butler inclinadas

Seja Λ uma k -álgebra de dimensão finita. Seja T um Λ -módulo. Temos que T é um Λ -módulo inclinante se satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $pd_\Lambda T \leq 1$

(b) $\text{Ext}_\Lambda^1(T, T) = 0$

(c) o número de somandos indecomponíveis não isomorfos de T é igual ao número de Λ -módulos simples.

T determina uma teoria de torção (J, F) com a seguinte propriedade:

“Os funtores Ext e Hom definidos na categoria $\Lambda\text{-mod}$ para $\Gamma\text{-mod}$ determinam uma teoria de torção (X, Y) sobre $\Gamma\text{-mod}$ da seguinte maneira:

$$\text{Ext}_\Lambda^1(T, -)(F) \cong X$$

$$\text{Hom}_\Lambda(T, -)(J) \cong Y.”$$

A *idéia principal da teoria inclinante* é generalizar aquela contida no teorema de equivalência de Morita, ao usar um par de funtores que produzem uma equivalência entre classes, permitindo comparar as categorias de módulos relacionados por estes funtores.

Considere, agora, Λ uma k -álgebra graduada, de dimensões finita, hereditária; básica, indecomponível com $k = k$.

Ou seja $\Lambda = kQ$ com Q quiver finito.

Neste caso a teoria de torção inclinante cinde a categoria de Γ -módulos e temos o seguinte fato homológico:

$$pd_{\Gamma} M \leq \begin{cases} 1 & \text{se } M \in Y \\ 2 & \text{se } M \in X \end{cases}$$

Ou seja, $gldim \Gamma \leq 2$.

Vamos considerar agora um módulo Brenner-Butler-inclinante, graduado gerado em grau zero.

Logo, $T = \tau^{-} S_i \oplus \bigoplus_{j \neq i} P_j$, onde $\tau^{-} = TrD$ (transposta do dual) e tal que S_i não é injetivo pois neste caso teríamos $\tau^{-} S_i = 0$ e T não seria inclinante.

Teorema 1: $\tau^{-} S$ é Λ -módulo de Koszul.

Se S_i é um Λ -módulo projetivo temos que Γ é uma álgebra hereditária portanto Koszul. Assim, estamos supondo que S_i não é projetivo.

Observamos que $F = Cogen(DTr(T)) = Cogen(S_i)$ e portanto

$$X = Gen(Ext_{\Lambda}^1(T, S_i))$$

Ponha $S^{-}i = Ext^{-\lambda} (T, S - i)$ e denote $Hom - \wedge (M, N)$ por (M, N) .

Se $pd_{\Gamma} \hat{S}_i = 1$ então Γ é hereditária. Analisando o caso em que $pd_{\Gamma} \hat{S}_i = 2$ descobrimos que $\hat{S}_i$ é módulo de Koszul e obtemos o seguinte:

Teorema 2: Toda álgebra Brenner-Butler inclinada de uma álgebra hereditária é Koszul.

Dem.: A resolução projetiva minimal graduada do simples $\hat{S}_i$ é dada por:

$$0 \rightarrow (T, r_{\Lambda} P_i) \xrightarrow{f^*} (T, \bigoplus_{s=1}^t P_{l_s}) \xrightarrow{\pi^*} (T, \tau^{-} S_i) \xrightarrow{p} \hat{S}_i \rightarrow 0$$

onde: $l_1, \dots, l_t$ são vértices antecessores imediatos de i no quiver de Λ , $Q(\Lambda)$; p é cobertura projetiva; π^* é composição com o Λ -morfismo

$$\pi : P = \bigoplus_{j=1}^t P_{l_j} \rightarrow \tau^{-} S_i$$

tal que P é a cobertura projetiva de $\tau^- S_i$; e f^* é a composição com o morfismo $\alpha \circ \beta$ onde α é a multiplicação pelas flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ que ligam os vértices $l_1, \dots, l_t$ com i e β é a multiplicação pelas flechas $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{j_r}$ que ligam o vértice i com os vértices $j_r, \dots, j_1$, sucessores imediatos de i , por consequência vértices simples do topo de $r_\wedge P_i$.

Seja $\mathcal{E} = \sum_{m=1}^r E_{j_m}$ o idempotente tal que $(T, P) = \Gamma \cdot \mathcal{E}$ temos que $f^*(\mathcal{E}) = \sum_{m=1}^r f^*(E_{j_m})$ e portanto tomando $e = e_{j_1} + \dots + e_{j_r} \in \wedge$ tal que $P = \wedge_e$ temos

$$f^*(\mathcal{E})(e) = \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^t \alpha_s \beta_{j_m}$$

Como $\tau^- S_1$ é $\wedge$ -módulo de Koszul temos que $f^*(\mathcal{E})(e) \in r_\wedge P_i$.

Lema 1: Seja P/T indecomponível tal que $r_\wedge P \in \text{add } T$. Então $r_\Gamma(T, P) \cong (T, r_\wedge P)$ como Γ -módulos.

Lema 2: Seja $P = \bigoplus_{s=1}^t P_{l_s}$ como na resolução projetiva de $\hat{S}_i$.

Então, $r_\Gamma(T, P_{l_s}) = (T, r_\wedge P_i) \oplus (T, P_{l_s})$ onde $P_i \oplus P_{l_s} = r_\wedge P_{l_s}$.

Como $f^*(\mathcal{E}) \in (T, r_\wedge P_i)$, que é somando de $r_\Gamma(T, P)$ pelo Lema 1 e, como $f^*(\mathcal{E})(e) \in r_\wedge^2 P \setminus r_\wedge^3 P$ temos que $f^*(\mathcal{E}) \in r_\Gamma(T, P) \setminus r_\Gamma^2(T, P)$ pelo Lema 2.

Ou seja, $f^*(\mathcal{E}) \in \Gamma_1$.

É claro que $r_\Gamma(T, r_\wedge P_i) = r_\Gamma^2(T, P) \cap (T, r_\wedge P_i)$ pelos lemas apresentados.

Segue que $\hat{S}_i$ é um Γ -módulo de Koszul. $\square$

Obtivemos também uma descrição dos módulos simples de Γ e uma descrição completa do quiver de Γ . Vejamos:

Proposição 1: Seja topo $\tau^- S_i \in \{S_{l_1}, \dots, S_{l_t}\}$

Se $M \in \wedge\text{-mod indec.}$ tal que:

- (1) M é simples distinto de $S_i, S_{l_1}, \dots, S_{l_t}$
- (2) $M = M_j = \frac{P_{l_j}}{r_{Q_j}(P_{l_j})}$ onde $Q_j = \prod_{r \neq l_{j,i}} Pr \quad j = 1, \dots, t$.

Então $\text{Hom}_\wedge(T, M)$ é Γ -simples.

Descrição local do quiver de Γ

O vértice $\hat{S}_i$ torna-se uma fonte, os sucessores imediatos de $\hat{i}$ são os vértices do topo de $\tau^- S_i$, relativamente à ordem de Γ ; e os sucessores imediatos de i em $Q(\wedge)$ serão os finais das relações que começam em $\hat{i}$. No restante, o quiver de Γ permanece inalterado. Para obter isto, provamos o seguinte resultado:

Proposição 2: Considere $i, l_1, \dots, l_t$ vértices em $Q(\wedge)$ como no teorema 2. Ordene os vértices de $Q(\Gamma)$, estabelecendo a seguinte correspondência:

$$\hat{P}_j = (T, P_j) \quad j \neq i, 1$$

$$\hat{P}_n = (T, \tau^- S_i)$$

(1) Seja $j \neq i$ vértice em $Q(\wedge)$ tal que P_i não é somando direto de $r_\wedge P_j$ e P_i não é somando direto de $r_\wedge^2 P_j$. Então

$$\dim_k \mathcal{E}_s \frac{r\Gamma}{r^2\Gamma} \mathcal{E}_j = \dim_k \left(P_s, \frac{r_\wedge P_j}{r_\wedge^2 P_j} \right)$$

para cada s , vértice de $Q(\wedge)$.

(2) Fixe $l = l_s$ onde $s \in \{1, \dots, t\}$ como no enunciado. Então

$$\dim_k \mathcal{E}_m \frac{r\Gamma}{r^2\Gamma} \mathcal{E}_l = \dim_k \left(P_m, \frac{r_\wedge P_l}{r_\wedge^2 P_l} \right) + \dim_k \left(P_m, \frac{P_{l'}}{r_\wedge P_{l'}} \right)$$

onde $r_\wedge P_l = P_l \oplus P_{l'}$

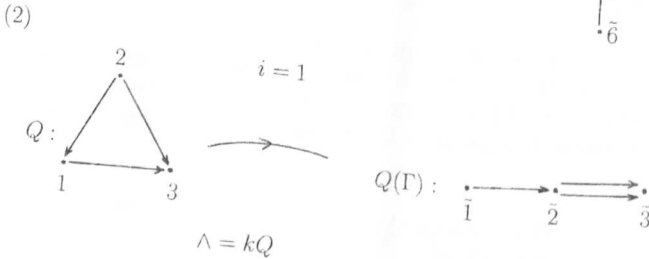
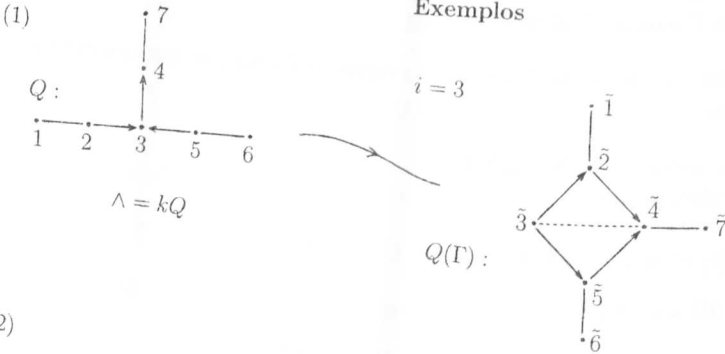
(3) Seja k um vértice antecessor imediato de algum, ou alguns dos l'_s . Então:

(i) Se $m \neq l_s$ temos $\dim_k \mathcal{E}_m \frac{r\Gamma}{r^2\Gamma} \mathcal{E}_k = \dim_k((T, r_\wedge P_k), (T, S_m)) =$
 $= \dim_k \left(P_m, \frac{r_\wedge P_k}{r_\wedge^2 P_k} \right)$

(ii) Se $m = l_s$ temos que $\dim_k \mathcal{E}_{l_s} \frac{r\Gamma}{r^2\Gamma} \mathcal{E}_k = \dim_k((r_\wedge P_k, M_{l_s}) =$
 $= \dim_k \left(P_{l_s}, \frac{r_\wedge P_k}{r_\wedge^2 P_k} \right)$

A demonstração desta proposição se baseia nos lemas 1 e 2 e alguns fatos básicos da teoria.

Exemplos



Referências:

- [1] Green, E.L.; Martinez-Villa, R. "Koszul and Yoneda Algebras" Canadian Math. Soc., 18, 1994, 247-298.
- [2] Brenner, S.; Butler, M.; "Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors" Proc. ICRA II, Lecture Notes in Math, 832 Springer, Berlin (1980) 103-169.
- [3] Green, E.L.; Martinez-Villa, R. "Koszul and Yoneda Algebras II
- [4] Green, E.L.; Martinez, R.; Reiten, I.; Solberg, O.; Zacharia, D. "On modules with linear presentations". no prelo.
- [5] Happel, D.; Ringel, C.M. "Tilted Algebras" Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), no. 2, 399-443.
- [6] Auslander, M.; Reiten, I.; Smalø, S.O. "Representation Theory of Artin Algebra" Cambridge University Press (1995).

R. Aquino, IME/USP
e-mail: aquino@ime.usp.br

E.N. Marcos, IME/USP
e-mail: enmarcos@ime.usp.br