

AXIOMA DE MARTIN

LUCIA R. JUNQUEIRA

ORIENTADOR: OFÉLIA ALAS

CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Definição: Dizemos que dois conjuntos A e B são equipotentes quando existe uma função $f: A \rightarrow B$ bijetora.

Teorema de Bernstein - Cantor: Dados os conjuntos A e B não vazios tais que existem $f: A \rightarrow B$ e $g: A \rightarrow B$ injetoras; então $A \approx B$.

Teorema: Seja A um conjunto; então A não é equipotente a $\mathcal{P}(A)$ (conjunto das partes de A).

Dem:

Suponhamos por absurdo que existe $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ sobrejetora.

Seja $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(A)$

Existe $b \in A$ tal que $f(b) = B$ (pois f sobrejetora).

Se $b \in B$, então $b \notin f(b) = B$: absurdo.

Se $b \notin B$, então $b \in f(b) = B$: absurdo.

Então temos uma contradição.

c.q.d.

Teorema de Baire: Seja X , compacto, T_2 (de Hausdorff); se $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde F_n são conjuntos fechados, então existe n_0 tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{n_0} \neq \emptyset$.

Dizemos que um espaço topológico X satisfaz a condição c.c.c. se toda coleção de abertos dois a dois disjuntos é enumerável.

Axioma de Martin: Seja X compacto, T_2 c.c.c. Então X não é união de menos do que $c = |\mathbb{R}|$ conjuntos fechados com interior vazio.

Obs.: $c = |\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \omega$.

Hipótese do Contínuo (HC): Seja $I \subset \mathbb{R}$. Então I é finito ou I é enumerável ou $I \approx \mathbb{R}$.

Se supormos que vale H.C., o Axioma de Martin fica igual ao Teorema de Baire.

O Axioma de Martin será útil para provarmos resultados que são independentes de H.C., mas que sabemos que valem quando temos H.C. Ele é usado junto com a negação da H.C.

O Axioma de Martin implica que a união de menos do que c conjuntos de medida de Lebesgue nula terá medida nula.

Exemplo:

Este exemplo mostra um espaço topológico, compacto, T_2 , mas não c.c.c., que é a união de ω_1 conjuntos fechados com interior vazio.

Seja w_1 o primeiro ordinal não enumerável ($|w_1| = \omega_1$).

Seja $X = w_{1+1} = \{0, 1, 2, \dots, w_1\}$.

Usaremos em X uma topologia onde todo ponto diferente de w_1 é aberto e $V \subset X$ é uma vizinhança de $w_1 \iff w_1 \in V$ e $X \setminus V$ é finito.

X não será c.c.c. (basta pegar a coleção de abertos formada por todos os conjuntos unitários de pontos $\neq w_1$), é compacto e T_2 .

Tomemos $X^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto.

Provaremos que $X^{\mathbb{N}}$ é a união de $\aleph_1$ fechados com interior vazio.

Para $\alpha < w_1$ seja:

$$F_\alpha = \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid (\forall n) (f(n) \neq w_1 \Rightarrow f(n) \leq \alpha)\}$$

Então $X^{\mathbb{N}} = \bigcup_{\alpha < w_1} F_\alpha$ e F_α é fechado com interior vazio. De fato:

suponhamos que F_α não seja fechado. Então existe $g \in \overline{F_\alpha} \setminus F_\alpha$.

$\therefore \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m) \neq w_1$ e $g(m) > \alpha$.

Seja $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ vizinhança de g tal que

$$V_n = X \text{ se } n \neq m \text{ e } V_m = \{g(m)\}$$

Então $V \cap F_\alpha = \emptyset$ (contradição).

Suponhamos agora que $\overset{o}{F}_\alpha \neq \emptyset$.

Seja $g \in \overset{o}{F}_\alpha$, $\therefore g \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \subset F_\alpha$ e $\{n \mid W_n \neq X\}$ é finito.

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{aberto elementar}}$

Tomemos $m \notin \{n \mid W_n \neq X\}$

Seja $h: \mathbb{N} \rightarrow w_1 + 1$

$$h(m) = \alpha + 1$$

$$h(n) = g(n).$$

Então $h \in \overset{o}{F}_\alpha$; mas

$$h \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n \text{ (o que é contradição).}$$

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

K. Kunen - "Set Theory". North Holland Publ. Co., Netherlands, 1980.