EQUIVALÊNCIA ENTRE UMA EQUAÇÃO A DIFERENÇAS E SUA LINEARIZADA EM VOLTA DE UM PONTO FIXO

Luiz Fichmann
IME-USP

É sempre importante comparar as soluções de um sistema não linear com as do seu linearizado. Neste trabalho nós vamos apresentar um teorema do tipo Hartmam-Grobmam para fluxos de equações a diferenças generalizadas autônomas. Elas são do tipo (D) $x(t) = f(x_t)$, para $t \in \mathbb{R}$, no contexto das funções regradas em espaços de Banach.

Vamos tornar tudo isso mais preciso no decorrer do texto.

I. A EQUAÇÃO (D) E SEUS DADOS

Seja X um espaço de Banach e r um número real positivo.

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo qualquer, indicamos por $G(I,X)$ o espaço vetorial das funções $\psi : I \to X$ para os quais existem os limites laterais $\psi(t^+)$ e $\psi(t^-)$ para todo $t \in \mathring{I}$ (interior de I) e nas extremidades que pertencem a I existe o limite lateral respectivo. Tais funções se chamam *regradas*.

Quando $I = [-r,0]$ escrevemos $G([-r,0],X) = G$. Notemos que G é um espaço de Banach com a norma do supremo (para $\phi \in G$, $\|\phi\| = \sup_{\theta\in[-r,0]} \|\phi(\theta)\|$).

Em $G(I,X)$ definimos a seguinte relação de equivalência $\phi \sim \psi \Leftrightarrow \phi(t^+) = \psi(t^+)\ \forall t \in \mathring{I}$. Para um estudo detalhado das funções regradas, ver [H1] (Em [H1], dentre outras coisas, mostra-se que $\phi \sim \psi \Leftrightarrow \phi(t^-) = \psi(t^-)\ \forall t \in \mathring{I}$).

Dado $x \in G(I,X)$ e $t \in I$ tal que $[t-r,t] \subset I$, definimos a função $x_t \in G$ por $x_t(\theta) = x(t+\theta)\ \forall \theta \in [-r,0]$.

Para estudar a equação (D), nesse contexto, temos de maneira geral de lidar com uma dada função $f : G \to X$ que torne regrada a expressão $f(x_t)$, ou seja, que satisfaça:

$\boxed{0}$ Para cada $x \in G(\mathbb{R},X)$ fixo; a função $t \in \mathbb{R} \to f(x_t) \in X$ é regrada.

Dizemos que $x \in G([-r,\infty[,X)$ é solução de (D) com dado inicial $\phi \in G$ se $x(t) = f(x_t)$ para $t > 0$ e $x_0 = \phi$.

Dizemos que (D) admite *solução para trás* para o dado inicial $\phi \in G$ se existe $x \in G(\mathbb{R},X)$ tal que $x(t) = f(x_t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ e $x_0 = \phi$ (observe que nesse caso devemos ter $\phi(0) = f(\phi)$).

Para certas condições sobre f, condições que colocaremos a seguir, temos garantida a existência e unicidade de solução regrada para (D) com dado inicial $\phi \in G$.

Uma condição imediata que aparece, para que possamos lidar com teoremas de representação de operadores lineares por integrais, é que f precisa ser invariante para funções equivalentes de G, ou seja, $\phi \sim \psi \Rightarrow f(\phi) = f(\psi)$.

Uma boa representante de cada classe equivalente é a função contínua à direita.

Definimos $G^+(\mathbb{R},X) = \{h \in G(\mathbb{R},X) \mid h(t^+) = h(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}$

e para $[a,b] \subset \mathbb{R}$ definimos

$G^+([a,b],X) = \{h \in G([a,b],X) \mid h(t^+) = h(t)\ \forall t \in [a,b] \text{ e } h(b) = 0\}$.

Para f fixada, definimos $G^+ = \{\phi \in G \mid \phi(\theta^+) = \phi(\theta)\ \forall \theta \in [-r,0[\text{ e } \phi(0) = f(\phi)\}$.

As condições exigidas para f, para existência e unicidade de solução regrada são as seguintes:

$\boxed{1}$ Existe a derivada $f' : G \to L(G,X)$, no sentido de Frechet, e f' é contínua.

Como consequência de f ser invariante em funções equivalentes de G, temos que na verdade $f': G^+ \to L(G^+,X)$ e é estendido de maneira constante em funções equivalentes para $f': G \to L(G,X)$.

Em [H1] demonstra-se um teorema de representação que nos permite dizer que:

PROPOSIÇÃO 0. $L(G^+,X)$ é isométrico ao conjunto de núcleos $SV_0([-r,0],L(X)) = \{\mu : [-r,0] \to L(X) \mid SV[\mu] < \infty \text{ e } \mu(0) = 0\}$ de semi-variação limitada, que é um espaço de Banach quando munido com a norma da semi-variação. A semi-variação de μ é definida por $SV[\mu] = SV_{[-r,0]}[\mu] = \sup\limits_{d \in P_{[-r,0]}} SV^d[\mu]$ onde para cada $d \in P_{[-r,0]}$ (conjunto das partições do intervalo $[-r,0]$)

$d = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ com $-r = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 \ldots < \theta_n = 0$

definimos

$$SV^d[\mu] = \sup_{\substack{P_i \in X \\ \|P_i\| \leq 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} [\mu(\theta_i) - \mu(\theta_{i-1})].P_i \right\|.$$

O teorema nos diz que, para cada $L \in L(G^+,X)$, existe um único $\mu \in SV_0([-r,0],L(X))$ com $SV[\mu] = \|L\|$ e $L\phi = \int_{-r}^{0} d\mu(\theta)\phi(\theta)$ $\forall \phi \in G^+$ onde essa integral é a integral interior, também estudada amplamente em [H1].

No nosso caso, para cada $\phi \in G$ temos que $\exists! \mu_\phi \in SV_0([-r,0],L(X))$ tal que $\forall \Delta\phi \in G$ temos $f'(\phi).\Delta\phi = \int_{-r}^{0} d\mu_\phi(\theta)\Delta\phi(\theta)$.

Temos ainda mais duas condições para f:

$\boxed{2}$ $\sup\limits_{\phi \in G} \|f'(\phi)\| < \infty$

Repare que pela Proposição 0 temos $\|f'(\phi)\| = SV_{[-r,0]}[\mu_\phi]$

$\boxed{3}$ A função $g : [0,r] \to \mathbb{R}$

$$\varepsilon \to g(\varepsilon) = \sup_{\phi \in G} SV_{[-\varepsilon,0]}[\mu_\phi]$$

que está bem definida por $\boxed{2}$, deve ser contínua em $\varepsilon = 0$, ou seja, $\lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon) = 0$.

Seja $\chi = \{f : G \to X$, invariantes para funções equivalentes de G que satisfaçam $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}\}$. Vamos precisar das seguintes proposições, cujas demonstrações encontram-se na tese de doutorado do autor:

PROPOSIÇÃO 1. Para $f \in \chi$ e $\phi \in G$ existe uma única solução regrada de (D) com dado inicial ϕ que será denotada por $x = x(\phi, f) \in G([-r, \infty[, X)$.

PROPOSIÇÃO 2. Se $f \in \chi$ satisfaz ainda

$\boxed{0}_+$ Para cada $x \in G^+(\mathbb{R}, X)$ fixo; a função $t \in \mathbb{R} \to f(x_t) \in X$ é regrada e contínua à direita

então para $\phi \in G^+$ temos $x(\phi, f) \in G^+([-r, \infty[, X)$.

PROPOSIÇÃO 3. Se $\phi \in C = C([-r, 0], X) \subset G$ e ϕ é tal que $\phi(0) = f(\phi)$ então $x(\phi, f) \in C([-r, \infty[, X)$.

PROPOSIÇÃO 4. χ é um espaço de Banach com a norma $\| \ \|_1$ definida por $\|f\|_1 = \max\{\sup_{\phi \in G} \|f'(\phi)\|, \|f(0)\|\}$ e $\chi_+ = \{f \in \chi | f \text{ satisfaz } \boxed{0}_+\}$ é um subespaço fechado de χ.

PROPOSIÇÃO 5. Para cada $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a função

$$x : G \times \chi \to G([-r, b], X)$$
$$(\phi, f) \to x(\phi, f)|_{[-r,b]} \quad \text{é contínua.}$$

Até aqui só precisamos de f de classe C^1. Se f tem maior diferenciabilidade e suas derivadas também satisfazem as condições $\boxed{0}$, $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ então a solução de (D) também tem maior diferenciabilidade com relação ao dado inicial. Mais precisamente:

PROPOSIÇÃO 6. Seja, para $k \in \mathbb{N}$, $\chi^k = \{f \in \chi \mid f$ é de classe C^k e satisfaz $\boxed{0}_k$, $\boxed{1}_k$ e $\boxed{2}_k\}$, onde para f de classe C^k definimos as propriedades:

$\boxed{0}_k$ Para cada $i = 0,1,2,\ldots,k$, fixados $x,\Delta x_1,\ldots,\Delta x_i \in G(\mathbb{R},X)$, a função $t \in \mathbb{R} \to f^{(i)}(x_t).(\Delta x_{1_t},\Delta x_{2_t},\ldots,\Delta x_{i_t}) \in X$ é regrada.

Repare que para $i = 0$ estamos na condição $\boxed{0}$.

Aqui $f^{(i)}: G \to M^i(G^i,X) = \{\xi : G^i \to X$ aplicações k-lineares contínuas$\}$. Colocamos $M^0(G^0,X) = X$, $M^1(G^1,X) = L(G,X)$ e temos $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ etc..

$\boxed{1}_k$ $f^{(k)}: G \to M^k(G^k,X)$ satisfaz $\boxed{1}$, ou seja, f é de classe C^{k+1}.

$\boxed{2}_k$ Para cada $i = 1,2,\ldots,k+1$, temos $\sup\limits_{\phi \in G}\| f^{(i)}(\phi)\| < \infty$

(Repare que $\boxed{0}_0 = \boxed{0}$, $\boxed{1}_0 = \boxed{1}$ e $\boxed{2}_0 = \boxed{2}$ e que $\chi^{k+1} \subset \chi^k \subset \ldots$
$\ldots \subset \chi^0 = \chi$)

Seja $\chi^\infty = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \chi^k$.

Se $f \in \chi^k$ (para $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) então para cada $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, a solução de (D)

$$\begin{aligned} x(\cdot,f) = x_f \; &: G \to G([-r,b],X) \\ &\phi \to x_f(\phi) = x(\phi,f)\big|_{[-r,b]} \end{aligned} \quad \text{é de classe } C^k.$$

PROPOSIÇÃO 7. Quando $k \geq 1$, se $f \in \chi^k$, então para cada $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, temos que a derivada $\dfrac{dx_f}{d\phi}(\phi) \in L(G,G([-r,b],X))$ é tal que para $\Delta\phi \in G$ a função $y = \dfrac{dx_f}{d\phi}(\phi).\Delta\phi \in G([-r,b],X)$ é a única solução regrada da equação variacional de (D) em torno da solução $x(\phi,f)$:

$$(D)' \qquad y(t) = f'(x_t).y_t \quad \text{para } 0 < t \leq b \text{ com } y_0 = \Delta\phi$$

sendo $x_t = x_t(\phi,f)$.

Para a existência e unicidade de solução para trás, usamos f no contexto das funções regradas contínuas à direita, ou seja, $f \in X_+$ e exigimos uma condição semelhante a $\boxed{3}$ para f, só que na ponta esquerda do domínio dos núcleos μ_ϕ que representam $f'(\phi)$.

É a condição:

$\boxed{\bar{3}}$ Para $\phi \in G^+$, μ_ϕ tem um salto em $\theta = -r$. $A(\phi) = \mu_\phi(-r) - \mu_\phi(-r^+) \in L(X)$ que é inversível e é tal que existe um operador inversível $L \in L(X)$ que leva pela composição todos os saltos $A(\phi)$ numa bola de raio menor que 1 e centro em I_X (identidade de X), ou seja, $\|LoA(\phi) - I_X\| \leq c < 1 \quad \forall \phi \in G^+$.

Quando tiramos esse salto fora do núcleo, a função $\bar{g} : [0,r] \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{g}(\varepsilon) = \sup\limits_{\phi \in g^+} SV_{[-r,-r+\varepsilon]}[\bar{\mu}_\phi]$ é contínua em $\varepsilon = 0$, ou seja, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \bar{g}(\varepsilon) = 0$.

Aqui $\bar{\mu}_\phi(\theta) = \mu_\phi(\theta)$ para $\theta \in]-r,0]$ e $\bar{\mu}_\phi(-r) = \mu_\phi(-r^+)$.

Seja $\bar{X}_+ = \{f \in X_+ \mid f \text{ satisfaz } \boxed{\bar{3}}\}$.

PROPOSIÇÃO 8. Dados $f \in \bar{X}_+$ e $\phi \in G^+$ existe um único $x = x(\phi,f) \in G^+(\mathbb{R},X)$ solução de (D) com dado inicial ϕ para frente e para trás. $(x(t) = f(x_t) \ \forall t \in \mathbb{R})$ Repare que dizer que $x(t) = f(x_t) \ \forall t \in \mathbb{R}$ equivale a dizer que $x_t \in G^+ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

II. EXEMPLOS

A - EXEMPLOS LINEARES

De maneira geral, se $f \in L(G,X)$ e é invariante para funções equivalentes de G, então $\exists \mu \in SV_0([-r,0],L(X))$ tal que $f(\phi) = \int_{-r}^{0} d\mu(\theta)\phi(\theta)$ $\forall \phi \in G$ e a equação (D) fica $x(t) = \int_{-r}^{0} d\mu(\theta)x(t+\theta)$.

Vemos que $\mu_\phi = \mu$ $\forall \phi \in G$.

É fácil ver que nesse caso $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ e $\boxed{1}_k$ e $\boxed{2}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ são verificadas.

Pelo teorema 2.2 de [H2] concluímos que

$\boxed{0}$ é verificado $\Longleftrightarrow \mu \in G^\sigma([-r,0],L(X))$ ou seja, para cada $p \in X$ temos $\mu(\cdot).p \in G([-r,0],X)$.

Quando $\boxed{0}$ é verificado então vale $\boxed{0}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Observemos que quando $f \in L(G,X) \cap \chi$ temos a existência e unicidade de solução para cada dado inicial e para cada $b > 0$ a aplicação $\phi \in G \to x(\phi)|_{[-r,b]} \in G([-r,b],X)$ além de contínua é linear (e portanto C^∞).

Ex.1) (D) : $x(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-r_i^+)$ com $0<r_1<r_2<\ldots<r_m \leq r$ e $A_i \in L(X)$

Essa equação justifica o nome: equação a diferenças

Colocamos $f(\phi) = \sum_{i=1}^{m} A_i \phi(-r_i^+)$ e vemos que f é invariante para funções equivalentes de G. Se estivermos em G^+ podemos escrever $f(\phi) = \sum_{i=1}^{m} A_i \phi(-r_i)$. f verifica $\boxed{0}$ e $\boxed{0}_+$ por verificação direta.

Como o núcleo μ é uma função escada com saltos A_i em $\theta=-r_i$ e vale 0 em $]-r,0]$, temos que f verifica $\boxed{3}$.

Então temos a solução única de (D) em $G^+([-r,\infty[,X)$ para cada dado inicial em G^+

Para termos solução para trás, precisamos ter $r_m = r$, pois assim $A(\phi) = A_m$ $\forall\phi \in G^+$ e devemos ter A_m inversível. Nesse caso $\boxed{\bar{3}}$ está satisfeito (tome $L = A_m^{-1}$) e temos uma única solução de (D) em $G^+(\mathbb{R},X)$.

Ex.2) (D): $x(t) = \int_{-r}^{0} \theta x(t+\theta)d\theta$.

Vemos que $\mu(\theta) = \frac{\theta^2}{2} I_x$ é contínuo. Assim f verifica $\boxed{0}$ e $\boxed{3}$ e temos uma única solução $x(\phi,f) \in G([-r,\infty[,X)$.

Não temos solução para trás pois μ não tem salto em $\theta = -r$ ($A(\phi) = 0$).

B - EXEMPLOS GERAIS

Ex.3) (D): $x(t) = \mathrm{sen}(\sum_{i=1}^{m} A_i x(t-r_i^+))$.

Aqui $X = \mathbb{R}$ e $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m = r$ e $A_i \neq 0$.

Vemos que f verifica $\boxed{1}$ e $f'(\phi)\Delta\phi = \cos(\sum_{i=1}^{m} A_i\phi(-r_i^+)) \sum_{i=1}^{m} A_i\Delta\phi(-r_i^+)$ e μ_ϕ é uma função escada com salto $A_i\cos(\sum_{i=1}^{m} A_i\phi(-r_i^+))$ em $\theta = -r_i$.

Por verificação direta vemos que vale $\boxed{0}$, $\boxed{0}_+$, $\boxed{1}_k$, $\boxed{2}_k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$).

$\boxed{3}$ se verifica pois $\mu_\phi(\theta) = 0$ para $-r_1 < \theta \leq 0$.

Logo (D) tem solução única $x(\phi,f) \in G^+([-r,\infty[,X)$ para $\phi \in G^+$ que é C^∞ em relação ao dado inicial.

O salto em $\theta = -r$ é $A(\phi) = A_m\cos(\sum_{i=1}^{m} A_i\phi(-r_i^+))$ e não podemos encontrar um $L \in \mathbb{R}$; $L \neq 0$ tal que $0 < L.A(\phi) < 2$ pois o cosseno pode mudar de sinal e então nada podemos afirmar sobre a existência de solução para trás.

Agora, se tomamos o exemplo:

Ex.4) (D): $x(t) = \mathrm{sen}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i x(t-r_i^+)\right) + \lambda \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-r_i^+)$

tudo como no exemplo anterior.

∴ Então valem todas as propriedades do exemplo anterior e vale $\boxed{\bar{3}}$ se tomamos $\lambda > 1$, pois $A(\phi) = A_m[\cos(\sum_{i=1}^{m} A_i\phi(-r_i^+)) + \lambda]$.

Se tomamos $L = \frac{1}{\lambda A_m}$ temos que $|LA(\phi) - 1| = |\frac{1}{\lambda}\cos(\sum_{i=1}^{m} A_i\phi(-r_i^+))| \leq \frac{1}{\lambda} < 1$.

Assim, dado $\phi \in G^+$, existe um único $x = x(\phi,f) \in G^+(\mathbb{R})$ solução de (D) com dado inicial ϕ.

III. UM TEOREMA DO TIPO HARTMAM-GROBMAM PARA A EQUAÇÃO (D)

Seja $f \in \bar{X}_+$ e tal que $f(0) = 0$.

DEFINIÇÃO 1. Para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos definir o operador de evolução $T(t) : G^+ \to G^+$ por $T(t)\phi = x_t(\phi,f)$ (ele está bem definido pela proposição 8).

$\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o fluxo da equação (D) $x(t) = f(x_t)$ e para cada $\phi \in G^+$, $\{T(t)\phi \in G^+ \mid t \in \mathbb{R}\}$ é a órbita de ϕ em G^+.

Como $f(0) = 0$, temos que $T(t)0 = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, 0 é um *equilíbrio* de (D) ou um *ponto fixo* de $\{T(t)\}$. Cada $T(t)$ é contínuo em G^+ pela proposição 5.

Da unicidade da solução verificamos que $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ forma um grupo de operadores, ou seja,

$$\begin{cases} T(0) = I_{G^+} \quad (\text{identidade de } G^+) \\ T(t) \circ T(s) = T(t+s) \quad \forall t,s \in \mathbb{R} \\ T(t)^{-1} = T(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Repare que $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ não é um C^0-grupo, isto é, não é necessariamente verdade que $\lim_{t\to s} T(t)\phi = T(s)\phi$ para toda $\phi \in G^+$.

Considerando a equação variacional linear de (D) em torno da solução nula com dado inicial $y_0 = \Delta\phi \in G^+$

$(D)'$: $y(t) = f'(0)y_t$

Vemos que $f \in \tilde{X}_+ \Rightarrow f'(0) \in \tilde{X}_+$. Assim $\exists! y = y(\Delta\phi, f'(0)) \in G^+(\mathbb{R}, X)$ solução de $(D)'$ com dado inicial $\Delta\phi$ (aqui repare que para $t=0$ teremos $y(0) = f'(0).\Delta\phi$ e não $y(0) = \Delta\phi(0) = f(\Delta\phi)$).

DEFINIÇÃO 2. Para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos definir o operador de evolução linear $T(t) : G^+ \to G^+$ por $T(t)\Delta\phi = y_t^*(\Delta\phi, f'(0)) \in G^+$ onde

$y_t^*(\Delta\phi, f'(0))(\theta) = y(\Delta\phi, f'(0))(t+\theta)$ para $\theta \in [-r, 0[$ e

$y_t^*(\Delta\phi, f'(0))(0) = f(y_t(\Delta\phi, f'(0))$.

$\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o fluxo da equação $(D)'$.

Pela proposição 5 e pela linearidade chegamos a $T(t) \in L(G^+)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Da unicidade da solução verificamos que $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ forma um grupo de operadores, ou seja

$$\begin{cases} T(0) = I_{G^+} \\ T(t) \circ T(s) = T(t+s) \quad \forall t,s \in \mathbb{R} \\ T(t)^{-1} = T(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pela proposição 7 vemos que $T(t)\Delta\phi = y_t(\Delta\phi) = \dfrac{dx_t(\phi)}{d\phi}\Big|_{\phi=0} \cdot \Delta\phi =$

$= \dfrac{dT(t)\phi}{d\phi}\Big|_{\phi=0} \cdot \Delta\phi.$

DEFINIÇÃO 3. Dizemos que um automorfismo $L \in L(E)$ (onde E é um espaço de Banach) é *hiperbólico* se o espectro do seu complexificado não intercepta a circunferência $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. É sabido que (ver [P] artigos I e II) isso é equivalente a dizer que existem subespaços fechados de E, invariantes por L, E_s e E_u tais que $E = E_s \oplus E_u$ e $L_s = L|_{E_s}$ só tem valores espectrais com módulos menores que 1 enquanto que $L_u = L|_{E_u}$ só tem valores espectrais com módulos maiores que 1, ou seja L_u^{-1} só tem valores espectrais com módulos menores que 1.

De modo que em E_s, L é uma contração e em E_u, L é uma expansão.

TEOREMA. Se para um certo $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $T(t)$ é hiperbólico, então existe um homeomorfismo $h : G^+ \to G^+$ com $h - I_{G^+}$ limitado, e existe uma vizinhança W de $\phi = 0$ em G^+ tal que

$h \circ \mathcal{T}(t) = T(t) \circ h$ em W.

Por causa desta relação dizemos que $\mathcal{T}(t)$ e $T(t)$ são *topologicamente equivalentes* em W ou ainda que *conjugam* em W.

Para a prova desse teorema, usamos os dois lemas seguintes que são encontrados em [N] por exemplo.

LEMA 1. Para $L \in \mathcal{L}(E)$, E espaço de Banach, L automorfismo hiperbólico, temos que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall \xi : E \to E$ contínua, limitada e lipchitziana com $Lip\xi < \delta$($Lip\xi$ é a constante de Lipchitz de ξ) temos que

Existe um único $h_\xi : E \to E$ homeomorfismo com $h_\xi - I_E$ limitado tal que $h_\xi \circ (L+\xi) = L \circ h_\xi$.

LEMA 2. Se $\xi : E \to E$ é de classe C^1 e tal que $\xi(0) = 0$ e $\xi'(0)=0$ então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists W$ vizinhança de 0 em E e $\bar{\xi} : E \to E$ tal que $\bar{\xi}$ é contínua, limitada e lipchitziana com $Lip\bar{\xi} < \varepsilon$ e $\bar{\xi}|_W = \xi$.

PROVA DO TEOREMA. Definamos $\xi : G^+ \to G^+ | \xi = \mathcal{T}(t) - T(t)$. Assim ξ é de classe C^1 e $\xi(0) = 0$ e $\xi'(0) = \frac{d\mathcal{T}(t)}{d\phi}\Big|_{\phi=0} - \frac{dT(t)}{d\phi}\Big|_{\phi=0} = T(t) - T(t) = 0$.

Como $T(t)$ é um automorfismo hiperbólico, pelo lema 1, $\exists \delta > 0 |$ $\forall \bar{\xi} : G^+ \to G^+$ contínua, limitada e lipchitziana com $Lip\bar{\xi} < \delta$ temos que $\exists! h_\xi : G^+ \to G^+$, homeomorfismo com $h_\xi - I_{G^+}$ limitado tal que

$h_\xi \circ (T(t)+\xi) = T(t) \circ h_\xi$

Pelo lema 2, para $\varepsilon = \delta$, $\exists W$ vizinhança de 0 em G^+ e $\xi : G^+ \to G^+$ limitada, contínua e lipchitziana com $\mathrm{Lip}\,\xi < \delta$ tal que $\xi|_W = \xi$. Tomando $h = h_\xi$ temos que para $\phi \in W$

$h \circ (T(t)+\xi)\ \phi = T(t) h\phi$, ou seja,

$h \circ T(t)\ \phi = T(t) \circ h\phi$.

Através desse homeomorfismo h do teorema, podemos caracterizar as variedades estável e instável do ponto fixo 0 do fluxo $\{T(t)\}_{t \in R}$.

REFERÊNCIAS

[H1] HÖNIG, C.S. "Volterra-Stieltjes Integral Equations; Functional-Analytic Methods, Linear Constraints". Amsterdam, North-Holland, 1975. (North-Holland Mathematics Studies, 16)

[H2] HÖNIG, C.S. "Volterra-Stieltjes Integral Equations". Proceedings of the São Carlos Conference, 1979, Springer Lectures Notes in Mathematics, 799, p.173-216.

[P] PALIS JR., J. "Seminário de Sistemas Dinâmicos" IMPA, 1971.

[N] NITECKI, Z. "Differentiable Dynamics - An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms". The M.I.T.Press - Cambridge, Massachusetts and London, 1971.

[Hale] HALE, J. "Theory of Functional Differential Equations". Springer-Verlag, 1977.

[Henry] HENRY, D. "Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations". Journal of Differential Equations 15, (106-128), 1974.