

RT-MAE 2008-08

TEMPO ÓTIMO DE BURN-IN USANDO UMA
REGRA DE PARADA MONÓTONA

by

Nelfi Gertrudis González Alvarez

Palavras-Chave: Burn-in, taxa de falha com forma de banheira, semimartingal regular, regra de parada ótima.

Classificação AMS: 90B25, 60G44.

- Agosto de 2008 -

Tempo ótimo de burn-in usando uma regra de parada monótona

Nelfi Gertrudis González Alvarez

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema da determinação do tempo ótimo de burn-in de um sistema coerente observado ao nível de seus componentes, mediante o uso de uma regra de parada monótona, considerando quatro critérios de otimização que envolvem estruturas de custo e de ganho relativas ao burn-in e à operação ou uso posterior do sistema. Supomos que os processos de taxa de falha tem a forma de banheira.

Palavras chaves: Burn-in, taxa de falha com forma de banheira, semimartingal regular, regra de parada ótima.

1 Introdução

O burn-in é um procedimento usado na fabricação de alguns produtos, tais como produtos eletrônicos, afim de eliminar itens defeituosos com tempos de vida inferiores ao tempo desejado, para assegurar que somente aqueles com confiabilidade e qualidade desejada sejam colocados no mercado. Com este objetivo o fabricante submete, por um período de

tempo (período de burn-in), os itens produzidos a testes que simulam situações típicas de uso ou até mais severas. Aqueles que sobrevivem são colocados em serviço, vendidos ou submetidos a testes adicionais. Os procedimentos de burn-in estão relacionados aos custos de produção, dos quais representam uma parte importante. Uma confiabilidade alta ao início do ciclo de vida de um produto contribui na redução dos custos de operação do produto.

Jensen e Petersen (1982) apresentam muitas das idéias tradicionais desenvolvidas com respeito ao burn-in. Entre tais idéias está a que considera apropriado usar um procedimento de burn-in quando os tempos de vida de um produto são modelados como uma mistura de funções de distribuições de probabilidade, modelando dois tipos de itens dentro de uma população: aqueles que, segundo sua confiabilidade e sua qualidade, são fracos ou fortes. Assume-se que os tempos de vida dos sistemas têm também este comportamento dicotômico (Block, e Savits, (1997)), de forma tal que a subpopulação de defeituosos apresenta uma *mortalidade infantil*, isto é, uma taxa de falha inicial alta. Assim, consideramos efetivo aplicar um procedimento de burn-in quando o tempo de vida de um sistema tem uma taxa de falha inicial alta mas que decresce com o tempo. Os sistemas que sobrevivem ao burn-in possuem a mesma taxa de falha do sistema inicial truncada à esquerda, e portanto o procedimento de burn-in elimina a parte do tempo de vida inicial na qual o sistema teria uma alta propensão a falha.

A classe de tempos de vida que tem taxas de falha com a forma de banheira satisfazem a propriedade anterior. Especificamente, para este tipo de distribuições, a taxa de falha inicial é alta (*período de mortalidade infantil*) a qual decresce aproximadamente até uma constante (*período de vida útil*) e finalmente cresce com a idade avançada (*período de desgaste*).

Na literatura recente encontramos diferentes trabalhos que direcionam o problema de achar o tempo ótimo de burn-in segundo diferentes critérios relativos à operação, manutenção, ou garantia do produto, por exemplo, Mi (1991, 1994, 1997), Cha (2000, 2001, 2003), Nguyen

e Murthy (1982), Kar e Nachlas (1997), Yun et. al. (2002), Sheu e Chien (2005), entre outros. Block e Savits (1997) faz uma revisão dos modelos de mistura, e sobre os critérios para a determinação do tempo ótimo de burn-in, que são classificados em dois grandes grupos: os baseados no desempenho sem ter em conta nenhuma estrutura de custo e aqueles baseados em custos. Neste trabalho, consideramos alguns destes critérios. Em todos estes trabalhos a análise é feita sem considerar o relacionamento entre o sistema e seus componentes, através da abordagem denominada de caixa preta em que observamos o tempo de vida do sistema no tempo. Propomos analisar diferentes critérios de otimização observando um sistema coerente ao nível de seus componentes, isto é, através da filtragem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{F}_t = \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, 0 \leq s \leq t \right\},$$

onde $T_i, i = 1, \dots, m$ são os tempos de vida dos componentes do sistema e admitindo que as taxas de falhas são processos estocásticos. A partir da representação semimartingal dos processos de contagem envolvidos nos processos de falhas considerados é possível definir, sob certas condições, uma regra de parada ótima baseada em uma classe apropriada de tempos de parada, como é descrito em Jensen (1989) e Aven e Jensen (1999).

Este trabalho está organizado como segue: Na Seção 2 apresentamos as definições básicas e suposições da teoria dos martingais necessarias em nossa modelagem. Na Seção 3 definimos o método de otimização baseado na regra de parada monótona *ILA* (*Infinitesimal-Look-Ahead*); finalmente, nas Seções 4 a 7 desenvolvemos com base na regra de parada monótona quatro problemas de otimização segundo diferentes critérios de custos.

2 Conceitos básicos e suposições

Com o fim de aplicar a teoria dos martingais lembramos alguns conceitos.

Definição 2.0.1. Seja ξ o tempo de vida de um sistema coerente de m componentes com tempos de vida $T_i, i = 1, 2, \dots, m$, definidos em um espaço de probabilidade completo

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com a filtragem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{F}_t = \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, 0 \leq s \leq t \right\} \quad (1)$$

uma família de sub σ -álgebras de $\mathcal{F}$ satisfazendo as condições de Dellacherie, isto é, crescentes, contínuas à direita e completas.

Definição 2.0.2. Uma variável aleatória positiva estendida ζ é um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada, se e só se, $\{\zeta \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$. Um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada ζ é previsível se existe uma seqüência $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada, $\zeta_n < \zeta$, tal que $\zeta_n \rightarrow \zeta$, quando $n \rightarrow +\infty$. Um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada ζ é totalmente inacessível se $P(\zeta = Y < \infty) = 0$ para tudo $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada previsível Y .

Definição 2.0.3. Um processo estocástico $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ é chamado um semimartingal regular ou SSM se admite uma decomposição na forma

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t, \quad (2)$$

onde $(f_t)_{t \geq 0}$ é um processo progressivo, $E(|Z_0|) < \infty$, $E\left\{\int_0^t |f_s| ds\right\} < \infty \forall t \geq 0$, e $(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_0$ (martingal de média zero). Usamos a notação $Z = (f, M)$.

Definição 2.0.4. Segundo Aven e Jensen (1999), Se $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ é um espaço de probabilidade filtrado e ζ é um $\mathbb{F}$ -tempo de parada, tal que o processo $(Z_t)_{t \geq 0}$, $Z_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$ tem uma representação SSM,

$$Z_t = \int_0^t 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_t, t \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

então ζ é um tempo de parada totalmente inacessível e o martingal M é quadrado integrável, $M \in \mathcal{M}_0^2$. Se ζ é um tempo de parada totalmente inacessível, então o processo $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$, $Z_t = 1_{\{\zeta \leq t\}}$ tem uma única descomposição P-q.c. $Z = \Lambda + M$, onde M é um martingal uniformemente integrável e Λ é contínua P-q.c.

Definição 2.0.5. Um processo de intensidade $\mathcal{F}_t$ -mensurável $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tem a forma de banheira (P-q.c) se existem $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada S_1 e S_2 tais que λ_t é estritamente decrescente se $0 \leq t \leq S_1$, λ_t é constante se $S_1 \leq t \leq S_2$, e λ_t é estritamente crescente se $t \geq S_2$. Os tempos de parada S_1 e S_2 são chamados de tempos de mudança (troca) de λ_t .

3 Otimização usando a representação semimartingal

3.1 Regra de parada monótona

Segundo Jensen (1989), uma regra de parada é uma estratégia que determina o tempo de parada com respeito a toda a informação passada sobre um processo aleatório. Assim, as regras de parada podem ser identificadas com tempos de parada, e portanto, sob condições apropriadas, pode-se descrever como o primeiro instante no qual o processo observado atinge o supermartingal minimal dominante. Neste trabalho consideramos a chamada regra de parada *ILA* (*Infinitesimal-Look-Ahead*) que corresponde ao primeiro tempo de entrada, de um processo observado, em um conjunto Borel conhecido e fixado (Jensen, 1989).

A regra *ILA* é aplicada a processos $Z = (Z_t)_t$ os quais admitem a representação semimartingal regular (SSM) dada em (2). Tais processos são definidos no espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, com a filtragem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Segundo Aven e Jensen (1999), se $\zeta > 0$ é um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada finito com $E[Z_\zeta] > -\infty$ e $C^{\mathbb{F}}$ é a classe de $\mathcal{F}_t$ -tempos de parada finitos,

$$C^{\mathbb{F}} = \left\{ \vartheta : \vartheta \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } \vartheta \leq \zeta, E[\zeta] < \infty, E[Z_\vartheta] > -\infty \right\}, \quad (4)$$

então, a regra de parada *ILA* é definida como segue. Seja $Z = (f, M)$. Sob a condição (*caso monótono*),

$$\left\{ f_t \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ f_{t+h} \leq 0 \right\} \quad \forall t, h \in \mathbb{R}^+, \quad \bigcup_{t \geq 0} \left\{ f_t \leq 0 \right\} = \Omega, \quad (5)$$

a regra *ILA* é dada por,

$$\xi = \inf \left\{ t \geq 0 : f_t \leq 0 \right\}. \quad (6)$$

Segundo Aven e Jensen (1999), se o martingal M é uniformemente integrável, então sob o caso monótono e a regra *ILA*, ξ ,

$$E[Z_\xi] = \sup \left\{ E[Z_\vartheta] : \vartheta \in C^{\mathbb{F}} \right\}. \quad (7)$$

4 Problema 1

Um sistema coerente com tempo de vida ζ é submetido a um procedimento de burn-in com tempo de duração b . O sistema que não sobrevive ao tempo b tem um custo C_0 . Se ele sobrevive ao tempo de burn-in mas não sobrevive a um tempo fixado de operação adicional τ , tem um custo $C > C_0$. Se o sistema sobrevive $b + \tau$ unidades de tempo tem um ganho de K . Queremos achar o tempo de burn-in que maximize a função

$$\begin{aligned} G(\tau, b) &= K \cdot P(\zeta > b + \tau) - C_0 \cdot P(\zeta \leq b) - C \cdot P(b < \zeta \leq b + \tau) \\ &= K + (C - C_0)P(\zeta \leq b) - (C + K)P(\zeta \leq b + \tau) \end{aligned} \quad (8)$$

Antes de resolvermos este problema consideramos a seguinte questão, também analisada em Bueno (2007). Suponha que desejamos encontrar b que minimize $E[Y_b^\tau] = P(b < \zeta \leq b + \tau)$, onde o processo Y_b^τ é dado por

$$Y_b^\tau = 1_{\{b < \zeta \leq b + \tau\}} = 1_{\{\zeta \leq b + \tau\}} - 1_{\{\zeta \leq b\}}. \quad (9)$$

Para isto supomos que ζ é um tempo de parada totalmente inacessível e usamos a sua representação semimartingal regular. Por (3), obtemos,

$$\begin{aligned} Y_b^\tau &= \int_0^{b+\tau} 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_{b+\tau} - \int_0^b 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds - M_b \\ &= \left[\int_0^\tau 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_\tau \right] + \int_\tau^{b+\tau} 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds - \int_0^b 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + (M_{b+\tau} - M_\tau - M_b) \\ &= Y_0^\tau - \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} \lambda_{s+\tau}] ds + M_b^\tau, \quad M_b^\tau \in \mathcal{M}_0, U.I., \end{aligned} \quad (10)$$

onde o processo Y_0^τ é dado por $Y_0^\tau = 1_{\{\zeta \leq \tau\}} = \int_0^\tau 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_\tau$, e o martingal M_b^τ é igual a $M_b^\tau = M_{b+\tau} - M_\tau - M_b$. Portanto,

$$E[Y_b^\tau] = E[Y_0^\tau] - E\left\{ \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} \lambda_{s+\tau}] ds \right\}, \quad (11)$$

e para τ fixo, o b que minimiza $E[Y_b^\tau]$ é o mesmo b que maximiza $K(\tau, b) = E\left\{ \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} \lambda_{s+\tau}] ds \right\}$. Considerando o processo $\tilde{Y}_b^\tau = -Y_b^\tau$, podemos reformular o problema de

minimizar $E[Y_b^\tau]$ como de maximizar $E[\tilde{Y}_b^\tau]$. Em particular, procuramos um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada B^* numa classe apropriada de tempos de parada $C_\zeta^{\mathbb{F}}$,

$$C_\zeta^{\mathbb{F}} = \left\{ B \geq 0 : B \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } B + \tau \leq \zeta, E[\zeta] < \infty, E[B] < \infty \right\}, \quad (12)$$

tal que,

$$K(\tau, B^*) = \sup\{K(\tau, B) : B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}\}. \quad (13)$$

Desde que consideramos tempos de parada $B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}$, temos que $\zeta > B + \tau$, e portanto $\zeta > B$. Logo,

$$K(\tau, B^*) = \sup\left\{ E\left[\int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] : B \in C_\zeta^{\mathbb{F}} \right\}. \quad (14)$$

Teorema 4.0.1. Suponha que o processo de intensidade de falha do sistema $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tem a forma de banheira com tempos de mudança $0 \leq S_1 \leq S_2$, e $\lambda_0 < \lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$. Então o tempo ótimo de burn-in $B^* \in C_\zeta^{\mathbb{F}}$ que maximiza $K(\tau, B)$ é tal que

$$i. B^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\} \text{ e}$$

$$ii. B^* \leq S_1.$$

Prova. i. Considere os dois casos seguintes,

$$(a) \lambda_\tau \geq \lambda_0 \text{ P-q.c.},$$

$$(b) \lambda_\tau < \lambda_0 \text{ P-q.c.}$$

Em (a): Como $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tem forma de banheira e $\lambda_0 < \lambda_\infty$ temos, $\tau > S_2$ e obtemos que $\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$, $\forall s \geq 0$. Assim, se $s = s + h$, temos $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$, $\forall s \geq 0, h \geq 0$. Portanto, neste caso, o processo $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$ é tal que, $f_s \leq 0$, $\forall s \geq 0$ e

$$\{f_s \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h} \leq 0\} \quad \forall s, h \in \mathbb{R}^+, \quad \bigcup_{s \geq 0} \{f_s \leq 0\} = \Omega.$$

Em (b): Pela forma de banheira de $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ e $\lambda_0 < \lambda_\infty$, temos que $\forall \omega \in \Omega$, existe $s^* \geq 0$ tal que $\lambda_{s^*} \leq \lambda_{s^*+\tau}$. Então,

(b-1) se $s^* \leq S_1$, necessariamente, pela forma de banheira $s^* + \tau > S_2$, assim que $\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$, $\forall s \geq s^*$, e portanto, $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$, $\forall s \geq s^*, h \geq 0$.

(b-2) Se $s^* \geq S_1$, como λ_s é não decrescente P-q.c em $\{s \geq S_1\}$, $\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$, $\forall_{s \geq s^*}$, e portanto $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$, $\forall_{s \geq s^*, h \geq 0}$.

Portanto, de (b-1) e (b-2) conclui-se que se $\lambda_\tau < \lambda_0$ e $\lambda_0 < \lambda_\infty$, para todo $\omega \in \Omega$ existe $s^* \geq 0$ tal que para o processo $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$,

$$\{f_s \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h} \leq 0\} \quad \forall_{s \geq s^*, h \in \mathbb{R}^+}, \quad \bigcup_{s \geq 0} \{f_s \leq 0\} = \Omega.$$

Observe que em (a) para todo $\omega \in \Omega$, $s^* = 0$. Assim, de (a) e (b) temos que o processo $f_s = \lambda_s - \lambda_{s+\tau}$ satisfaz as condições do caso monótono e como o martingal M_b^τ é uniformemente integrável, aplicamos a regra ILA dada por

$$B^* = \inf\{B \in C_\zeta^\mathbb{F} : f_B \leq 0\} = \inf\{B \in C_\zeta^\mathbb{F} : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\},$$

tal que

$$E\left[\int_0^{B^*} (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] = \sup\left\{E\left[\int_0^B (\lambda_s - \lambda_{s+\tau}) ds\right] : B \in C_\zeta^\mathbb{F}\right\} = K(\tau, B^*).$$

ii. Seja $S^*(\omega) = s^*$ o $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada tal que $\lambda_{s^*} \leq \lambda_{s^*+\tau}$. Dos casos (a) e (b) analisados em i., temos que $B^* = \inf\{S^*(\omega) : s^* \leq S_1\}$ em $\{S^* \leq S_1\}$. Por outro lado, observe que $\inf\{S^*(\omega) : s^* \geq S_1\} = S_1$, e portanto, em $\{S^* \geq S_1\}$, $B^* = S_1$. Do anterior conclui-se que $B^* \leq S_1$. ■

Agora consideramos o problema de maximizar a função dada em (8). Seja Z_b^τ o processo dado por,

$$Z_b^\tau = K + (C - C_0)1_{\{\zeta \leq b\}} - (C + K)1_{\{\zeta \leq b+\tau\}}. \quad (15)$$

Observe que $E[Z_b^\tau] = G(\tau, b)$. Definimos o problema de otimização como achar o $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada $\tilde{B}^* \in C_\zeta^\mathbb{F}$ que maximize $E[Z_{\tilde{B}^*}^\tau]$, isto é

$$E[Z_{\tilde{B}^*}^\tau] = G(\tau, \tilde{B}^*) = \sup\{G(\tau, B) : B \in C_\zeta^\mathbb{F}\}. \quad (16)$$

Sob a suposição que ζ é um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível, a representação semimartingal regular de Z_B^τ é,

$$Z_B^\tau = K + \int_0^B 1_{\{\zeta > s\}}(C - C_0)\lambda_s ds + (C - C_0)M_B - \int_0^{B+\tau} 1_{\{\zeta > s\}}(C + K)\lambda_s ds - (C + K)M_{B+\tau}$$

$$\begin{aligned}
&= K + \int_0^B 1_{\{\zeta > s\}} (C - C_0) \lambda_s ds - \left[\int_0^\tau 1_{\{\zeta > s\}} (C + K) \lambda_s ds + (C + K) M_\tau \right] \\
&\quad - \int_\tau^{B+\tau} 1_{\{\zeta > s\}} (C + K) \lambda_s ds + [(C - C_0) M_B + (C + K)(M_\tau - M_{B+\tau})] \\
&= Z_0^\tau + \int_0^B [1_{\{\zeta > s\}} (C - C_0) \lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} (C + K) \lambda_{s+\tau}] ds + R_B^\tau, \quad R_B^\tau \in \mathcal{M}_0, U.I., \quad (17)
\end{aligned}$$

onde o processo $Z_0^\tau = K - \left[\int_0^\tau 1_{\{\zeta > s\}} (C + K) \lambda_s ds + (C + K) M_\tau \right] = K - (C + K) 1_{\{\zeta \leq \tau\}}$ e o martingal R_B^τ é igual $R_B^\tau = (C - C_0) M_B + (C + K)(M_\tau - M_{B+\tau})$. Logo,

$$E[Z_B^\tau] = E[Z_0^\tau] + E\left\{ \int_0^B [1_{\{\zeta > s\}} (C - C_0) \lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} (C + K) \lambda_{s+\tau}] ds \right\}. \quad (18)$$

Desde que só consideramos tempos de parada $B \in C_\zeta^\mathbb{F}$, temos que $\zeta > B + \tau$ e portanto $\zeta > B$. Assim

$$\begin{aligned}
E[Z_B^\tau] &= G(\tau, \bar{B}^*) = \sup \left\{ E[Z_0^\tau] + E\left\{ \int_0^B [(C - C_0) \lambda_s - (C + K) \lambda_{s+\tau}] ds \right\} : B \in C_\zeta^\mathbb{F} \right\} \\
&= \sup \left\{ E[Z_0^\tau] + (C + K) \cdot E\left\{ \int_0^B [\bar{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}] ds \right\} : B \in C_\zeta^\mathbb{F} \right\}, \quad (19) \\
&\text{onde } \bar{\lambda}_s = \left(\frac{C - C_0}{C + K} \right) \lambda_s.
\end{aligned}$$

Observe que o tempo de parada $B \in C_\zeta^\mathbb{F}$ que maximiza $E[Z_B^\tau]$ é o mesmo que maximiza $H(\tau, B) = E\left\{ \int_0^B [\bar{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}] ds \right\}$, isto é,

$$H(\tau, \bar{B}^*) = \sup \{ H(\tau, B) : B \in C_\zeta^\mathbb{F} \}. \quad (20)$$

Logo, para a aplicação da regra ILA, consideramos o processo $f_s = \bar{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}$ em $\{\zeta > B + \tau\}$, para $s \leq B$. Note que,

$$\{f_s \leq 0\} \iff \left\{ \left(\frac{C - C_0}{C + K} \right) \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau} \right\}, \text{ com } 0 < \left(\frac{C - C_0}{C + K} \right) < 1. \quad (21)$$

Teorema 4.0.2. Sob as condições no teorema 4.0.1,

$$i. \bar{B}^* = \inf \{ B : B \in C_\zeta^\mathbb{F}, \bar{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau} \}, \text{ onde } \bar{\lambda}_B = \left(\frac{C - C_0}{C + K} \right) \lambda_B$$

$$ii. \bar{B}^* \leq B^* = \inf \{ B : B \in C_\zeta^\mathbb{F}, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau} \} \leq S_1.$$

Prova. i. Observe que

$$\tilde{\lambda}_s < \lambda_s, \forall s \geq 0. \quad (22)$$

Consideramos os dois casos seguintes:

i-1. Suponha que $\tilde{\lambda}_0 \leq \lambda_{S_1}$. Pela forma de banheira temos que, para todo $s \geq 0$, $\lambda_s \geq \lambda_{S_1}$ e portanto, $\tilde{\lambda}_0 \leq \lambda_s, \forall s \geq 0$. Como o processo $\tilde{\lambda}_s$ também tem a forma de banheira, então para todo $0 \leq s' \leq S_2$ temos que $\tilde{\lambda}_{s'} < \tilde{\lambda}_0$ e assim, pelo resultado anterior, $\tilde{\lambda}_{s'} < \lambda_s, \forall 0 \leq s' \leq S_2, s \geq 0$. Portanto,

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}, \forall 0 \leq s \leq S_2. \quad (23)$$

Se $s' > S_2$, pela forma de banheira e (22), temos que para todo $s \geq s' > S_2$, $\tilde{\lambda}_{s'} < \lambda_{s'} \leq \lambda_s$, então,

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}, \forall 0 \leq s > S_2. \quad (24)$$

De (23) e (24) conclui-se que

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}, \forall s \geq 0 \text{ e portanto (com } s = s + h) \tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}, \forall s \geq 0, h \geq 0. \quad (25)$$

i-2. Suponha que $\tilde{\lambda}_0 > \lambda_{S_1}$. Pela forma de banheira de $\tilde{\lambda}_s$ e de λ_s , para todo $\omega \in \Omega$ existe $0 \leq t' \leq S_1$ tal que $t' = \inf\{s \geq 0 : \tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{S_1}\}$ e portanto $\tilde{\lambda}_0 > \tilde{\lambda}_s \geq \tilde{\lambda}_{t'}, \forall 0 \leq s \leq t'$. Seja $s^* = \inf\{s \geq 0 : \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\}$. Do teorema 4.0.1 temos que para todo $s \geq s^*, h \geq 0$, $\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$, portanto $\lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$. Por (22), obtemos que para todo $s \geq s^*, h \geq 0$, $\tilde{\lambda}_s < \lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}$, então, $\tilde{\lambda}_{s+h} < \lambda_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$. Além disso, observe que para todo $s \geq 0$, $\tilde{\lambda}_{t'} \leq \lambda_s$ e por i-1., temos que para todo $s \geq t'$, $\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau}$ por o qual também, para todo $s \geq t', h \geq 0$, $\tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}$. Concluimos que

$$\tilde{\lambda}_s \leq \lambda_{s+\tau} \text{ e } \tilde{\lambda}_{s+h} \leq \lambda_{s+\tau+h}, \forall s \geq \min\{s^*, t'\}, h \geq 0. \quad (26)$$

De i-1., e i-2., o processo $f_s = \tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}$, $s \leq B$, $B \in C_\zeta^F$, satisfaz o caso monótono e como o martingal R_ζ^F , em (17), é uniformemente integrável, a regra ILA ótima é $\tilde{B}^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^F, \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$.

ii. Por definição de $\tilde{B}^*$, temos que $\forall_{B < \tilde{B}^*}$, $\tilde{\lambda}_B > \lambda_{B+\tau}$. Suponha que $B^* < \tilde{B}^*$, então

$\bar{\lambda}_{B^*} > \lambda_{B^*+\tau}$, de onde teríamos que $\lambda_{B^*} > \left(\frac{C+K}{C-C_0}\right)\lambda_{B^*+\tau} > \lambda_{B^*+\tau}$. Mas, por definição, $\lambda_{B^*} \leq \lambda_{B^*+\tau}$, que é uma contradição. Portanto $B^* \geq \bar{B}^*$. ■

4.1 Exemplo

Seja ζ o tempo de vida de um sistema coerente de dois componentes em paralelo, isto é, $\zeta = T_1 \vee T_2$, onde os tempos de vida dos componentes, T_1 e T_2 são definidos por $T_1 = Z_1 \wedge Z_{12}$, $T_2 = Z_2 \wedge Z_{12}$, com Z_1, Z_2, Z_{12} variáveis aleatórias iid com função de taxa de falha $r(t) = e^{-t} + 0.1t$, $t \geq 0$. Então, a $\mathcal{F}_t$ intensidade de ζ é, $\lambda_t = r(t) + r(t)1_{\{T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2\}}$. A figura 1 apresenta a função de densidade $f(t) = r(t)\bar{F}(t)$, a função de sobrevivência

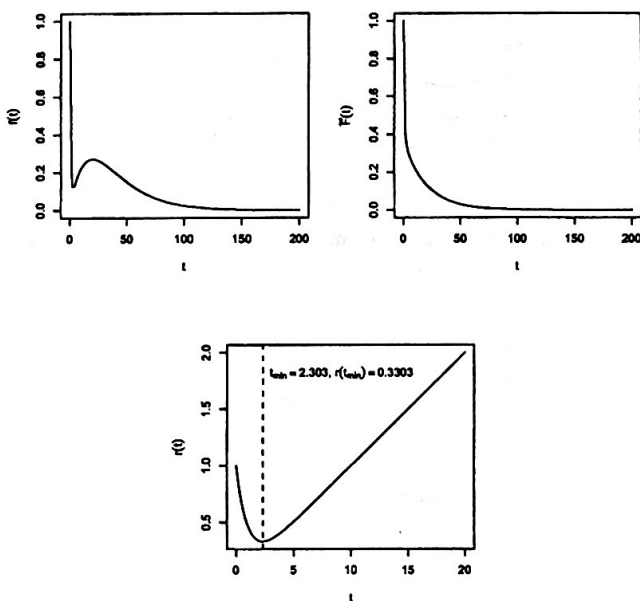


Figura 1: Função de densidade, de sobrevivência e da taxa de falha no exemplo 4.1

$\bar{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}$ e a função de taxa de falha $r(t)$ correspondente. Observe que $r(t)$ tem forma de banheira com um só ponto de mudança em $t_{\min}$, $r(0) = 1 < r(\infty) = +\infty$,

e

$$\lambda_t = \begin{cases} r(t), & \text{se } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ 2r(t), & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (27)$$

Portanto o processo de intensidade λ_t só tem um único tempo de mudança $S_1 = S_2 = t_{\min}$, e $\lambda_0 < \lambda_\infty = +\infty$. No conjunto $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ o processo λ_t é como na figura 2, e no conjunto $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$ o processo λ_t é como na figura 3. Queremos achar

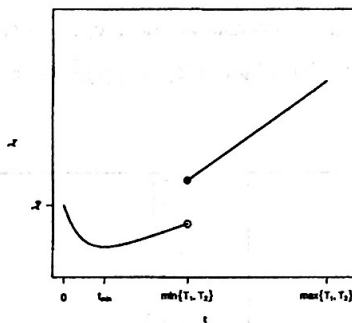


Figura 2: Processo de intensidade em $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$, exemplo 4.1.

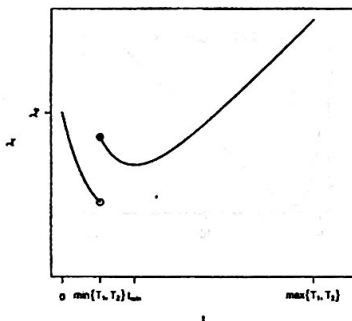


Figura 3: Processo de intensidade em $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$, exemplo 4.1.

$B^* = \inf\{B \in C_\zeta^F : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$. No conjunto $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ consideramos dois casos,

i. O conjunto $\{B + \tau < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$r(B) = r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = e^{-(B+\tau)} + 0.1(B + \tau).$$

ii. O conjunto $\{B + \tau \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$r(B) = 2r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 2e^{-(B+\tau)} + 0.2(B + \tau).$$

No conjunto $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$ também consideramos dois casos,

i. O conjunto $\{B < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$r(B) = 2r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 2e^{-(B+\tau)} + 0.2(B + \tau).$$

ii. O conjunto $\{B \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$2r(B) = 2r(B + \tau) \implies r(B) = r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = e^{-(B+\tau)} + 0.1(B + \tau).$$

A seguir, apresentamos as soluções para $r(B) = r(B + \tau)$ para valores distintos de τ ,

τ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
B^*	1.844	1.645	1.464	1.300	1.153	1.019	0.898	0.787

A seguir, listamos as correspondentes soluções para $r(B) = 2r(B + \tau)$ para valores distintos de τ ,

τ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
B^*	0.188	0.468	0.486	0.431	0.349	0.258	0.165	0.075

Para achar $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_{\zeta}^F, \bar{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$, onde $\bar{\lambda}_B = \left(\frac{C-C_0}{C+K}\right)\lambda_B$, também temos que considerar os conjuntos $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ e $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$. Seja $\tilde{r}(t) = \left(\frac{C-C_0}{C+K}\right)r(t)$, com $C_0 = 2$, $C = 10$, e $K = 5.2$.

Em $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ temos que,

e

$$\lambda_t = \begin{cases} r(t), & \text{se } 0 \leq t < T_1 \wedge T_2 \\ 2r(t), & \text{se } T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2. \end{cases} \quad (27)$$

Portanto o processo de intensidade λ_t só tem um único tempo de mudança $S_1 = S_2 = t_{\min}$, e $\lambda_0 < \lambda_\infty = +\infty$. No conjunto $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ o processo λ_t é como na figura 2, e no conjunto $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$ o processo λ_t é como na figura 3. Queremos achar

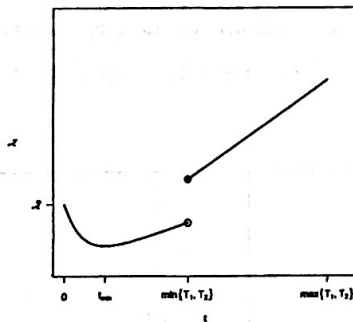


Figura 2: Processo de intensidade em $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$, exemplo 4.1.

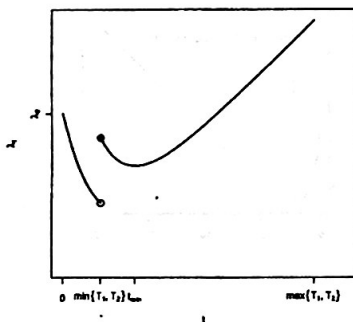


Figura 3: Processo de intensidade em $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$, exemplo 4.1.

$B^* = \inf\{B \in C_c^F : \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$. No conjunto $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ consideramos dois casos,

i. O conjunto $\{B + \tau < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$r(B) = r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = e^{-(B+\tau)} + 0.1(B + \tau).$$

ii. O conjunto $\{B + \tau \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$r(B) = 2r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 2e^{-(B+\tau)} + 0.2(B + \tau).$$

No conjunto $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$ também consideramos dois casos,

i. O conjunto $\{B < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$r(B) = 2r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 2e^{-(B+\tau)} + 0.2(B + \tau).$$

ii. O conjunto $\{B \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$2r(B) = 2r(B + \tau) \implies r(B) = r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = e^{-(B+\tau)} + 0.1(B + \tau).$$

A seguir, apresentamos as soluções para $r(B) = r(B + \tau)$ para valores distintos de τ ,

τ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
B^*	1.844	1.645	1.464	1.300	1.153	1.019	0.898	0.787

A seguir, listamos as correspondentes soluções para $r(B) = 2r(B + \tau)$ para valores distintos de τ ,

τ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
B^*	0.188	0.468	0.486	0.431	0.349	0.258	0.165	0.075

Para achar $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_\zeta^F, \bar{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$, onde $\bar{\lambda}_B = \left(\frac{C-C_0}{C+K}\right)\lambda_B$, também temos que considerar os conjuntos $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ e $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$. Seja $\tilde{r}(t) = \left(\frac{C-C_0}{C+K}\right)r(t)$, com $C_0 = 2$, $C = 10$, e $K = 5.2$.

Em $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ temos que,

onde $R_B^\tau = \int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)} dM_s^\tau$ é um martingal de média zero e limitado em L^2 , portanto uniformemente integrável.

Neste ponto redefinimos o problema de otimização como achar o $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada $B^* \in C_\zeta^\mathcal{F}$ (com $C_\zeta^\mathcal{F}$ definida em (12)) tal que $K(\tau, B^*) = E[Z_B^\tau] = \inf\{K(\tau, B) : B \in C_\zeta^\mathcal{F}\}$. Desde que só consideramos tempos de parada $B \in C_\zeta^\mathcal{F}$, temos que em $\{\zeta > B + \tau\}$, a variável indicadora $1_{\{s < \zeta \leq s + \tau\}} = 0, \forall 0 < s \leq B$, enquanto que $1_{\{\zeta > s + \tau\}} = 1_{\{\zeta > s\}} = 1, \forall 0 < s \leq B$. Portanto, a representação semimartingal para Z_B^τ , com $B \in C_\zeta^\mathcal{F}$, simplifica para,

$$Z_B^\tau = 1_{\{\zeta \leq \tau\}} + \int_0^B \frac{[\lambda_{s+\tau} - \lambda_s]}{\bar{F}_\zeta(s)} ds + R_B^\tau = 1_{\{\zeta \leq \tau\}} - \int_0^B \frac{[\lambda_s - \lambda_{s+\tau}]}{\bar{F}_\zeta(s)} ds + R_B^\tau, \quad B \in C_\zeta^\mathcal{F}. \quad (33)$$

Assim,

$$K(\tau, B) = E[Z_B^\tau] = P(\zeta \leq \tau) - E\left\{\int_0^B \frac{[\lambda_s - \lambda_{s+\tau}]}{\bar{F}_\zeta(s)} ds\right\}. \quad (34)$$

De (34) concluímos que

$$K(\tau, B^*) = \inf\{K(\tau, B) : B \in C_\zeta^\mathcal{F}\} \iff G(\tau, B^*) = \sup\left\{E\left[\int_0^B \frac{[\lambda_s - \lambda_{s+\tau}]}{\bar{F}_\zeta(s)} ds\right] : B \in C_\zeta^\mathcal{F}\right\}, \quad (35)$$

e consideramos o problema de maximizar $G(\tau, B)$.

Teorema 5.0.1. Sob as condições no teorema 4.0.1, o tempo ótimo de burn-in $B^* \in C_\zeta^\mathcal{F}$ que maximiza $G(\tau, B)$ é tal que

$$i. \quad B^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^\mathcal{F}, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\} \text{ e}$$

$$ii. \quad B^* \leq S_1.$$

Prova. Para a aplicação da regra de parada *ILA* observe que o processo f_s em $\{\zeta > B + \tau\}$ é igual a $f_s = \frac{[\lambda_s - \lambda_{s+\tau}]}{\bar{F}_\zeta(s)}$ para $s \leq B$, assim, $\{f_s \leq 0\} \iff \{\lambda_s \leq \lambda_{s+\tau}\}$ e sob as mesmas condições no teorema 4.0.1, o caso monótono é satisfeito e com o martingal R_B^τ em (32) uniformemente integrável, então a regra *ILA* ótima satisfaz *i.* e *ii.*, como foi provado em 4.0.1. ■

6 Problema 3

Suponha que um sistema coerente é submetido a um procedimento de burn-in com período fixado b ; se falha antes do tempo b o sistema é descartado a um custo $C_s > 0$ e outra unidade é submetida ao mesmo procedimento. Este processo é repetido até obter a primeira unidade que sobrevive ao tempo de burn-in b . O custo para este procedimento é proporcional ao tempo necessário para obter uma unidade sobrevivendo ao burn-in, com constante de proporcionalidade C_0 . O sistema que sobreviver ao procedimento de burn-in, resultante do processo anterior, é colocado em operação. Um custo de $C > C_s$ ocorre se o sistema não sobrevive a um tempo de missão fixado τ , e um ganho de K se ele sobrevive a este tempo.

6.1 Custo esperado devido ao burn-in

Para obter o custo durante o processo de burn-in, considere a seqüência de tempos de vida ζ_i , $i \geq 1$, das unidades submetidas ao procedimento. Então, em termos da seqüência ζ_i , $i \geq 1$, o custo deste processo é igual a

$$K(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_i \leq b\}} \cdot [C_s \cdot 1_{\{\zeta_n \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta_n)], \quad (36)$$

com a convenção $\prod_{i=1}^{n-1} (\bullet) \equiv 1$, para $n = 1$. Como as variáveis ζ_i representam os tempos de vida de sistemas independentes, a seqüência ζ_i , $i \geq 1$ é uma seqüência de variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Seja $\lambda_i(z)$ o processo de intensidade de falha do tempo de vida do i -ésimo sistema submetido ao burn-in. Se $\lambda_i(z) = \lambda_t$, $\forall i \geq 1$ e se supomos que os ζ_i são tempos de parada totalmente inacessíveis, então $P(\zeta_i \leq t) = F_{\zeta}(t)$, $t \geq 0$, $\forall i \geq 1$, é absolutamente contínua com função de taxa de falha $r_{\zeta}(t) = \frac{dF_{\zeta}(t)}{dt} / \bar{F}_{\zeta}(t)$, $t \geq 0$, e função de sobrevivência $\bar{F}_{\zeta}(t) = P(\zeta > t)$, $t \geq 0$. Sob tais condições o custo esperado do processo de burn-in é igual a, $v(b) = E[K(b)]$,

$$\begin{aligned} v(b) &= E\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} 1_{\{\zeta_i \leq b\}} \cdot [C_s \cdot 1_{\{\zeta_n \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta_n)] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} P(\zeta_i \leq b) \cdot E[C_s \cdot 1_{\{\zeta_n \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta_n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[C_s \cdot 1_{\{\zeta \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta)] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [F_{\zeta}(b)]^{n-1} \\
&= \frac{1}{\bar{F}_{\zeta}(b)} \cdot E[C_s \cdot 1_{\{\zeta \leq b\}} + C_0 \cdot (b \wedge \zeta)]. \quad (37)
\end{aligned}$$

De (37) é claro que sob a condição de tempos de vida independentes e identicamente distribuídos, o custo esperado para obter uma unidade com burn-in é proporcional ao custo esperado num ciclo de burn-in para uma unidade com tempo de vida ζ .

6.2 Custo e ganho esperado devido ao período adicional de operação

O custo por falha durante o tempo de operação adicional de uma unidade com burn-in é igual a, $C \cdot (1_{\{\zeta \leq b+\tau\}} | \zeta > b)$, com valor esperado igual a

$$C(\tau, b) = \frac{E[C \cdot 1_{\{\zeta \leq b+\tau\}} \cdot 1_{\{\zeta > b\}}]}{P(\zeta > b)} = \frac{1}{\bar{F}_{\zeta}(b)} \cdot E[C \cdot 1_{\{\zeta \leq b+\tau\}} - C \cdot 1_{\{\zeta \leq b\}}], \quad (38)$$

enquanto que o ganho por sobreviver ao tempo de missão τ é igual a $K \cdot (1_{\{\zeta > b+\tau\}} | \zeta > b)$, com valor esperado igual a

$$\begin{aligned}
G(\tau, b) &= K \cdot E[1_{\{\zeta > b+\tau\}} | \zeta > b] = K \cdot \{1 - E[1_{\{\zeta \leq b+\tau\}} | \zeta > b]\} \\
&= K - \frac{1}{\bar{F}_{\zeta}(b)} \cdot E[K \cdot 1_{\{\zeta \leq b+\tau\}} - K \cdot 1_{\{\zeta \leq b\}}]. \quad (39)
\end{aligned}$$

6.3 Função de otimização

Queremos achar o $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada $\bar{B}^* \in C_{\zeta}^{\mathcal{F}}$ que maximize a função $U(\tau, B) = G(\tau, B) - C(\tau, B) - v(B)$, que por (37), (38) e (39) é igual a

$$U(\tau, B) = K + E \left\{ \frac{[(C + K) - C_s] \cdot 1_{\{\zeta \leq B\}} - (C + K) \cdot 1_{\{\zeta \leq B+\tau\}}}{\bar{F}_{\zeta}(B)} \right\} - E \left\{ \frac{C_0(B \wedge \zeta)}{\bar{F}_{\zeta}(B)} \right\}. \quad (40)$$

Seja o processo $\tilde{Y}_b^{\tau}$ dado por

$$\tilde{Y}_b^{\tau} = [(C + K) - C_s] \cdot 1_{\{\zeta \leq b\}} - (C + K) \cdot 1_{\{\zeta \leq b+\tau\}}. \quad (41)$$

Se ζ é um tempo de parada totalmente inacessível, então por (3), obtemos a representação semimartingal regular de $\tilde{Y}_b^\tau$,

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_b^\tau &= [(C+K) - C_s] \cdot \left[\int_0^b 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_b \right] - (C+K) \cdot \left[\int_0^{b+\tau} 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_{b+\tau} \right] \\ &= -(C+K) \left[\int_0^\tau 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + M_\tau \right] + [(C+K) - C_s] \cdot \int_0^b 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds \\ &\quad - (C+K) \int_\tau^{b+\tau} 1_{\{\zeta > s\}} \lambda_s ds + (C+K) \cdot [M_\tau - M_{b+\tau}] + [(C+K) - C_s] \cdot M_b \\ &= \tilde{Y}_0^\tau + \int_0^b [1_{\{\zeta > s\}} [(C+K) - C_s] \lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} (C+K) \lambda_{s+\tau}] ds + \tilde{M}_b^\tau,\end{aligned}\quad (42)$$

onde o martingal $\tilde{M}_b^\tau = (C+K) \cdot [M_\tau - M_{b+\tau}] + [(C+K) - C_s] \cdot M_b$, e portanto $\tilde{M}_b^\tau \in \mathcal{M}_0, U.I$ e $\tilde{Y}_0^\tau = -(C+K) \cdot 1_{\{\zeta \leq \tau\}}$. Suponha que $[\bar{F}_\zeta(b)]^{-1}$ é uma função absolutamente contínua de variação limitada em $[0, b]$. Então para representar o processo $\tilde{Z}_b^\tau = \frac{1}{\bar{F}_\zeta(b)} \cdot \tilde{Y}_b^\tau$ podemos usar a fórmula de integração por partes para integrais de Stieltjes, obtendo,

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_b^\tau &= \frac{1}{\bar{F}_\zeta(0)} \tilde{Y}_0^\tau + \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s^-)} d\tilde{Y}_s^\tau + \int_0^b \tilde{Y}_s^\tau d\left(\frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)}\right) \\ &= -(C+K) 1_{\{\zeta \leq \tau\}} + \int_0^b \frac{[1_{\{\zeta > s\}} [(C+K) - C_s] \lambda_s - 1_{\{\zeta > s+\tau\}} (C+K) \lambda_{s+\tau}]}{\bar{F}_\zeta(s)} ds \\ &\quad + \int_0^b d\left(\frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)}\right) \cdot [(C+K) - C_s] \cdot 1_{\{\zeta \leq s\}} - (C+K) \cdot 1_{\{\zeta \leq s+\tau\}} + \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)} d\tilde{M}_s^\tau,\end{aligned}\quad (43)$$

onde $\tilde{R}_b^\tau = \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)} d\tilde{M}_s^\tau$ é um martingal limitado em L^2 . Para tempos de parada $B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}$, temos que em $\{\zeta > B+\tau\}$, as variáveis indicadoras $1_{\{\zeta \leq s+\tau\}} = 1_{\{\zeta \leq s\}} = 0, \forall 0 < s \leq B$, enquanto que $1_{\{\zeta > s+\tau\}} = 1_{\{\zeta > s\}} = 1, \forall 0 < s \leq B$. Assim, a representação semimartingal para $\tilde{Z}_B^\tau$, com $B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}$, é simplificada para

$$\tilde{Z}_B^\tau = -(C+K) 1_{\{\zeta \leq \tau\}} + \int_0^B \frac{[(C+K) - C_s] \lambda_s - (C+K) \lambda_{s+\tau}}{\bar{F}_\zeta(s)} ds + \tilde{R}_B^\tau, \quad B \in C_\zeta^{\mathbb{F}}. \quad (44)$$

Seja $T_b = C_0 \cdot (b \wedge \zeta) = \int_0^b C_0 \cdot 1_{\{\zeta > s\}} ds$, com parte martingal igual a zero P-q.c, e o processo $\tilde{X}_b = \frac{1}{\bar{F}_\zeta(b)} \cdot T_b$. Pela fórmula de integração por partes para integrais de Stieltjes, obtemos,

$$\tilde{X}_b = \frac{1}{\bar{F}_\zeta(0)} \cdot T_0 + \int_0^b \left[\frac{1}{\bar{F}_\zeta(s^-)} dT_s + T_s \cdot d\left(\frac{1}{\bar{F}_\zeta(s)}\right) \right]$$

$$= \int_0^B \left[C_0 \cdot \frac{1_{\{\zeta > s\}}}{\bar{F}_\zeta(s)} ds + C_0 \cdot (s \wedge \zeta) \frac{r_\zeta(s)}{\bar{F}_\zeta(s)} ds \right]. \quad (45)$$

Considerando só tempos de parada $B \in C_\zeta^F$, temos que em $\{\zeta > B + \tau\}$, a variável indicadora $1_{\{\zeta > s\}} = 1, \forall 0 < s \leq B$, enquanto que $s \wedge \zeta = s, \forall 0 < s \leq B$. Assim, a representação semimartingal para $\tilde{X}_B^\tau$, com $B \in C_\zeta^F$, é simplificada para,

$$\tilde{X}_B = \int_0^B \frac{C_0 \cdot [1 + s \cdot r_\zeta(s)]}{\bar{F}_\zeta(s)} ds, \quad B \in C_\zeta^F. \quad (46)$$

Observe que $U(\tau, B) = E[\tilde{U}_B^\tau]$ onde o processo $\tilde{U}_B^\tau = K + \tilde{Z}_B^\tau - \tilde{X}_B$. Para $B \in C_\zeta^F$, temos que,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_B^\tau &= \tilde{U}_0^\tau + \int_0^B \left\{ \frac{[(C+K) - C_s] \lambda_s - (C+K) \lambda_{s+\tau}}{\bar{F}_\zeta(s)} - \frac{C_0 \cdot [1 + s \cdot r_\zeta(s)]}{\bar{F}_\zeta(s)} \right\} ds + \tilde{R}_B^\tau \\ &= \tilde{U}_0^\tau + (C+K) \int_0^B \left\{ \frac{[\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}]}{\bar{F}_\zeta(s)} - \left(\frac{C_0}{C+K} \right) \cdot \frac{[1 + s \cdot r_\zeta(s)]}{\bar{F}_\zeta(s)} \right\} ds + \tilde{R}_B^\tau, \quad B \in C_\zeta^F, \end{aligned} \quad (47)$$

com $\tilde{U}_0^\tau = K - (C+K)1_{\{\zeta \leq \tau\}}$, $\tilde{\lambda}_s = \left[\frac{(C+K) - C_s}{C+K} \right] \lambda_s$ e $0 < \left[\frac{(C+K) - C_s}{C+K} \right] < 1$. Logo, o problema de otimização corresponde a achar o $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada $\tilde{B}^* \in C_\zeta^F$ tal que,

$$E[\tilde{U}_{\tilde{B}^*}^\tau] = U(\tau, \tilde{B}^*) = \sup\{U(\tau, B), B \in C_\zeta^F\}. \quad (48)$$

Para a aplicação da regra *ILA*, consideramos neste caso o processo f_s em $\{\zeta > B + \tau\}$, igual a

$$f_s = \frac{[\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}]}{\bar{F}_\zeta(s)} - \left(\frac{C_0}{C+K} \right) \cdot \frac{[1 + s \cdot r_\zeta(s)]}{\bar{F}_\zeta(s)}, \quad \text{para } s \leq B. \quad (49)$$

Sejam $g_s = \tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}$ e $h(s) = \left(\frac{C_0}{C+K} \right) \cdot [1 + s \cdot r_\zeta(s)]$, $h(s) \geq \left(\frac{C_0}{C+K} \right), \forall s \geq 0$. Observe que,

$$\{f_s \leq 0\} \iff \{g_s \leq h(s)\}. \quad (50)$$

Teorema 6.3.1. Suponha que o processo de intensidade de falha do sistema $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tem a forma de banheira com tempos de mudança $0 \leq S_1 \leq S_2$, e $\lambda_0 < \lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$. Seja $\rho_\zeta^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^F, f_B \leq 0\}$, com f_B definido como em (49). Se

$$\{f_s \leq 0\} \subseteq \{f_{s+h} \leq 0\}, \forall s \geq \rho_\zeta^*, h \geq 0, \bigcup_{s \geq 0} \{f_s \leq 0\} = \Omega, \quad (51)$$

então $\tilde{B}^* = \rho_\zeta^* \leq \tilde{B}^* \leq S_1$ onde $\tilde{B}^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^F, \bar{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$, com $\bar{\lambda}_B = \left[\frac{(C+K)-C_s}{C+K} \right] \lambda_B$.

Prova. Seja $\tilde{H}(\tau, B) = E\left\{\int_0^B [\bar{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}] ds\right\}$, com $\bar{\lambda}_s = \left[\frac{(C+K)-C_s}{C+K} \right] \lambda_s$, $0 < \left[\frac{(C+K)-C_s}{C+K} \right] < 1$ e

$$\tilde{H}(\tau, \tilde{B}^*) = \sup\{\tilde{H}(\tau, B) : B \in C_\zeta^F\}. \quad (52)$$

Pelos teoremas 4.0.1 e 4.0.2 temos que se o processo de intensidade de falha do sistema $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tem a forma de banheira com tempos de mudança $0 \leq S_1 \leq S_2$, e $\lambda_0 < \lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$, então,

$$i. \tilde{B}^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^F, \bar{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}, \text{ onde } \bar{\lambda}_B = \left[\frac{(C+K)-C_s}{C+K} \right] \lambda_B$$

$$ii. \tilde{B}^* \leq B^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^F, \lambda_B \leq \lambda_{B+\tau}\} \leq S_1.$$

Assim, o processo $g_s = \bar{\lambda}_s - \lambda_{s+\tau}$, satisfaz o caso monótono, e $\tilde{B}^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^F, g_B \leq 0\}$. De (50) temos que $\rho_\zeta^* = \inf\{B : B \in C_\zeta^F, g_B \leq h(B)\}$. Então para $0 \leq B < \rho_\zeta^*$, $g_B > h(B)$, e como $h(B) > 0$, teríamos que $g_B > 0, \forall 0 \leq B < \rho_\zeta^*$. Suponha que $\rho_\zeta^* > \tilde{B}^*$, isto implica que $g_{\tilde{B}^*} > 0$, mas pela definição de $\tilde{B}^*$, $g_{\tilde{B}^*} \leq 0$. Portanto $\rho_\zeta^* \leq \tilde{B}^*$. Além disso como g_s satisfaz o caso monótono e sob condição em (51), temos que o processo $g_s - h(s)$ também satisfaz o caso monótono, assim como $f_s = \frac{g_s - h(s)}{F_\zeta(s)}$, portanto a regra de parada ótima $\tilde{B}^* \in C_\zeta^F$ tal que, $E[\tilde{U}_{\tilde{B}^*}^\tau] = U(\tau, \tilde{B}^*) = \sup\{U(\tau, B), B \in C_\zeta^F\}$ é $\tilde{B}^* = \rho_\zeta^* \leq \tilde{B}^*$. ■

6.4 Exemplo

Seja o sistema coerente descrito no exemplo 4.1, onde a função $r(t) = e^{-t} + 0.1t$. A figura 5 apresenta a função de taxa de falha do tempo de vida do sistema $r_\zeta(t)$, que é igual a,

$$r_\zeta(t) = (e^{-t} + 0.1t) \times \frac{4 - 3 \exp\{e^{-t} - 1 - 0.05t^2\}}{2 - \exp\{e^{-t} - 1 - 0.05t^2\}},$$

a função $h(t) = \left(\frac{C_0}{C+K} \right) \cdot [1 + t \cdot r_\zeta(t)]$ definida em (50), e a função $\tilde{r}(t) - r(t)$, com $\tilde{r}(t) = \left[\frac{(C+K)-C_s}{C+K} \right] r(t)$, para $C_0 = 2$, $C_s = 5$, $C = 10$ e $K = 15$.

Para achar $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_\zeta^F, \bar{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\tau}\}$, onde $\bar{\lambda}_B = \left[\frac{(C+K)-C_s}{C+K} \right] \lambda_B$ temos que considerar os conjuntos $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ e $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$. Em $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ temos que,

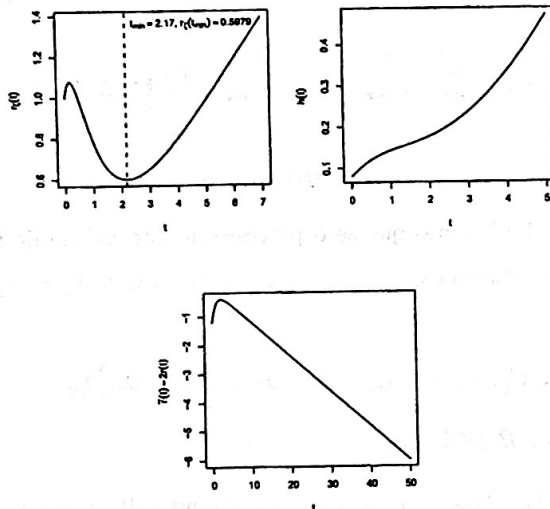


Figura 5: Gráficos das funções $r_c(t)$, $h(t)$ e $\bar{r}(t) - 2r(t)$

i. No conjunto $\{B + \tau < T_1 \wedge T_2\}$: Resolvemos,

$$\bar{r}(B) = r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 1.25e^{-(B+\tau)} + 0.125(B + \tau).$$

ii. No conjunto $\{B + \tau \geq T_1 \wedge T_2\}$: Resolvemos,

$$\bar{r}(B) = 2r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 2.5e^{-(B+\tau)} + 0.25(B + \tau).$$

No conjunto $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$ também temos que considerar dois casos,

i. O conjunto $\{B < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\bar{r}(B) = 2r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 2.5e^{-(B+\tau)} + 0.25(B + \tau).$$

ii. O conjunto $\{B \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso resolvemos,

$$2\bar{r}(B) = 2r(B + \tau) \implies \bar{r}(B) = r(B + \tau) \implies e^{-B} + 0.1B = 1.25e^{-(B+\tau)} + 0.125(B + \tau).$$

A seguir, as soluções para $\tilde{r}(B) = r(B + \tau)$ para valores distintos de τ .

τ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\tilde{B}^*$	1.242	1.199	1.097	0.979	0.861	0.747	0.639	0.538

Para achar $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_{\zeta}^{\mathbb{R}}, \bar{\lambda}_B - \lambda_{B+\tau} \leq h(B)\}$ consideramos também os conjuntos $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ e $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$. Em $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ temos que,

i. No conjunto $\{B + \tau < T_1 \wedge T_2\}$: Resolvemos,

$$\tilde{r}(B) - r(B + \tau) = h(B) \implies e^{-B} + 0.1B - 1.25e^{-(B+\tau)} - 0.125(B + \tau) = 1.25h(B).$$

ii. No conjunto $\{B + \tau \geq T_1 \wedge T_2\}$: Resolvemos,

$$\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) = h(B) \implies e^{-B} + 0.1B - 2.5e^{-(B+\tau)} - 0.25(B + \tau) = 1.25h(B).$$

No conjunto $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$ também temos que considerar dois casos,

i. O conjunto $\{B < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) = h(B) \implies e^{-B} + 0.1B - 2.5e^{-(B+\tau)} - 0.25(B + \tau) = 1.25h(B).$$

ii. O conjunto $\{B \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso resolvemos,

$$2\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) = h(B) \implies e^{-B} + 0.1B - 1.25e^{-(B+\tau)} - 0.125(B + \tau) = 0.625h(B).$$

A seguir, as soluções para $\tilde{r}(B) - r(B + \tau) = h(B)$ para valores distintos de τ .

τ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\tilde{B}^*$	0.600	0.678	0.665	0.615	0.549	0.477	0.405	0.334

A seguir, as soluções para $2\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) = h(B)$ para valores distintos de τ ,

τ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\tilde{B}^*$	0.847	0.890	0.846	0.771	0.685	0.596	0.508	0.425

No caso $\tilde{r}(B) - 2r(B + \tau) = h(B)$, temos que $\tilde{B}^* = 0$ para todo $\tau \geq 0$, pois a função $\tilde{r}(t) - 2r(t)$ é negativa para todo $t \geq 0$, como podemos observar na figura 5.

7 Problema 4

Suponha que o processo de falha de um sistema coerente de tempo de vida ζ , formado por m componentes com tempos de vida T_i , $i = 1, \dots, m$, apresenta dois possíveis tipos de falhas na idade t : falha do tipo I, reparável minimamente, isto é, reconstitui-se a sua taxa de falha à condição imediatamente anterior à falha, e falha do tipo II a qual é catastrófica e portanto não reparável. Seja $V_t = 0, 1$ a variável indicadora para o tipo de falha observada em t (0 se a falha é do tipo I e 1 se a falha é do tipo II). Neste caso, consideramos a filtragem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{F}_t = \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, \dots, m, V_s = 0, 1, 0 \leq s \leq t \right\}. \quad (53)$$

A $\mathcal{F}_t$ -intensidade de ζ é dada por $\lambda_t = \lambda_t^I + \lambda_t^{II}$, com λ_t^I e λ_t^{II} a $\mathcal{F}_t$ -intensidade das falhas do tipo I e II, respectivamente. Seja τ o tempo até a primeira falha do tipo II de um sistema novo. Suponha que τ é um $\mathcal{F}_t$ tempo de parada totalmente inacessível. Logo, o número de falhas do tipo I para o processo parado em τ é dado por,

$$N_{t \wedge \tau}^I = \int_0^t 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds + M_{t \wedge \tau}^I, \quad M_{t \wedge \tau}^I \in \mathcal{M}_0, U.I., \quad E \left\{ \int_0^t 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds \right\} < \infty, \forall t \geq 0, \quad (54)$$

enquanto que o processo $1_{\{\tau \leq t\}}$ tem a representação semimartingal regular dada por

$$1_{\{\tau \leq t\}} = \int_0^t 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds + M_{t \wedge \tau}^{II}, \quad M_{t \wedge \tau}^{II} \in \mathcal{M}_0, U.I., \quad E \left\{ \int_0^t 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds \right\} < \infty, \forall t \geq 0. \quad (55)$$

Suponha que um sistema é submetido a um procedimento de burn-in com período fixo b . As falhas do tipo I observadas durante este período são reparadas minimamente a um custo C_0 . Se a primeira falha do tipo II acontece antes de concluir o período de burn-in, então ocorre um custo de $C_1 > C_0$, e outra unidade é submetida ao mesmo procedimento. Este processo é repetido até obter o primeiro sistema que sobrevive ao tempo de burn-in b sem falhas do tipo II. Além dos custos por falha durante o burn-in, tem-se um custo fixo de manufatura e de burn-in por unidade de C_{mb} . O sistema com burn-in resultante do processo anterior é colocado em operação por um período adicional de comprimento δ . As falhas do tipo I são reparadas minimamente, a um custo de $C + C_0$, até completar o tempo de missão ou até a primeira falha do tipo II, o que acontecer primeiro. Uma falha do tipo

II durante o tempo de missão produz um custo de $C + C_1$. Se o sistema sobrevive o tempo de missão sem experimentar falha do tipo II, obtém-se um ganho de K .

7.1 Custo esperado devido ao burn-in

Considere a sequência de tempos até a primeira falha do tipo II, τ_i , $i \geq 1$, dos sistemas submetidos ao procedimento até o primeiro tempo que sobrevive ao tempo de burn-in b sem experimentar falha do tipo II. Em função desta sequência o custo devido ao burn-in pode-se escrever como

$$B^r(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} 1_{\{\tau_i \leq b\}} \cdot [C_{mb} + C_0 \cdot N_{b \wedge \tau_n}^I + C_1 \cdot 1_{\{\tau_n \leq b\}}], \quad (56)$$

com a convenção $\prod_{i=1}^{n-1} (\bullet) \equiv 1$, para $n = 1$. Como as variáveis τ_i representam os tempos até a primeira falha do tipo II para sistemas independentes, a sequência τ_i , $i \geq 1$ é uma sequência de variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Sejam $\lambda_i^I(i)$ e $\lambda_i^{II}(i)$ os processos de intensidade das falhas do tipo I e II respectivamente, do i -ésimo sistema submetido ao burn-in. Se $\lambda_i^I(i) = \lambda_i^I$ e $\lambda_i^{II}(i) = \lambda_i^{II}$, $\forall i \geq 1$ e os τ_i são tempos de parada totalmente inacessíveis, então, $P(\tau_i \leq t) = F_\tau(t)$, $\forall t \geq 0$ é absolutamente contínua com função de taxa de falha ordinária $r_\tau(t) = \frac{dF_\tau(t)}{dt} / \bar{F}_\tau(t)$, $t \geq 0$, e função de sobrevivência $\bar{F}_\tau(t) = P(\tau > t)$, $t \geq 0$. Sob estas condições o custo esperado do processo de burn-in é igual a, $v^r(b) = E[B^r(b)]$,

$$\begin{aligned} v^r(b) &= E\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} 1_{\{\tau_i \leq b\}} \cdot [C_{mb} + C_0 \cdot N_{b \wedge \tau_n}^I + C_1 \cdot 1_{\{\tau_n \leq b\}}] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} P(\tau_i \leq b) \cdot E[C_{mb} + C_0 \cdot N_{b \wedge \tau_n}^I + C_1 \cdot 1_{\{\tau_n \leq b\}}] \\ &= E[C_{mb} + C_0 \cdot N_{b \wedge \tau}^I + C_1 \cdot 1_{\{\tau \leq b\}}] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [F_\tau(b)]^{n-1} \\ &= \frac{E[C_{mb} + C_0 \cdot N_{b \wedge \tau}^I + C_1 \cdot 1_{\{\tau \leq b\}}]}{\bar{F}_\tau(b)}. \end{aligned} \quad (57)$$

De (57) é claro que sob as condições de independência e mesma distribuição, o custo esperado para obter uma unidade com burn-in é proporcional ao custo esperado para um

ciclo de burn-in (até a primeira falha do tipo II ou até o tempo b , o que acontecer primeiro) de um sistema com o processo de intensidade de falha $\lambda_t = \lambda_t^I + \lambda_t^{II}$.

7.2 Custos e ganho esperado devido ao período adicional de operação

7.2.1 Custo por reparos mínimos

O número de reparos mínimos durante o período adicional de operação δ , após o burn-in, corresponde ao processo $\tilde{N}_\delta^I$ dado por

$$\tilde{N}_\delta^I = [N_{(b+\delta)\wedge\tau}^I - N_{b\wedge\tau}^I | \tau > b]. \quad (58)$$

Então, pela definição de esperança condicional, (54) e (58), temos que o custo esperado devido a reparos mínimos no período adicional de operação é

$$\begin{aligned} C^I(\delta, b) &= (C + C_0) \cdot E[(N_{(b+\delta)\wedge\tau}^I - N_{b\wedge\tau}^I) \cdot 1_{\{\tau > b\}}] / P(\tau > b) \\ &= (C + C_0) \cdot \left\{ \frac{E\left[\int_b^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds \cdot 1_{\{\tau > b\}}\right]}{\bar{F}_\tau(b)} + \frac{E[(M_{(b+\delta)\wedge\tau}^I - M_{b\wedge\tau}^I) \cdot 1_{\{\tau > b\}}]}{\bar{F}_\tau(b)} \right\} \quad (59) \end{aligned}$$

Para simplificar (59) observe que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > s, b < s \leq b + s\} \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > b\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > s, b < s \leq b + s\}$, assim,

$$\frac{E\left[\int_b^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds \cdot 1_{\{\tau > b\}}\right]}{\bar{F}_\tau(b)} = \frac{E\left[\int_b^{b+\tau} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds\right]}{\bar{F}_\tau(b)}. \quad (60)$$

Sob a filtragem dada em (53), o primeiro tempo de falha do tipo II, τ , é um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada, portanto, para $t = b$, o evento $\{\tau > b\} \in \mathcal{F}_b$. Além disso, o processo $M^I = (M_t^I)_{t \geq 0}$ é um $\mathcal{F}_t$ -martingal uniformemente integrável e portanto, pelo teorema de amostragem opcional e pela propriedade martingal, temos que $E[M_{(b+\delta)\wedge\tau}^I \cdot 1_A] = E[M_{b\wedge\tau}^I \cdot 1_A]$, $\forall A \in \mathcal{F}_b$. Em particular, para $A = \{\tau > b\} \in \mathcal{F}_b$,

$$E[M_{(b+\delta)\wedge\tau}^I \cdot 1_{\{\tau > b\}}] = E[M_{b\wedge\tau}^I \cdot 1_{\{\tau > b\}}] \implies E[(M_{(b+\delta)\wedge\tau}^I - M_{b\wedge\tau}^I) \cdot 1_{\{\tau > b\}}] = 0. \quad (61)$$

Substituindo (60) e (61) em (59), obtemos,

$$C^I(\delta, b) = (C + C_0) \cdot \frac{E\left[\int_b^{b+\tau} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds\right]}{\bar{F}_\tau(b)} = (C + C_0) \cdot \frac{E[N_{(b+\delta)\wedge\tau}^I - N_{b\wedge\tau}^I]}{\bar{F}_\tau(b)}. \quad (62)$$

7.2.2 Custo por falha de tipo II e ganho por sobrevivência sem falha do tipo II

O custo por falha do tipo II durante o tempo de operação adicional de um sistema com burn-in, é igual a $(C + C_1) \cdot (1_{\{\tau \leq b+\delta\}} | \tau > b)$, com valor esperado igual a

$$C^{II}(\delta, b) = \frac{E[(C + C_1) \cdot 1_{\{\tau \leq b+\delta\}} \cdot 1_{\{\tau > b\}}]}{P(\tau > b)} = \frac{E[(C + C_1) \cdot 1_{\{\tau \leq b+\delta\}}] - (C + C_1) \cdot 1_{\{\tau \leq b\}}]}{\bar{F}_\tau(b)}, \quad (63)$$

enquanto que o ganho por sobrevivência ao tempo de missão sem falhas do tipo II é igual a $K \cdot (1_{\{\tau > b+\delta\}} | \tau > b)$, com valor esperado igual a

$$\begin{aligned} G^{II}(\delta, b) &= \frac{E[K \cdot 1_{\{\tau > b+\delta\}} \cdot 1_{\{\tau > b\}}]}{P(\tau > b)} = \frac{E[K \cdot 1_{\{\tau > b\}}] - K \cdot 1_{\{b < \tau \leq b+\delta\}}]}{\bar{F}_\tau(b)} \\ &= K - \frac{E[K \cdot 1_{\{\tau \leq b+\delta\}}] - K \cdot 1_{\{\tau \leq b\}}]}{\bar{F}_\tau(b)}. \end{aligned} \quad (64)$$

7.3 Função de otimização

Seja

$$C_\tau^F = \left\{ B \geq 0 : B \text{ é } \mathcal{F}_t\text{-tempo de parada, } B + \delta \leq \tau, E[\tau] < \infty, E[B] < \infty \right\}. \quad (65)$$

Queremos achar o $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada $\tilde{B}^{**} \in C_\tau^F$ que maximize a função $U^\tau(\delta, B) = G^{II}(\delta, B) - C^I(\delta, B) - C^{II}(\delta, B) - v^\tau(B)$, que por (57), (62), (63) e (64), é igual a

$$\begin{aligned} U^\tau(\delta, B) &= K + E \left[\frac{-C_{mb} + (K + C) \cdot 1_{\{\tau \leq B\}} - (K + C + C_1) \cdot 1_{\{\tau \leq B+\delta\}}}{\bar{F}_\tau(B)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C \cdot N_{B \wedge \tau}^I - (C + C_0) \cdot N_{(B+\delta) \wedge \tau}^I}{\bar{F}_\tau(B)} \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Antes de analisar a solução ótima deste problema, vamos considerar primeiro o processo definido por

$$Y_b^\delta = N_{b \wedge \tau}^I - N_{(b+\delta) \wedge \tau}^I + 1_{\{\tau \leq b\}} - 1_{\{\tau \leq b+\delta\}}. \quad (67)$$

Suponha que desejamos achar $B^* \in C_\tau^F$ tal que $E[Y_{B^*}^\delta] = \sup_{B \in C_\tau^F} E[Y_B^\delta]$. Para isto usaremos a representação semimartingal regular de Y_b^δ . Supondo que τ é um tempo de parada

totalmente inacessível, por (54) e (55) temos que

$$\begin{aligned}
Y_b^\delta &= \int_0^b 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds - \int_0^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds + \int_0^b 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds - \int_0^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds + \\
&\quad + M_{b \wedge \tau}^I - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^I + M_{b \wedge \tau}^{II} - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^{II} \\
&= - \left[\int_0^\delta 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds + M_{\delta \wedge \tau}^I \right] - \left[\int_0^\delta 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds + M_{\delta \wedge \tau}^{II} \right] + \int_0^b 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds - \int_\delta^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds + \\
&\quad + \int_0^b 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds - \int_\delta^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds + M_{b \wedge \tau}^I + M_{b \wedge \tau}^{II} + \\
&\quad + (M_{\delta \wedge \tau}^I - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^I) + (M_{\delta \wedge \tau}^{II} - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^{II}) \\
&= Y_0^\delta + \int_0^b [f_s^I + f_s^{II}] ds + M_b^\delta, \quad M_b^\delta \in \mathcal{M}_0, U.I., \tag{68}
\end{aligned}$$

onde $Y_0^\delta = -N_{\delta \wedge \tau}^I - 1_{\{\tau \leq \delta\}}$, o martingal $M_b^\delta = M_{b \wedge \tau}^I + M_{b \wedge \tau}^{II} + (M_{\delta \wedge \tau}^I - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^I) + (M_{\delta \wedge \tau}^{II} - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^{II})$, e os processos f_s^I e f_s^{II} , são iguais a,

$$f_s^I = 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I - 1_{\{\tau > s+\delta\}} \lambda_{s+\delta}^I, \quad f_s^{II} = 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} - 1_{\{\tau > s+\delta\}} \lambda_{s+\delta}^{II}. \tag{69}$$

Para $B \in C_\tau^F$, $\tau > B + \delta$, e portanto, para todo $0 \leq s \leq B$, $\tau > s + \delta$, $\tau > s$, logo, os processos f_s^I e f_s^{II} , simplificam para,

$$f_s^I = \lambda_s^I - \lambda_{s+\delta}^I, \quad f_s^{II} = \lambda_s^{II} - \lambda_{s+\delta}^{II}, \tag{70}$$

e

$$\sup_{B \in C_\tau^F} E[Y_B^\delta] = E[Y_0^\delta] + \sup_{B \in C_\tau^F} E \left\{ \int_0^B [(\lambda_s^I - \lambda_{s+\delta}^I) + (\lambda_s^{II} - \lambda_{s+\delta}^{II})] ds \right\}, \tag{71}$$

Teorema 7.3.1. Suponha que os processos de intensidade dos tipos de falha I e II tem a forma de banheira com tempos de mudança, $0 \leq S_1^I \leq S_2^I$, $0 \leq S_1^{II} \leq S_2^{II}$, respectivamente, tais que $S_1 = \max\{S_1^I, S_1^{II}\} \leq S_2 = \min\{S_2^I, S_2^{II}\}$, e $\lambda_0^I < \lambda_\infty^I = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t^I$, $\lambda_0^{II} < \lambda_\infty^{II} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t^{II}$. Então o tempo ótimo de burn-in $B^* \in C_\tau^F$ que maximiza $E[Y_B^\delta]$ é tal que,

$$i. \quad B^* = \inf\{B \in C_\tau^F : f_B^I + f_B^{II} \leq 0\} = \inf\{B \in C_\tau^F : \lambda_B - \lambda_{B+\delta} \leq 0\}, \text{ e}$$

$$ii. \quad B^* \leq S_1.$$

Prova. i. Da hipótese e pela definição 2.0.5, temos que $\lambda_t = \lambda_t^I + \lambda_t^{II}$ é não crescente P-q.c. se $0 \leq t \leq S_1$; é constante P-q.c. se $S_1 \leq t \leq S_2$, e não decrescente P-q.c. se $t \geq S_2$; logo, pela mesma definição 2.0.5, o processo de intensidade $\lambda_t = \lambda_t^I + \lambda_t^{II}$ tem também a forma de banheira com tempos de mudança $0 \leq S_1 \leq S_2$. Além disso, $\lambda_0 = \lambda_0^I + \lambda_0^{II} < \lambda_\infty^I + \lambda_\infty^{II} = \lambda_\infty$, e então, pelo teorema 4.0.1 o processo $\lambda_t - \lambda_{t+\delta} = (\lambda_t^I - \lambda_{t+\delta}^I) + (\lambda_t^{II} - \lambda_{t+\delta}^{II})$ satisfaz o caso monótono. Como o martingal M_b^δ uniformemente integrável, a regra ILA dada por

$$B^* = \inf\{B \in C_\tau^F : f_B^I + f_B^{II} \leq 0\} = \inf\{B \in C_\tau^F : \lambda_B - \lambda_{B+\delta} \leq 0\}$$

é tal que

$$\sup_{B \in C_\tau^F} E[Y_B^\delta] = E[Y_0^\delta] + E\left\{\int_0^{B^*} [(\lambda_s^I - \lambda_{s+\delta}^I) + (\lambda_s^{II} - \lambda_{s+\delta}^{II})] ds\right\} = E[Y_{B^*}^\delta].$$

ii. pelos mesmos argumentos usados na prova do teorema 4.0.1, conclui-se que $B^* \leq S_1$. ■

Nota 7.3.1. Se ζ é o tempo de vida de um sistema coerente com intensidade de falha $\lambda_t = \lambda_t^I + \lambda_t^{II}$, e τ é o tempo até a primeira falha do tipo II deste sistema, temos que $\{\zeta > t\} \subseteq \{\tau > t\}$, e portanto, podemos considerar as condições do teorema 4.0.1 para a prova do teorema 7.3.1.

Considere o processo $\tilde{Y}_b^\delta$ dado por

$$\tilde{Y}_b^\delta = -C_{mb} + (K+C) \cdot 1_{\{\tau \leq b\}} - (K+C+C_1) \cdot 1_{\{\tau \leq b+\delta\}} + C \cdot N_{b \wedge \tau}^I - (C+C_0) \cdot N_{(b+\delta) \wedge \tau}^I. \quad (72)$$

Se τ é um $\mathcal{F}_t$ -tempo de parada, então por (54) e (55), obtemos que a representação semi-martingal regular de $\tilde{Y}_b^\delta$ é,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_b^\delta &= -C_{mb} + \int_0^b 1_{\{\tau > s\}} (K+C) \lambda_s^{II} ds - \int_0^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} (K+C+C_1) \lambda_s^{II} ds + \\ &\quad + \int_0^b 1_{\{\tau > s\}} C \lambda_s^I ds - \int_0^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}} (C+C_0) \lambda_s^I ds + C \cdot M_{b \wedge \tau}^I - (C+C_0) \cdot M_{(b+\delta) \wedge \tau}^I + \\ &\quad + (K+C) \cdot M_{b \wedge \tau}^{II} - (K+C+C_1) \cdot M_{(b+\delta) \wedge \tau}^{II} \\ &= -C_{mb} - (C+C_0) \cdot \left[\int_0^\delta 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^I ds + M_{\delta \wedge \tau}^I \right] - (K+C+C_1) \cdot \left[\int_0^\delta 1_{\{\tau > s\}} \lambda_s^{II} ds + M_{\delta \wedge \tau}^{II} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^b 1_{\{\tau > s\}}(K + C)\lambda_s^\Pi ds - \int_\delta^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}}(K + C + C_1)\lambda_s^\Pi ds + \\
& + \int_0^b 1_{\{\tau > s\}}C\lambda_s^I ds - \int_\delta^{b+\delta} 1_{\{\tau > s\}}(C + C_0)\lambda_s^I ds + C \cdot M_{b \wedge \tau}^I + (K + C) \cdot M_{b \wedge \tau}^\Pi + \\
& + (C + C_0) \cdot [M_{\delta \wedge \tau}^I - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^I] + (K + C + C_1) \cdot [M_{\delta \wedge \tau}^\Pi - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^\Pi] \\
& = \tilde{Y}_0^\delta + \int_0^b [\tilde{f}_s^I + \tilde{f}_s^\Pi] ds + \tilde{M}_b^\delta, \quad \tilde{M}_b^\delta \in \mathcal{M}_0, U.I., \tag{73}
\end{aligned}$$

onde, $\tilde{Y}_0^\delta = -C_{mb} - (C + C_0)N_{\delta \wedge \tau}^I - (K + C + C_1)1_{\{\tau \leq \delta\}}$, $E|\tilde{Y}_0^\delta| < \infty$, o martingal $\tilde{M}_b^\delta = C \cdot M_{b \wedge \tau}^I + (K + C) \cdot M_{b \wedge \tau}^\Pi + (C + C_0) \cdot [M_{\delta \wedge \tau}^I - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^I] + (K + C + C_1) \cdot [M_{\delta \wedge \tau}^\Pi - M_{(b+\delta) \wedge \tau}^\Pi]$, e os processos $\tilde{f}_s^I$ e $\tilde{f}_s^\Pi$ são iguais a,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_s^I &= 1_{\{\tau > s\}}C\lambda_s^I - 1_{\{\tau > s+\delta\}}(C + C_0)\lambda_{s+\delta}^I, \quad \tilde{f}_s^\Pi = 1_{\{\tau > s\}}(K + C)\lambda_s^\Pi - 1_{\{\tau > s+\delta\}}(K + C + C_1)\lambda_{s+\delta}^\Pi.
\end{aligned} \tag{74}$$

Para $B \in C_\tau^F$ estes dois processos simplificam para

$$\tilde{f}_s^I = C\lambda_s^I - (C + C_0)\lambda_{s+\delta}^I, \quad \tilde{f}_s^\Pi = (K + C)\lambda_s^\Pi - (K + C + C_1)\lambda_{s+\delta}^\Pi \tag{75}$$

Logo, Para $B \in C_\tau^F$,

$$E[\tilde{Y}_B^\delta] = E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^B [C\lambda_s^I - (C + C_0)\lambda_{s+\delta}^I + (K + C)\lambda_s^\Pi - (K + C + C_1)\lambda_{s+\delta}^\Pi] ds\right\}. \tag{76}$$

Seja $m_s = C\lambda_s^I - (C + C_0)\lambda_{s+\delta}^I + (K + C)\lambda_s^\Pi - (K + C + C_1)\lambda_{s+\delta}^\Pi$, isto é, $m_s = \tilde{f}_s^I + \tilde{f}_s^\Pi$, em $\{\tau > B + \delta\}$, e $0 \leq s \leq B$. Por manipulação algébrica, temos,

$$m_s = (C + C_0)(\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\delta}) + (K + C_1 - C_0)(\tilde{\lambda}_s^\Pi - \lambda_{s+\delta}^\Pi), \tag{77}$$

onde, $\lambda_{s+\delta} = \lambda_{s+\delta}^I + \lambda_{s+\delta}^\Pi$, $\tilde{\lambda}_s = \left(\frac{C}{C+C_0}\right)(\lambda_s^I + \lambda_s^\Pi) = \left(\frac{C}{C+C_0}\right)\lambda_s$, $\tilde{\lambda}_s^\Pi = \left(\frac{K}{K+C_1-C_0}\right)\lambda_s^\Pi$, e $K + C_1 - C_0 > 0$.

Teorema 7.3.2. Sob as condições no teorema 7.3.1, o tempo ótimo de burn-in $\tilde{B}^* \in C_\tau^F$ que maximiza $E[\tilde{Y}_B^\delta]$ é tal que,

$$i. \quad \tilde{B}^* = \inf\{B \in C_\tau^F : (C + C_0)(\tilde{\lambda}_B - \lambda_{B+\delta}) + (K + C_1 - C_0)(\tilde{\lambda}_B^\Pi - \lambda_{B+\delta}^\Pi) \leq 0\}, \text{ e}$$

- ii. $\min\{\tilde{B}^*, \tilde{B}^{II*}\} \leq \tilde{B}^* \leq \max\{\tilde{B}^*, \tilde{B}^{II*}\} \leq S_1$, onde, $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_\tau^F : \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\delta}\} \leq B^* \leq S_1$, com B^* e S_1 como foram definidos no teorema 7.3.1, enquanto que $\tilde{B}^{II*} = \inf\{B \in C_\tau^F : \tilde{\lambda}_B^{II} \leq \lambda_{B+\delta}^{II}\} \leq S_1^{II}$.

Prova. i. Do teorema 4.0.2 e pelas condições dadas no teorema 7.3.1 temos que o processo $\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\delta}$ satisfaz o caso monótono e a regra ILA $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_\tau^F : \tilde{\lambda}_B \leq \lambda_{B+\delta}\}$ é tal que

$$\sup_{B \in C_\tau^F} E\left\{\int_0^B [\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\delta}] ds\right\} = E\left\{\int_0^{\tilde{B}^*} [\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\delta}] ds\right\},$$

e $\tilde{B}^* \leq B^* \leq S_1$, com B^* e S_1 como foram definidos no teorema 7.3.1.

Similarmente, também do teorema 4.0.2 e sob as condições dadas no teorema 7.3.1 temos que o processo $\tilde{\lambda}_s^{II} - \lambda_{s+\delta}^{II}$ satisfaz o caso monótono e a regra ILA $\tilde{B}^{II*} = \inf\{B \in C_\tau^F : \tilde{\lambda}_B^{II} \leq \lambda_{B+\delta}^{II}\}$ é tal que

$$\sup_{B \in C_\tau^F} E\left\{\int_0^B [\tilde{\lambda}_s^{II} - \lambda_{s+\delta}^{II}] ds\right\} = E\left\{\int_0^{\tilde{B}^{II*}} [\tilde{\lambda}_s^{II} - \lambda_{s+\delta}^{II}] ds\right\},$$

e $\tilde{B}^{II*} \leq S_1^{II} \leq \max\{S_1^I, S_1^{II}\} = S_1$.

Como os processos $\tilde{\lambda}_s - \lambda_{s+\delta}$ e $\tilde{\lambda}_s^I - \lambda_{s+\delta}^{II}$ satisfazem o caso monótono, então o processo m_s em (77) é também monótono, isto é, para todo $\omega \in \Omega$, existe $B \in C_\tau^F$, tal que $\forall_{s \geq B, h \geq 0}$, $\{m_s \leq 0\} \subseteq \{m_{s+h} \leq 0\}$ e $\bigcup_{s \geq 0} \{m_s \leq 0\} = \Omega$. Logo, com o martingal $\tilde{M}_B^\delta$ em (73) uniformemente integrável, a regra ILA dada por

$$\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_\tau^F : m_B \leq 0\} = \inf\{B \in C_\tau^F : (C+C_0)(\tilde{\lambda}_B - \lambda_{B+\delta}) + (K+C_1-C_0)(\tilde{\lambda}_B^{II} - \lambda_{B+\delta}^{II}) \leq 0\},$$

é tal que

$$\sup_{B \in C_\tau^F} E[\tilde{Y}_B^\delta] = E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^{\tilde{B}^*} [C\lambda_s^I - (C+C_0)\lambda_{s+\delta}^I + (K+C)\lambda_s^{II} - (K+C+C_1)\lambda_{s+\delta}^{II}] ds\right\} = E[\tilde{Y}_{\tilde{B}^*}^\delta].$$

ii. Sejam $\tilde{B}_1 = \min\{\tilde{B}^*, \tilde{B}^{II*}\}$ e $\tilde{B}_2 = \max\{\tilde{B}^*, \tilde{B}^{II*}\}$. Seja $0 \leq B < \tilde{B}_1$, isto é, $B < \tilde{B}^*$ e $B < \tilde{B}^{II*}$, então, pela definição de $\tilde{B}^*$ e de $\tilde{B}^{II*}$, $\tilde{\lambda}_B - \lambda_{B+\delta} > 0$ e $\tilde{\lambda}_B^I - \lambda_{B+\delta}^{II} > 0$, assim, para todo $B < \tilde{B}_1$, $m_B > 0$, portanto $\tilde{B}^* \geq \tilde{B}_1$. Suponha que $\tilde{B}^* > \tilde{B}_2$, então pela definição de $\tilde{B}^*$, teríamos que $m_{\tilde{B}_2} > 0$. Embora, como $\tilde{B}_2 \geq \tilde{B}^*$ e $\tilde{B}_2 \geq \tilde{B}^{II*}$, então $\tilde{\lambda}_{\tilde{B}_2} - \lambda_{\tilde{B}_2+\delta} \leq 0$

e $\bar{\lambda}_{\bar{B}_2}^I - \lambda_{\bar{B}_2+\delta}^{\Pi} \leq 0$, portanto, $m_{\bar{B}_2} \leq 0$, isto contradiz o resultado anterior derivado da suposição $\bar{B}^* > \bar{B}_2$, logo, conclui-se que $\bar{B}^* \leq \bar{B}_2$. ■

Voltamos de novo ao problema de maximização da função dada em (66). Para isto definimos o processo $\tilde{Z}_b^\delta = \frac{1}{\bar{F}_\tau(b)} \cdot \tilde{Y}_b^\delta$, e supomos que $[\bar{F}_\tau(b)]^{-1}$ é uma função absolutamente contínua e de variação limitada em $[0, b]$. Pela fórmula de integração por partes para integrais de Stieltjes e de (73), obtemos,

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_b^\delta &= \frac{1}{\bar{F}_\tau(0)} \tilde{Y}_0^\delta + \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\tau(s^-)} d\tilde{Y}_s^\delta + \int_0^b \tilde{Y}_s^\delta d\left(\frac{1}{\bar{F}_\tau(s)}\right) \\ &= \tilde{Y}_0^\delta + \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [\bar{f}_s^I + \bar{f}_s^{\Pi}] ds + \int_0^b \tilde{Y}_s^\delta \frac{r_\tau(s)}{\bar{F}_\tau(s)} ds + \tilde{R}_b^\delta,\end{aligned}\quad (78)$$

onde o martingal $\tilde{R}_b^\delta = \int_0^b \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} d\tilde{M}_s^\delta$ é um martingal de média zero e limitado em L^2 (portanto uniformemente integrável). De (66) e (72) é claro que $U^\tau(\delta, B) = K + E[\tilde{Z}_B^\delta]$. Para $B \in C_\tau^F$ a representação semimartingal regular de $\tilde{Z}_B^\delta$ dada em (78), simplifica para,

$$\tilde{Z}_B^\delta = \tilde{Y}_0^\delta + \int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - r_\tau(s) \tilde{g}_s] ds + \tilde{R}_B^\delta, \quad (79)$$

onde m_s , é como em (77) e

$$\tilde{g}_s = C_{mb} + (C + C_0) \cdot N_{s+\delta}^I - C \cdot N_s^I. \quad (80)$$

Logo,

$$\sup_{B \in C_\tau^F} U^\tau(\delta, B) = K + \sup_{B \in C_\tau^F} E[\tilde{Z}_B^\delta] = K + E[\tilde{Y}_0^\delta] + \sup_{B \in C_\tau^F} E\left\{\int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - r_\tau(s) \tilde{g}_s] ds\right\}. \quad (81)$$

Nota 7.3.2. Observe que o processo $\tilde{g}_s > 0, \forall s \geq 0$, P-q.c. e $\tilde{g}_s > C_{mb}$, portanto

$$E[\tilde{Z}_B^\delta] \leq E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\}, \quad \forall B \geq 0$$

assim,

$$\sup_{B \in C_\tau^F} E[\tilde{Z}_B^\delta] \leq E[\tilde{Y}_0^\delta] + \sup_{B \in C_\tau^F} E\left\{\int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\} \quad (82)$$

Nota 7.3.3. Seja $\hat{B}^{**} \in C_\tau^F$ tal que,

$$E\left\{\int_0^{\hat{B}^{**}} \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\} = \sup_{B \in C_\tau^F} E\left\{\int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\}.$$

Pela definição de $\sup_{B \in C_\tau^F} E[\tilde{Z}_B^\delta]$ temos que,

$$E[\tilde{Z}_{\hat{B}^{**}}^\delta] = E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^{\hat{B}^{**}} \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - r_\tau(s) \tilde{g}_s] ds\right\} \leq \sup_{B \in C_\tau^F} E[\tilde{Z}_B^\delta]. \quad (83)$$

Nota 7.3.4. Se além, $\hat{B}^{**} = \inf\{B \in C_\tau^F : m_B - C_{mb} \cdot r_\tau(B) \leq 0\}$ e tal que $\forall_{s \geq \hat{B}^{**}, h \geq 0}$ $\{m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s) \leq 0\} \subseteq \{m_{s+h} - C_{mb} \cdot r_\tau(s+h) \leq 0\}$, e $\bigcup_{s \geq 0} \{m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s) \leq 0\} = \Omega$, então também para todo $s > \hat{B}^{**}$, $m_s - r_\tau(s) \tilde{g}_s \leq 0$. Logo,

$$E\left\{\int_{\hat{B}^{**}}^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - r_\tau(s) \tilde{g}_s] ds\right\} < 0, \forall_{B > \hat{B}^{**}}, \text{ e portanto,}$$

$$\begin{aligned} E[\tilde{Z}_{\hat{B}^{**}}^\delta] &= E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^{\hat{B}^{**}} \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - r_\tau(s) \tilde{g}_s] ds\right\} > \\ &E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - r_\tau(s) \tilde{g}_s] ds\right\} = E[\tilde{Z}_B^\delta], \forall_{B > \hat{B}^{**}} \end{aligned} \quad (84)$$

Teorema 7.3.3. Suponha que os processos de intensidade das falhas do tipo I e II são como no teorema 7.3.1. Seja $\hat{B}^{**} = \inf\{B \in C_\tau^F : m_B - C_{mb} \cdot r_\tau(B) \leq 0\}$.

i. Se

$$\begin{aligned} \{m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s) \leq 0\} &\subseteq \{m_{s+h} - C_{mb} \cdot r_\tau(s+h) \leq 0\} \forall_{s \geq \hat{B}^{**}, h \geq 0}, \\ \bigcup_{s \geq 0} \{m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s) \leq 0\} &= \Omega, \end{aligned} \quad (85)$$

então $\hat{B}^{**}$ é tal que

$$E\left\{\int_0^{\hat{B}^{**}} \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\} = \sup_{B \in C_\tau^F} E\left\{\int_0^B \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\}. \quad (86)$$

ii. Sob (85),

$$E[\tilde{Z}_{\hat{B}^{**}}^\delta] \leq \sup_{B \in C_\tau^F} E[\tilde{Z}_B^\delta] \leq E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^{\hat{B}^{**}} \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\}. \quad (87)$$

iii. Seja $\tilde{B}^{**} \in C_\tau^F$, tal que

$$U^\tau(\delta, \tilde{B}^{**}) = \sup_{B \in C_\tau^F} U^\tau(\delta, B) = K + \sup_{B \in C_\tau^F} E[\tilde{Z}_B^\delta] = K + E[\tilde{Z}_{\tilde{B}^{**}}^\delta]. \quad (88)$$

Sob (85), $\tilde{B}^{**} \leq \hat{B}^{**} \leq \tilde{B}^*$, com $\tilde{B}^*$ como foi definido no teorema 7.3.2.

Prova. i. Do teorema 7.3.2, sob as condições no teorema 7.3.1, o processo m_s dado em (77) satisfaz o caso monótono. Além disso, se a condição em (85) é satisfeita, então o processo $m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)$ também satisfaz o caso monótono e portanto também o processo $(m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)) / \bar{F}_\tau(s)$. Logo, com o martingal $\tilde{R}_t^\delta$ em (78) uniformemente integrável, a regra de parada ILA definida por $\hat{B}^{**}$ satisfaz (86).

ii. O resultado segue de i. e das desigualdades em (82) e (83).

iii. Da definição de $\hat{B}^{**}$, para todo $0 \leq B < \hat{B}^{**}$, $m_B - C_{mb} \cdot r_\tau(s) > 0$, portanto, para todo $0 \leq B < \hat{B}^{**}$, $m_B > 0$ (pois $r_\tau(s) > 0, \forall s \geq 0$). Suponha que $\tilde{B}^* < \hat{B}^{**}$; então do argumento anterior, $m_{\tilde{B}^*} > 0$, mas da definição de $\tilde{B}^*$ resulta que $m_{\tilde{B}^*} \leq 0$, logo é falso que $\tilde{B}^* < \hat{B}^{**}$, e portanto $\hat{B}^{**} \leq \tilde{B}^*$. Suponha também que $\tilde{B}^{**} > \hat{B}^{**}$. Sob tal suposição, da desigualdade em (84) teríamos que $E[\tilde{Z}_{\tilde{B}^{**}}^\delta] > E[\tilde{Z}_{\hat{B}^{**}}^\delta]$, o qual contradiz (88). Portanto $\tilde{B}^{**} \leq \hat{B}^{**}$. Em resumo, $\tilde{B}^{**} \leq \hat{B}^{**} \leq \tilde{B}^*$. ■

Nota 7.3.5. Sob as condições do teorema anterior, temos que

$$K + E[\tilde{Z}_{\hat{B}^{**}}^\delta] \leq U^r(\delta, \hat{B}^{**}) \leq K + E[\tilde{Y}_0^\delta] + E\left\{\int_0^{\hat{B}^{**}} \frac{1}{\bar{F}_\tau(s)} [m_s - C_{mb} \cdot r_\tau(s)] ds\right\} \quad (89)$$

onde $\tilde{B}^{**} \leq \hat{B}^{**}$.

7.4 Exemplo

Seja ζ o tempo de vida de um sistema coerente de dois componentes em paralelo, isto é, $\zeta = T_1 \vee T_2$, onde os tempos de vida dos componentes, T_1 e T_2 são definidos por $T_1 = Z_1 \wedge Z_{12}$, $T_2 = Z_2 \wedge Z_{12}$, com Z_1, Z_2, Z_{12} variáveis aleatórias iid com função de taxa de falha $r(t) = e^{-t} + 0.1t$, $t \geq 0$. A $\mathcal{F}_t$ intensidade de ζ é, $\lambda_t = r(t) + r(t)1_{\{T_1 \wedge T_2 \leq t < T_1 \vee T_2\}}$. Uma falha do tipo II acontece quando o sistema em operação é atingido por um choque associado a Z_{12} , e uma falha do tipo I quando a falha é causada pelos choques associados às variáveis Z_1 e Z_2 , então τ , o tempo da primeira falha do tipo II, é igual a Z_{12} , e enquanto

$Z_{12} > t$, as falhas do sistema são do tipo I. Assim, temos que,

$$\lambda_t^I 1_{\{Z_{12} > t\}} = r(t) 1_{\{Z_{12} > t\}} [1_{\{Z_1 \leq t, Z_2 > t\}} + 1_{\{Z_1 > t, Z_2 \leq t\}}], \text{ e } \lambda_t^{II} 1_{\{Z_{12} > t\}} = r(t) 1_{\{Z_{12} > t\}}. \quad (90)$$

Sob as condições anteriores, assume-se que observamos os tempos de vida dos componentes e o tempo no qual o sistema é atingido por um choque associado a Z_{12} , isto é, o indicador do tipo de falha é $V_t = 1_{\{Z_{12} > t\}}$, através de,

$$\mathcal{F}_t = \left\{ 1_{\{T_i > s\}}, i = 1, 2, 1_{\{Z_{12} > s\}}, 0 \leq s \leq t \right\}.$$

A função $r(t)$ tem forma de banheira com um só tempo de mudança em $t_{\min} = 2.302584$, $r(0) = 1 < r(\infty) = +\infty$, e λ_t é como em (27). Portanto os processos de intensidade λ_t^I e λ_t^{II} têm um único tempo de mudança em $S_1^I = S_2^I = S_1 = S_2 = t_{\min}$, e $\lambda_0 < \lambda_\infty = +\infty$. No conjunto $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ o processo λ_t é como na figura 2, e no conjunto $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$ é como na figura 3. Queremos achar $\tilde{B}^* = \inf\{B \in C_r^F : m_B \leq 0\} = \inf\{B \in C_r^F : (C + C_0)(\tilde{\lambda}_B - \lambda_{B+\delta}) + (K + C_1 - C_0)(\tilde{\lambda}_B^{II} - \lambda_{B+\delta}^{II}) \leq 0\}$, onde, $\lambda_{B+\delta} = \lambda_{B+\delta}^I + \lambda_{B+\delta}^{II}$, $\tilde{\lambda}_B = \left(\frac{C}{C+C_0}\right)(\lambda_B^I + \lambda_B^{II}) = \left(\frac{C}{C+C_0}\right)\lambda_B$, $\tilde{\lambda}_B^{II} = \left(\frac{K}{K+C_1-C_0}\right)\lambda_B^{II}$, para $C = 10$, $C_0 = 2$, $C_1 = 5$, $C_{mb} = 1$, e $K = 15$. Para isto, é preciso, como antes, considerar os casos $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ e $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$.

No conjunto $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$, temos

i. O conjunto $\{B + \delta < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] \\ - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] &= 0 \\ \iff (K + C)r(B) - (K + C + C_1)r(B + \delta) &= 0. \end{aligned}$$

ii. O conjunto $\{B + \delta \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) r(B) - 2r(B + \delta) \right] \\ - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] &= 0 \\ \iff (K + C)r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) &= 0. \end{aligned}$$

No conjunto $\{T_1 \wedge T_2 \geq t_{\min}\}$, consideramos

i. O conjunto $\{B < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) r(B) - 2r(B + \delta) \right] \\ - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] = 0 \\ \iff (K + C)r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0. \end{aligned}$$

ii. O conjunto $\{B \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) 2r(B) - 2r(B + \delta) \right] \\ - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] = 0 \\ \iff (K + 2C)r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0. \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos as soluções para $(K + C)r(B) - (K + C + C_1)r(B + \delta) = 0$, para valores distintos de δ ,

δ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\tilde{B}^*$	1.337	1.271	1.158	1.034	0.911	0.794	0.684	0.582

A seguir, apresentamos as soluções para $(K + 2C)r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0$, para valores distintos de δ ,

δ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\tilde{B}^*$	0.603	0.729	0.700	0.623	0.529	0.430	0.333	0.240

Os seguintes são as soluções para $(K + 2C)r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0$, para valores distintos de δ ,

δ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\tilde{B}^*$	1.337	1.271	1.158	1.034	0.911	0.794	0.684	0.582

Para achar $\hat{B}^{**} = \inf\{B \in C_r^F : m_B - C_{mb} \cdot r_\tau(B) \leq 0\} = \inf\{B \in C_r^F : (C + C_0)(\tilde{\lambda}_B - \lambda_{B+\delta}) + (K + C_1 - C_0)(\tilde{\lambda}_B^H - \lambda_{B+\delta}^H) - C_{mb} \cdot r_\tau(B) \leq 0\}$. De novo, consideramos os casos $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$ e $\{t_{\min} \geq T_1 \wedge T_2\}$.

No conjunto $\{t_{\min} < T_1 \wedge T_2\}$, temos

i. O conjunto $\{B + \delta < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} & (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] \\ & - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] - C_{mb} r(B) = 0 \\ & \iff (K + C - C_{mb})r(B) - (K + C + C_1)r(B + \delta) = 0. \end{aligned}$$

ii. O conjunto $\{B + \delta \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} & (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) r(B) - 2r(B + \delta) \right] \\ & - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] - C_{mb} r(B) = 0 \\ & \iff (K + C - C_{mb})r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0. \end{aligned}$$

No conjunto $\{T_1 \wedge T_2 \geq t_{\min}\}$, temos

i. O conjunto $\{B < T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} & (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) r(B) - 2r(B + \delta) \right] \\ & - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] - C_{mb} r(B) = 0 \\ & \iff (K + C - C_{mb})r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0. \end{aligned}$$

ii. O conjunto $\{B \geq T_1 \wedge T_2\}$: Neste caso temos que resolver,

$$\begin{aligned} & (C + C_0) \left[\left(\frac{C}{C + C_0} \right) 2r(B) - 2r(B + \delta) \right] \\ & - (K + C_1 - C_0) \left[\left(\frac{K}{K + C_1 - C_0} \right) r(B) - r(B + \delta) \right] - C_{mb} r(B) = 0 \\ & \iff (K + 2C - C_{mb})r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0. \end{aligned}$$

Os seguintes, são as soluções para $(K + C - C_{mb})r(B) - (K + C + C_1)r(B + \delta) = 0$, para valores distintos de δ ,

δ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\hat{B}^{**}$	1.242	1.199	1.097	0.979	0.861	0.747	0.639	0.538

A seguir, apresentamos as soluções para $(K + C - C_{mb})r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0$,

δ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\hat{B}^{**}$	0.512	0.668	0.649	0.577	0.486	0.390	0.293	0.200

Finalmente, as soluções para $(K + 2C - C_{mb})r(B) - (K + 2C + C_0 + C_1)r(B + \delta) = 0$, são,

δ	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
$\hat{B}^{**}$	1.269	1.220	1.114	0.995	0.875	0.760	0.652	0.550

Referências

- [1] Aven, T. and Jensen, U. Stochastic models in reliability. *Springer-Verlag Inc.*, (1999). New York.
- [2] Block, H. W. and Savits, T. H. *Burn-in*. Statistical Science, 12(1) (1997), 1-19.
- [3] Bueno, V.C. *Burn-in of a coherent system at component information level*. (2007). 9p. (RT-MAE 2007-15).
- [4] Cha, J.H. *On a better burn-in procedure*. Journal of Applied Probability, 12(1) (2000), 1090-1103.
- [5] Cha, J.H. *Burn-in procedures for a generalized model*. Journal of Applied Probability, 38 (2001), 542-553.
- [6] Cha, J.H. *A further extension of the generalized burn-in model*. Journal of Applied Probability, 40 (2003), 264-270.
- [7] Jensen, U. *Monotone stopping rules for stochastic processes in a semimartingale representation with applications*. Optimization, 20(6) (1989), 837-852.

- [8] Jensen, F. and Petersen, N.E. *Burn-in*. Wiley, (1982), New York.
- [9] Kar, T.R. and Nachlas, J.A. *Coordinated warranty & burn-in strategies*. IEEE Transactions on Reliability, 46(4) (1997), 512-518.
- [10] Mi, J. *Burn-in*. Ph.D. dissertation. Department of Mathematics and Statistics, University of Pittsburgh, (1991).
- [11] Mi, J. *Burn-in and maintenance policies*. Advanced Applied Probability, 26 (1994), 207-221.
- [12] Mi, J. *Warranty policies and burn-in*. Naval Research Logistics, 44 (1997), 199-209.
- [13] Nguyen, D.G. and Murthy, D.N.P. *Optimal burn-in time to minimize cost for products sold under warranty*. IIE Transactions, 14(3)(1982), 167-174.
- [14] Sheu, S.H, and Chien, Y.H. *Optimal burn-in time to minimize the cost for general repairable products sold under warranty*. European Journal of Operational Research, 163 (2005), 445-461.
- [15] Yun, W.H. Lee, Y.W. and Ferreira, L. *Optimal burn-in time under acumulative free replacement warranty*. Reliability Engineering & System Safety, 78 (2002), 93-100.

ÚLTIMOS RELATÓRIOS TÉCNICOS PUBLICADOS

2008-01 - CABRAL, C.R.B.; BOLFARINE, H. Bayesian Inference for the Skew Student-t-Normal Model. 2008. 13p. (RT-MAE-2007-01)

2008-02 - CABRAL, C.R.B.; BOLFARINE, H. Bayesian Density Estimation Using Skew Student-t-Normal Mixtures. 2008. 18p. (RT-MAE-2008-02)

2008-03 - FARIAS, R.B.A.; ARENAS, G.M.; PATRIOTA, A.G. Redução de modelos na presença de parâmetros de perturbação. 2008. 19p. (RT-MAE-2008-03)

2008-04 - MIRANDA, J.C. A Mixed Hammerstein Integral Equation. 2008. 10p. (RT-MAE-2008-04)

2008-05 - WECHSLER, S.; PEREIRA, C.A.B.; MARQUES, P.C.F. Birnbaum's Theorem Redux. 05p. 2008. (RT-MAE-2008-05)

2008-06 - BUENO, V.C.; ALVAREZ, N.G.G. Optimal warranty time under a extension of the general failure model. 23p. 2008. (RT-MAE-2008-06)

2008-07 - FIGUEIREDO, C.C.; BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M.C.; C.R.O.P. LIMA On the skew-normal calibration model. 30p. 2008. (RT-MAE-2008-07)

The complete list of "Relatórios do Departamento de Estatística", IME-USP, will be sent upon request.

*Departamento de Estatística
IME-USP
Caixa Postal 66.281
5311-970 - São Paulo, Brasil*