

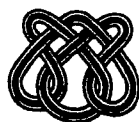
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2585

Álgebra Linear

**Mirian Percia Mendes
Roberta Godoi Wik Atique
Valdir Antonio Menegatto**

Nº 62

NOTAS DIDÁTICAS



São Carlos – SP
Abr./2003

Álgebra Linear

Mirian Percia Mendes

Roberta Godoi Wik Atique

Valdir Antonio Menegatto¹

16 de abril de 2003

¹Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Departamento de Matemática, São Carlos, SP, Brazil, mpmendes@icmc.sc.usp.br, rwik@icmc.sc.usp.br e menegatt@icmc.sc.usp.br

Sumário

1	Introdução	1
2	Espaços Vetoriais	10
2.1	Definições e Exemplos	10
2.2	Subespaços	12
2.3	Bases e Dimensão	20
2.4	Espaço Quociente	27
2.5	Coordenadas	30
3	Transformações Lineares	36
3.1	Linearidade	36
3.2	O Espaço das Transformações Lineares	38
3.3	Isomorfismos	42
3.4	Funcionais Lineares	55
3.5	O Espaço Bidual	61
3.6	A Transposta de uma Transformação Linear	63
4	Operadores Lineares	69
4.1	Projeções	69
4.2	Subespaços Invariantes	75
4.3	Somas Diretas Invariantes	77
4.4	Autovalores e Autovetores	81
4.5	O Polinômio Minimal	93
4.6	A Forma Canônica de Jordan	98

5	Espaços com Produto Interno	109
5.1	Produto Interno	109
5.2	Ortogonalidade	117
5.3	Operadores que Preservam Produto Interno	122
5.4	A Transformação Adjunta	124
5.5	Operadores Autoadjuntos	131
5.6	Projeções Ortogonais	137
5.7	Operadores Positivos Definidos	141
5.8	Operadores Normais	146
6	Formas Bilineares	159
6.1	Definições e Exemplos	159
6.2	Ortogonalidade	163
6.3	Diagonalização de Formas Bilineares	168

Capítulo 1

Introdução

Vamos aqui relembrar alguns conceitos algébricos que serão usados no decorrer do texto. O leitor familiarizado com estes conceitos, pode seguir diretamente para o Capítulo 2.

Uma *operação binária* sobre um conjunto não-vazio S é uma função $*$ de $S \times S$ em S .

Uma *estrutura algébrica* é um conjunto S não-vazio, munido de uma ou mais operações binárias.

Uma operação binária $*$ sobre S é:

-*associativa* quando $(a * b) * c = a * (b * c)$, $a, b \in S$;

-*comutativa* quando $a * b = b * a$, $a, b \in S$.

Uma estrutura algébrica $(S, *)$ possui um *elemento identidade* (bilateral) em relação à operação binária $*$ quando existe um elemento 0 de S tal que

$$a * 0 = 0 * a = a, \quad a \in S.$$

Nestas condições, 0 é chamado de *elemento identidade* para $(S, *)$.

Teorema 1.0.1 *Uma estrutura algébrica tem no máximo um elemento identidade.*

Demonstração. Suponhamos que 0 e $0'$ sejam elementos identidades de $(S, *)$. Como $a * 0 = a$, para todo $a \in S$ e $0' \in S$, então $0' * 0 = 0'$. Analogamente, $0' * 0 = 0$. Portanto, $0 = 0' * 0 = 0'$. \square

Seja $(S, *)$ uma estrutura algébrica com elemento identidade 0 . Dizemos que um elemento a de S tem um *inverso* (bilateral) em relação à operação $*$ quando existe um

elemento a' de S tal que $a * a' = a' * a = 0$. Um elemento a' com a propriedade acima é chamado um *elemento inverso* de a .

Teorema 1.0.2 *Em uma estrutura algébrica $(S, *)$ onde $*$ é associativa e possui elemento identidade 0 , cada elemento tem no máximo um inverso.*

Demonstração. Suponhamos que a' e a'' sejam inversos de $a \in S$. Então, $a * a' = 0 = a * a''$ e, conseqüentemente, $a' * (a * a') = a' * (a * a'')$. Usando a associatividade de $*$ vem que $(a' * a) * a' = (a' * a) * a''$, isto é, $0 * a' = 0 * a''$. Logo, $a' = a''$. \square

Vejamos agora alguns exemplos de estruturas algébricas bem conhecidas e algumas de suas peculiaridades.

GRUPO - é uma estrutura algébrica formada por um conjunto não-vazio G e uma operação binária $*$ sobre G satisfazendo as seguintes condições:

- G1. $*$ é associativa;
- G2. $(G, *)$ possui um elemento identidade;
- G3. cada elemento de G possui um inverso em relação a $*$.

Se a operação $*$ for comutativa, dizemos que o grupo $(G, *)$ é *comutativo (ou abeliano)*.

ANEL - é uma estrutura algébrica formada por um conjunto não-vazio R e duas operações binárias $+$ e \cdot sobre R satisfazendo:

- R1. $(R, +)$ é um grupo;
- R2. $a + b = b + a$, $a, b \in R$;
- R3. " \cdot " é associativa;
- R4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, $a, b, c \in R$.

Definição 1.0.3 *Um anel comutativo (ou abeliano) é um anel $(R, +, \cdot)$, onde a operação binária " \cdot " é comutativa.*

Definição 1.0.4 *Um anel com identidade é um anel $(R, +, \cdot)$ onde (R, \cdot) possui um elemento identidade (geralmente denotado por 1).*

Teorema 1.0.5 *Seja $(R, +, \cdot)$ um anel. Então $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, $a \in R$. Se denotarmos o inverso de um elemento a de R em relação à operação binária $+$ por $-a$ e se, além disso, escrevermos $a - b := a + (-b)$, $a, b \in R$, então:*

$$1) a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b), \quad a, b \in R;$$

$$2) (-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \quad a, b \in R;$$

$$3) a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \quad (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a, \quad a, b, c \in R.$$

Demonstração. Exercício. □

Corolário 1.0.6 *Seja $R \neq \{0\}$ um anel com identidade 1. Então $1 \neq 0$.*

Demonstração. Existe um elemento a em R diferente de 0. Se $1 = 0$, podemos usar o teorema anterior para concluir que $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$, uma contradição. □

Definição 1.0.7 *Seja $(R, +, \cdot)$ um anel com identidade 1. Dizemos que um elemento a de R é inversível (unidade) quando ele possui um inverso em relação à operação binária “ \cdot ”.*

Observação 1.0.8 *Se um elemento a de um anel $(R, +, \cdot)$ é inversível, ele possui somente um inverso em relação à operação binária “ \cdot ”. Este inverso é geralmente denotado por a^{-1} .*

Definição 1.0.9 *Sejam $(R, +, \cdot)$ um anel e $a \neq 0$ um elemento de R . Dizemos que a é um divisor de zero em R quando existe $b \neq 0$ em R tal que $a \cdot b = 0$ ou $b \cdot a = 0$.*

Teorema 1.0.10 *Um anel $(R, +, \cdot)$ não possui divisores de zero se, e somente se, R satisfaz a lei do cancelamento: se $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ e $a \cdot b = a \cdot c$ ou $b \cdot a = c \cdot a$ então $b = c$.*

Demonstração. Exercício. □

Definição 1.0.11 *Um anel de integridade é um anel comutativo com identidade que não possui divisores de zero.*

Definição 1.0.12 *Sejam $(R, +, \cdot)$ e $(R', +', \cdot')$ dois anéis (não necessariamente distintos). Um homomorfismo de anéis é uma função $f : R \rightarrow R'$ que satisfaz:*

$$H1. f(a + b) = f(a) +' f(b), \quad a, b \in R;$$

$$H2. f(a \cdot b) = f(a) \cdot' f(b), \quad a, b \in R.$$

Um homomorfismo de anéis $f : R \rightarrow R'$ que é uma função bijetora é chamado de isomorfismo de anéis.

O núcleo do homomorfismo f é o conjunto $\text{Ker } f$ dado por:

$$\text{Ker } f := \{a \in R : f(a) = 0'\}.$$

Antes de prosseguirmos com mais conceitos sobre anéis, vejamos um exemplo especial.

Definição 1.0.13 *Sejam m um inteiro maior ou igual a 2 e $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é congruente a b módulo m , e escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$, quando m divide $a - b$.*

É fácil ver que a definição acima define uma relação binária sobre \mathbb{Z} e que esta é na verdade uma relação de equivalência sobre \mathbb{Z} .

Teorema 1.0.14 *Sejam a e b inteiros quaisquer. Então $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, os restos das divisões de a e b por m coincidem.*

Demonstração. Exercício. □

Corolário 1.0.15 *Todo inteiro é congruente módulo m a um e somente um elemento do conjunto $\{0, 1, \dots, m - 1\}$.*

Demonstração. Exercício. □

Para cada inteiro a consideremos o conjunto

$$\bar{a} := \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \pmod{m}\}.$$

Notemos que tal conjunto é a classe de equivalência de a e que \bar{a} depende de m apesar da notação não enfatizar esta dependência. Vamos indicar por \mathbb{Z}_m o conjunto quociente de \mathbb{Z} pela relação de equivalência acima, isto é,

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}.$$

Neste conjunto, definimos as seguintes operações:

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{ab}, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Notemos que a soma $\bar{a} + \bar{b}$ e o produto $\bar{a} \cdot \bar{b}$ não dependem dos representantes a e b da classe de equivalência. Em outras palavras, as operações de soma e de multiplicação sobre o conjunto \mathbb{Z}_m estão bem definidas. Para determinarmos a soma $\bar{a} + \bar{b}$, somamos os números inteiros a e b e encontramos o resto r da divisão de $a + b$ por m . Então, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{r}$. Analogamente, se s é o resto da divisão de ab por m , então $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{s}$.

O conjunto \mathbb{Z}_m com estas operações de soma e multiplicação é um anel comutativo com identidade. Este anel é chamado de *anel dos inteiros módulo m* .

Observação 1.0.16 Em geral, a lei do cancelamento para operação de multiplicação não vale em \mathbb{Z}_m , ou seja, \mathbb{Z}_m não é um anel de integridade.

O próximo resultado determina os divisores de zero em \mathbb{Z}_m .

Teorema 1.0.17 *Um elemento \bar{a} de \mathbb{Z}_m ($m > 1$) é um divisor de zero se, e somente se, o máximo divisor comum de a e m é maior do que 1.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 1.0.18 *O anel \mathbb{Z}_m é um anel de integridade se, e somente se, m é um número primo.*

Demonstração. Exercício. □

Vejamos agora o conceito de característica de um anel comutativo com identidade.

Definição 1.0.19 *Sejam $(R, +, \cdot)$ um anel e S um subconjunto não-vazio de R . Dizemos que S é um subanel de $(R, +, \cdot)$ quando S com as operações de R é um anel.*

Seja $(R, +, \cdot)$ um anel comutativo com identidade 1 e $m \in \mathbb{Z}$. Definimos $m \cdot 1 \in R$ (múltiplo inteiro de 1) da seguinte maneira:

$$m \cdot 1 := \begin{cases} 1 + \cdots + 1 & (m \text{ vezes}), \text{ se } m > 0 \\ (-1) + \cdots + (-1) & (-m \text{ vezes}), \text{ se } m < 0 \\ 0, & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

Indicando-se por R' o subconjunto de R constituído de todos os múltiplos inteiros de 1 temos que $(R', +, \cdot)$ é um subanel de $(R, +, \cdot)$ e a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$ dada por $f(a) = a \cdot 1$ é um homomorfismo de anéis. Vejamos atentamente o que acontece com o núcleo de f . Se $\text{Ker } f = \{0\}$, então 0 é o único número inteiro n tal que $n \cdot 1 = 0$. Se $\text{Ker } f \neq \{0\}$, então existe um número inteiro $a \neq 0$ tal que $a \cdot 1 = 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a > 0$, já que se $a < 0$, então $(-a) \cdot 1 = -(a \cdot 1) = 0$. Pelo Princípio do Menor Inteiro, existe então o menor elemento do conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0 \text{ e } n \cdot 1 = 0\},$$

digamos ℓ . Obviamente $\ell > 1$. Além disso, $\text{Ker } f = \ell\mathbb{Z}$, onde $\ell\mathbb{Z}$ é o subconjunto dos inteiros que são múltiplos de ℓ . De fato, como

$$f(\ell a) = (\ell a) \cdot 1 = \ell(a \cdot 1) = \ell 0 = 0, \quad a \in \mathbb{Z},$$

segue que $\ell\mathbb{Z} \subset \text{Ker } f$. Reciprocamente, seja $n \in \text{Ker } f$. Seja r o resto da divisão de n por ℓ , isto é, $n = q\ell + r$, $0 \leq r < \ell$. Segue que

$$0 = n \cdot 1 = (q\ell + r) \cdot 1 = q(\ell \cdot 1) + r \cdot 1 = q0 + r \cdot 1 = 0 + r \cdot 1 = r \cdot 1.$$

Como $r < \ell$, concluímos que $r = 0$, isto é, que $n = q\ell \in \ell\mathbb{Z}$.

Finalmente notemos que se $\text{Ker } f = \ell'\mathbb{Z}$, para algum $\ell' > 0$ então ℓ' divide ℓ e ℓ divide ℓ' . Em outras palavras, $\ell' = \pm\ell$. Como ambos são positivos, segue que $\ell' = \ell$.

A discussão acima permite a introdução do seguinte conceito.

Definição 1.0.20 *Seja $(R, +, \cdot)$ um anel comutativo com elemento identidade 1 ($1 \neq 0$). A característica de R é o único inteiro positivo ℓ tal que $\ell\mathbb{Z}$ coincide com o núcleo do homomorfismo $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$ dado por $f(n) = n \cdot 1$, $n \in \mathbb{Z}$.*

As seguintes observações merecem registro neste momento:

1) Um anel $(R, +, \cdot)$ comutativo com elemento identidade 1 ($1 \neq 0$) tem característica 0 se, e somente se, 0 é o único número inteiro n satisfazendo $n \cdot 1 = 0$.

2) Nas condições acima, R tem característica $\ell > 0$ se, e somente se, ℓ é o menor inteiro positivo satisfazendo $\ell \cdot 1 = 0$.

3) O anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ usual tem característica 0.

4) O anel $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$, $(m > 1)$, tem característica m . Logo, dado um inteiro positivo m , existe um anel cuja característica é m .

Teorema 1.0.21 *Seja R um anel comutativo com identidade 1 ($1 \neq 0$) de característica 0. Então o menor subanel de R com identidade 1 é isomorfo a \mathbb{Z} .*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 1.0.22 *A característica de um anel de integridade é 0 ou um número primo.*

Demonstração. Exercício. □

Definição 1.0.23 *Um anel $(R, +, \cdot)$ é um corpo se a estrutura algébrica $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo comutativo e tem identidade.*

Observação 1.0.24 *Todo corpo $(F, +, \cdot)$ possui pelo menos dois elementos, 0 e 1; a identidade do grupo $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ é 1.*

Como exemplos de corpos citamos os conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} e

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

munidos das operações usuais de soma e multiplicação, além dos anéis \mathbb{Z}_p , onde p é um primo.

Teorema 1.0.25 *Um corpo $(F, +, \cdot)$ é um anel de integridade.*

Demonstração. Como todo corpo é um anel comutativo com identidade 1, precisamos apenas verificar que F não contém divisores de zero. Sejam $a, b \in F$ tais que $a \cdot b = 0$. Se $a \neq 0$ então existe $a^{-1} \in F$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. Daí,

$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Portanto, $a = 0$ ou $b = 0$. □

Observação 1.0.26 Nem todo anel de integridade é um corpo. Entretanto, todo anel de integridade que possui um número finito de elementos é um corpo (exercício).

Definição 1.0.27 Um subcorpo de um corpo F é um subanel de F que é um corpo.

Definição 1.0.28 Um corpo que possui um único subcorpo é denominado corpo primo.

Observação 1.0.29 O único subcorpo de um corpo primo é então o próprio corpo.

Teorema 1.0.30 Seja F um corpo primo.

- i) Se F tem característica 0 então F é isomorfo ao corpo \mathbb{Q} ;*
- ii) Se F tem característica $p > 0$ (p primo), então F é isomorfo a \mathbb{Z}_p .*

Demonstração. Exercício. □

Exercícios 1.0.31 1) Determine o resto da divisão de 37^{13} por 17.

2) Mostre que $2^{2^5} + 1$ é divisível por 641.

3) Mostre que o número $2^{83} - 1$ é divisível por 167.

4) Determine todos os divisores de zero do anel \mathbb{Z}_{24} .

5) Resolva a seguinte equação $\bar{3} \cdot x + \bar{2} = \bar{6} \cdot x + \bar{7}$ sobre o anel \mathbb{Z}_8 .

6) Mostre que \mathbb{Q} e \mathbb{Z}_p , p primo, são corpos primos enquanto que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ não é.

7) Demonstre que um homomorfismo f entre anéis comutativos é injetor se, e somente se, $\text{Ker } f = \{0\}$.

8) Determine todas as estruturas de anel sobre o conjunto R nos seguintes casos: $R = \{0, a\}$, $a \neq 0$; $R = \{0, a, b\}$, onde $0, a$ e b são distintos dois a dois.

9) Sejam $(R, +, \cdot)$ e $(R', +', \cdot')$ anéis. Verifique que $R \times R'$ com as operações binárias

$$(a, a') +'' (b, b') := (a + b, a' +' b'), \quad (a, a') \cdot'' (b, b') := (a \cdot b, a' \cdot' b'), \quad a, b \in R, a', b' \in R'$$

é um anel.

10) Mostre que o anel $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ tem característica 0.

11) Seja R um anel comutativo com identidade. Mostre que a característica de todo subanel de R com identidade é igual à característica do anel R . Conclua que os corpos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} têm característica 0.

12) Mostre que um anel comutativo R com identidade tem característica 0 se, e somente

se, todo subanel de R com identidade é infinito.

13) Determine as características dos seguintes anéis: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{24}$.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

Apresentamos neste capítulo a noção formal de espaço vetorial.

2.1 Definições e Exemplos

A partir desse capítulo, vamos chamar os elementos de um corpo F qualquer de *escalares*. As operações de adição e multiplicação de dois elementos a e b de F serão indicadas por $a + b$ e ab , respectivamente. O leitor deve estar atento já que o símbolo $+$ pode indicar simultaneamente duas operações distintas.

Definição 2.1.1 *Sejam V um conjunto não-vazio e F um corpo. Definamos sobre V duas operações:*

$$(u, v) \in V \times V \longrightarrow u + v \in V \quad (\text{adição}),$$

$$(\alpha, v) \in F \times V \longrightarrow \alpha \cdot v \in V \quad (\text{multiplicação por escalar}).$$

Dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre F quando as seguintes condições estiverem satisfeitas:

A1. $(u + v) + w = u + (v + w)$, $u, v, w \in V$;

A2. $u + v = v + u$, $u, v \in V$;

A3. Existe um único elemento 0 em V tal que $0 + v = v$, $v \in V$;

A4. Para cada v em V , existe um único $-v$ em V tal que $v + (-v) = 0$;

$$M1. \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v, \alpha, \beta \in F, v \in V;$$

$$M2. \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \alpha \in F, u, v \in V;$$

$$M3. (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \alpha, \beta \in F, v \in V;$$

$$M4. 1 \cdot v = v, v \in V.$$

Observação 2.1.2 Chamamos os elementos de um espaço vetorial V de vetores.

Exemplos 2.1.3 1) Seja F um corpo e n um inteiro positivo e consideremos $F^n := F \times \cdots \times F$ (n vezes). Definindo-se as operações:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\alpha \cdot (\beta_1, \dots, \beta_n) := (\alpha \cdot \beta_1, \dots, \alpha \cdot \beta_n), \quad \alpha, \beta_j \in F, \quad j = 1, \dots, n$$

então $(F^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre F (espaço das n -uplas de F).

2) Sejam F um corpo e m e n inteiros positivos. O conjunto $M_{m \times n}(F)$ das matrizes $m \times n$ com entradas em F , munido das operações:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) := (\alpha_{ij} + \beta_{ij}), \quad \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in F, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\alpha \cdot (\alpha_{ij}) = (\alpha\alpha_{ij}), \quad \alpha, \alpha_{ij} \in F, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

é um espaço vetorial sobre F .

3) Sejam F um corpo e A um conjunto não-vazio qualquer. Definamos sobre o conjunto $F^A := \{f : A \rightarrow F : f \text{ é função}\}$ as seguintes operações de soma e multiplicação por escalar:

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a), \quad f, g \in F^A, \quad a \in A,$$

$$(\alpha \cdot f)(a) = \alpha f(a), \quad f \in F^A, \quad \alpha \in F, \quad a \in A.$$

Então $(F^A, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre F .

4) Seja F um corpo. Uma função polinomial de grau n sobre F na variável (indeterminada) x é uma função de F em F da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_0, \dots, a_n \in F.$$

Vamos denotar por $P(F)$ o conjunto de todas as funções polinomiais sobre F . Se definirmos adição e multiplicação por escalar como no exemplo anterior (observemos que se p

e q são funções polinomiais sobre F e $\alpha \in F$ então $p + q$ e $\alpha \cdot p$ são funções polinomiais sobre F) então $(P(F), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre F .

5) Se V é um espaço vetorial sobre um corpo F e F_1 é um subcorpo de F então V é espaço vetorial sobre F_1 .

2.2 Subespaços

Vamos agora introduzir o conceito de subespaço de um espaço vetorial e apresentar alguns resultados clássicos referentes a este conceito.

Definição 2.2.1 *Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre um corpo F e W um subconjunto não-vazio de V . Dizemos que W é um subespaço (vetorial) de V quando $(W, +, \cdot)$ for um espaço vetorial sobre F . Isto equivale a dizer que as seguintes condições estão satisfeitas:*

SV1. Se u e v são elementos de W então $u + v$ também é;

SV2. Se α é um escalar e u é um elemento de W então $\alpha \cdot u$ é um elemento de W .

Observação 2.2.2 Vamos escrever $W \leq V$ para indicar que W é um subespaço de V .

Observação 2.2.3 Se $W \leq V$, então 0 é um elemento de W . De fato, como $W \neq \emptyset$, existe algum w em W . Como 0 é um elemento de F , a condição SV2 garante que $0 = 0 \cdot w$ é um elemento de W .

Exemplos 2.2.4 1) Todo espaço vetorial V tem pelo menos dois subespaços: $\{0\}$ e o próprio V . Esses são os subespaços *triviais* de V .

2) Seja $V = F^n$, onde F é um corpo qualquer e n é um inteiro positivo. Para cada m no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$W_1 := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V : \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0\}$$

e

$$W_2 := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V : \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0 \right\}$$

são subespaços de V .

3) Sejam F um corpo e n um inteiro positivo. O conjunto

$$P_n(F) := \{p \in P(F) : p \text{ tem grau } \leq n - 1\}$$

é um subespaço de $P(F)$. Se α for um elemento qualquer de F , então

$$W := \{p \in P_n(F) : p(\alpha) = 0\}$$

é um subespaço de $P_n(F)$ e, portanto, um subespaço de $P(F)$.

4) Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F e A um grupo não-vazio. Então

$$W_1 := \{f \in V^A : f(a) = f(-a), a \in A\}$$

e

$$W_2 := \{f \in V^A : f(a) = -f(-a), a \in A\}$$

são subespaços de V^A .

Aqui estão maneiras práticas para a construção de subespaços de um espaço vetorial dado.

Teorema 2.2.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . Então*

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

é um subespaço de V que contém W_1 e W_2 .

Demonstração. Exercício. □

Teorema 2.2.6 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , J um conjunto de índices e $\{W_j : j \in J\}$ uma família de subespaços de V . Então $\bigcap_{j \in J} W_j$ é um subespaço de V .*

Demonstração. Exercício. □

Observação 2.2.7 A união finita ou infinita de subespaços de um espaço vetorial pode não ser um subespaço.

Exemplos 2.2.8 1) Seja $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais e consideremos os subespaços $W_1 = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Observemos que W_1, W_2 são subespaços de \mathbb{R}^3 enquanto que $W_1 \cup W_2$ não é. De fato, $(-1, 0, 0) \in W_1, (1, 1, 1) \in W_2$, mas $(-1, 0, 0) + (1, 1, 1) \notin W_1 \cup W_2$.

2) Cada espaço $P_n(\mathbb{R}), n \geq 1$, é um subespaço de $P(\mathbb{R})$. Como $P(\mathbb{R}) = \cup_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbb{R})$, segue que $\cup_{n=0}^{\infty} P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço de $P(\mathbb{R})$.

3) Seja F um corpo qualquer e consideremos o espaço vetorial $V = M_{2 \times 2}(F)$. Os conjuntos

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in V : a \in F \right\}$$

e

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in V : b \in F \right\}$$

são subespaços de V , mas $W_1 \cup W_2$ não é.

A seguir, vamos determinar o menor subespaço de um espaço vetorial que contém dois subespaços dados. Para tanto, começamos com a seguinte construção.

Sejam V um espaço vetorial sobre F e S um subconjunto não-vazio de V . Definamos

$$[S] := \cap \{W : W \leq V \text{ e } S \subset W\}.$$

Pelo Teorema 2.2.6, $[S]$ é um subespaço de V . Além disso, se W é um subespaço de V que contém S então $[S] \subset W$, isto é, $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S .

Definição 2.2.9 Na construção acima, $[S]$ é chamado subespaço gerado por S . Quando $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, dizemos que $[S]$ é o subespaço gerado por v_1, \dots, v_n e que os vetores v_1, \dots, v_n geram $[S]$.

Teorema 2.2.10 Seja V um espaço vetorial sobre F . Valem as seguintes propriedades:

- i) $[\emptyset] = \{0\}$;
- ii) Se $S \subset V$ então $S \subset [S]$;
- iii) Se $S_1 \subset S_2 \subset V$ então $[S_1] \subset [S_2]$;
- iv) Se $S \subset V$ então $[S] = [[S]]$.

Demonstração. Exercício. □

O próximo conceito permite-nos explicitar os elementos do subespaço gerado por um conjunto.

Definição 2.2.11 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e v_1, \dots, v_n elementos de V . Uma combinação linear de v_1, \dots, v_n é qualquer soma finita da forma*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F.$$

Teorema 2.2.12 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e S um subconjunto não-vazio de V . Então*

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \alpha_i \in F, v_i \in S, i = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Demonstração. Seja A o conjunto no lado direito da igualdade no enunciado do teorema. É fácil ver que $S \subset A \leq V$. Como $[S]$ é o menor subespaço de V que contém S , segue que $[S] \subset A$. Por outro lado, como $[S]$ é um subespaço de V que contém S , $[S]$ deve conter todas as combinações lineares de elementos de S . Portanto, $A \subset [S]$. □

Observação 2.2.13 Podemos então dizer que $[S]$ é o subespaço de V formado por todas as combinações lineares de elementos de S .

Com este resultado temos:

Teorema 2.2.14 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . Então $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$, isto é, $W_1 + W_2$ é o menor subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$.*

Demonstração. Seja $u \in W_1 + W_2$. Então $u = w_1 + w_2 = 1.w_1 + 1.w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Logo, pelo teorema anterior, $u \in [W_1 \cup W_2]$. Portanto, $W_1 + W_2 \subset [W_1 \cup W_2]$. A outra inclusão segue do fato de que $W_1 + W_2$ é um subespaço de V que contém $W_1 \cup W_2$. □

Exercícios 2.2.15 1) Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre F . Usando as operações binárias sobre V definamos

$$u \oplus v := u + (-v), \quad \alpha \diamond u := (-\alpha) \cdot u, \quad u, v \in V, \quad \alpha \in F.$$

Verifique se (V, \oplus, \diamond) é um espaço vetorial.

2) Seja V o conjunto de todas as funções de \mathbb{R} em \mathbb{C} que satisfazem $f(-x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ (a barra indica conjugação complexa). Mostre que V com as operações de soma usual de funções e multiplicação usual de função por número real é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

3) No espaço vetorial \mathbb{R}^5 usual, seja W o conjunto de todos os vetores (x, y, z, w, u) que satisfazem as equações $6x + 3y + 4z - 3w = 0$, $3x + 2z - 3u = 0$ e $9x - 3y + 6z - 3w - 3u = 0$. Determine um conjunto de vetores que gera W .

4) Mostre que os únicos subespaços do espaço \mathbb{R} usual são os triviais.

5) Determine todos os subespaços do espaço \mathbb{R}^2 usual.

6) Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . Prove: se $W_1 \cup W_2$ é subespaço de V então $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

7) Sejam $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $V_p = \{f \in V : f \text{ é função par}\}$ e $V_i = \{f \in V : f \text{ é função ímpar}\}$. Demonstre que V_p e V_i são subespaços de V , $V_p + V_i = V$ e $V_p \cap V_i = \{0\}$.

8) Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

1) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;

2) Cada elemento de $W_1 + W_2$ escreve-se de maneira única como uma soma da forma $w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.

9) Nas condições do exercício anterior, prove que as seguintes condições são equivalentes:

i) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $V = W_1 + W_2$;

ii) Cada elemento de V escreve-se de maneira única como uma soma da forma $w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.

Definição 2.2.16 *Nas condições do exercício anterior dizemos que um dos subespaços é complementar do outro em V .*

Observação 2.2.17 Um subespaço dado pode possuir vários subespaços complementares. Por exemplo, no espaço \mathbb{R}^2 usual, uma reta passando pela origem é um subespaço complementar de qualquer outra reta passando pela origem.

Definição 2.2.18 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . Dizemos que a soma $W_1 + W_2$ é soma direta de W_1 e W_2 quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Neste caso escrevemos $W_1 \oplus W_2$.*

Teorema 2.2.19 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . São equivalentes:*

i) $V = W_1 \oplus W_2$;

ii) *Cada elemento de V escreve-se de maneira única na forma $w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.*

Demonstração. É consequência dos exercícios 8 e 9 acima. □

A seguir, vamos relembrar alguns conceitos da Teoria dos Conjuntos que serão usados na apresentação do próximo resultado. Vamos assumir que o leitor está familiarizado com estes conceitos.

Seja A um conjunto não-vazio. Uma *relação binária* sobre A é qualquer subconjunto de $A \times A$. Uma relação binária R sobre A é uma relação de *ordem parcial* quando as três condições abaixo estão satisfeitas:

ROP1. $(a, a) \in R, a \in A$;

ROP2. Se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ então $a = b$;

ROP3. Se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ então $(a, c) \in R$.

Sejam agora A um conjunto munido de uma relação de ordem parcial R e B um subconjunto de A .

Dizemos que um elemento α de A é *maximal* quando $(\alpha, a) \notin R, a \in A \setminus \{\alpha\}$. Em outras palavras, se $(\alpha, a) \in R$ para algum elemento de A , então $\alpha = a$.

Dizemos que B é *totalmente ordenado* quando a seguinte condição valer: se b e b' são elementos de B então $(b, b') \in R$ ou $(b', b) \in R$.

Dizemos que um elemento α de A é um *limitante superior* de B em A quando $(b, \alpha) \in R, b \in B$.

Lema de Zorn *Sejam A um conjunto não-vazio e R uma relação de ordem parcial sobre A . Uma condição suficiente para que A possua um elemento maximal é que todo subconjunto totalmente ordenado de A tenha um limitante superior em A .*

Podemos agora enunciar o nosso próximo resultado.

Teorema 2.2.20 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Se W é um subespaço de V então existe um subespaço U de V tal que $V = U \oplus W$. Em outras palavras, todo subespaço de V possui um complementar em V .*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} := \{S : S \leq V \text{ e } S \cap W = \{0\}\}$. Notemos inicialmente que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pois $\{0\} \in \mathcal{F}$. Consideremos agora a seguinte relação de ordem parcial R sobre \mathcal{F} :

$$R := \{(S_1, S_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : S_1 \subset S_2\}.$$

Seja $\{S_j : j \in J\}$ um conjunto totalmente ordenado de \mathcal{F} . Desejamos mostrar que tal conjunto tem um limitante superior em \mathcal{F} . Definamos $B = \cup_{j \in J} S_j$. Sejam $u, v \in B$ e $\alpha \in F$. Existem dois índices i e j em J tais que $u \in S_i$ e $v \in S_j$. Como $\{S_j : j \in J\}$ é totalmente ordenado então $(S_i, S_j) \in R$ ou $(S_j, S_i) \in R$, isto é, $S_i \subset S_j$ ou $S_j \subset S_i$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $S_i \subset S_j$. Segue que $u, v \in S_j$ e, conseqüentemente, que $u + v \in S_j \subset B$ já que $S_j \leq V$. Analogamente, $\alpha u \in S_i \subset B$. Portanto, B é um subespaço de V . Ainda,

$$B \cap W = \cup_{j \in J} (S_j \cap W) = \cup_{j \in J} \{0\} = \{0\}.$$

Concluimos assim que $B \in \mathcal{F}$. Logo B é um limitante superior de $\{S_j : j \in J\}$ em \mathcal{F} , e o Lema de Zorn é aplicável, revelando-nos que \mathcal{F} possui um elemento maximal. Seja U este elemento maximal. Afirmamos que $V = U + W$. De fato, suponhamos que exista um elemento v em V tal que $v \notin U + W$. Então, $\{\{v\} \cup U\} \leq V$ e como $v \notin W$, segue que $\{\{v\} \cup U\} \cap W = \{0\}$. Isto contradiz o fato de U ser um elemento maximal de \mathcal{F} . Finalmente, como $U \cap W = \{0\}$, vemos que $V = U \oplus W$. \square

Definição 2.2.21 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Dizemos que V é finitamente gerado se existir um subconjunto finito S de V tal que $V = [S]$.*

Exemplos 2.2.22 1) Se F é um corpo e m e n são inteiros positivos então os espaços F^n , $P_n(F)$ e $M_{m \times n}(F)$ são finitamente gerados.

2) Seja F um corpo e defina $F^\infty := \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \alpha_1, \alpha_2, \dots \in F\}$. Este conjunto é um espaço vetorial sobre F se a adição e a multiplicação por escalar são definidas por

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots) + (\beta_1, \beta_2, \dots) := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots) \quad \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots \in F$$

e

$$\alpha \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \dots) := (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \dots), \quad \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \in F.$$

O espaço gerado por $S = \{(1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\}$ é um subespaço vetorial de F^∞ e $[S] = F^\infty$. Portanto, F^∞ não é finitamente gerado.

Nos exercícios a seguir, generalizamos o conceito de soma direta para mais do que dois subespaços. Vamos usar alguns destes exercícios posteriormente.

Exercícios 2.2.23 10) Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1, \dots, W_n subespaços de V . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) Cada vetor v de $W_1 + \dots + W_n$ escreve-se de maneira única como uma soma da forma $w_1 + \dots + w_n$, $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$.

ii) $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1} + W_{j+1} + \dots + W_n) = \{0\}$, $j = 1, \dots, n$.

Valendo i) ou ii), dizemos que a soma $W_1 + \dots + W_n$ é uma *soma direta* de W_1, \dots, W_n e escrevemos $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$.

11) Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1, \dots, W_n subespaços de V . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$;

ii) Cada vetor de V escreve-se de maneira única como uma soma da forma $w_1 + \dots + w_n$, $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$.

Definição 2.2.24 Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1, \dots, W_n subespaços de V . Dizemos que W_1, \dots, W_n são independentes se a seguinte condição valer: se $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$ e $w_1 + \dots + w_n = 0$ então $w_1 = \dots = w_n = 0$.

Exercícios 2.2.25 12) Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1, \dots, W_n subespaços de V . Mostre então que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) W_1, \dots, W_n são independentes;
- ii) $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}$, $j = 2, \dots, n$.

2.3 Bases e Dimensão

Já sabemos que diferentes conjuntos de vetores podem gerar um mesmo espaço vetorial. Vamos agora encontrar o menor número de vetores que geram um espaço vetorial dado. Em símbolos perguntamos: se $V = [S]$ para algum S , será que existe um menor subconjunto S' de S tal que $[S'] = [S]$? A resposta desta questão depende do conceito de dependência linear.

Definição 2.3.1 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Um conjunto S de vetores de V é linearmente dependente (l.d.) sobre F quando o vetor nulo é uma combinação linear não trivial de vetores de S . Equivalentemente, existem vetores distintos v_1, \dots, v_n de S e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, com pelo menos um deles $\neq 0$, tais que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. S é linearmente independente (l.i.) sobre F quando não é l.d. sobre F .*

Observação 2.3.2 1) Como enfatizado na definição, a dependência ou independência linear de um conjunto depende do corpo de escalares. Entretanto, vamos negligenciar esta dependência, não mencionando “sobre F ” quando o contexto deixar claro qual o corpo F que está sendo utilizado.

2) Embora dependência e independência linear sejam propriedades referentes a conjunto de vetores, costuma-se dizer que vetores são l.d., ou l.i., quando o conjunto formado por eles é l.d., ou l.i.

3) Finalmente, notemos que a definição acima revela que uma condição suficiente para que um conjunto seja l.i. sobre um corpo F é que qualquer subconjunto deste o seja (veja exemplo 6 abaixo).

Exemplos 2.3.3 1) O conjunto vazio é l.i. sobre qualquer corpo.

2) No espaço $P(\mathbb{R})$ usual, o conjunto $\{1 + x + 2x^2, 2 - x + x^2, -4 + 5x + x^2\}$ é l.d. pois $2(1 + x + 2x^2) + (-3)(2 - x + x^2) + (-1)(-4 + 5x + x^2) = 0$.

- 3) No espaço \mathbb{R}^n usual, $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ é l.i.
- 4) No espaço vetorial \mathbb{R} usual, $\{1, \sqrt{3}\}$ é l.d.
- 5) \mathbb{R} munido das operações de soma usual e multiplicação usual por número racional é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} . Aqui, o conjunto $\{1, \sqrt{3}\}$ é l.i.
- 6) Sejam V um espaço vetorial sobre F e S e T subconjuntos não-vazios de V tais que $S \subset T$. Se T é l.i então S é l.i. Se S é l.d então T é l.d.
- 7) Seja V um espaço vetorial sobre F . Qualquer subconjunto de V que contém o vetor nulo é l.d. Se $v \in V$, o conjunto $\{v\}$ é l.i. se, e somente se, $v \neq 0$.

Definição 2.3.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e B um subconjunto de V . Dizemos que B é uma base de V quando:*

- B1. B é l.i. sobre F ;
- B2. B gera V , isto é, $V = [B]$.

Teorema 2.3.5 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Então V possui pelo menos uma base.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} := \{S : S \subset V \text{ e } S \text{ é l.i.}\}$. Como $\emptyset \in \mathcal{F}$, temos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. A relação $R := \{(S_1, S_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : S_1 \subset S_2\}$ é uma relação de ordem parcial sobre \mathcal{F} . Como na prova do Teorema 2.2.20, vamos novamente utilizar o Lema de Zorn. Seja $\{S_j : j \in J\}$ um subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{F} . Afirmamos que $T := \cup_{j \in J} S_j$ é um limitante superior de $\{S_j : j \in J\}$ em \mathcal{F} . De fato, sejam $v_1, \dots, v_n \in T$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ e suponhamos que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Existem índices j_1, \dots, j_n em J tais que $v_i \in S_{j_i}$, $i = 1, \dots, n$. Como $\{S_j : j \in J\}$ é totalmente ordenado, existe um índice j_k tal que $S_{j_i} \subset S_{j_k}$, $i = 1, \dots, n$. Segue que $v_i \in S_{j_k}$, $i = 1, \dots, n$. Como S_{j_k} é l.i., $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Logo, T é l.i. e, conseqüentemente, é um limitante superior de $\{S_j : j \in J\}$ em \mathcal{F} . Pelo Lema de Zorn, \mathcal{F} possui um elemento maximal, digamos B . No restante da prova mostraremos que $V = [B]$. Como $[B] \subset V$, suponhamos que exista um elemento $v \in V$ tal que $v \notin [B]$. Como B é um elemento maximal de \mathcal{F} , $B \cup \{v\}$ é l.d. Logo, existem u_1, \dots, u_m em B e escalares $\beta_1, \dots, \beta_m, \beta$, não todos nulos, tais que $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m + \beta v = 0$. Se β fosse zero então o fato de B ser l.i. implicaria que $\beta_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, uma contradição. Logo, $\beta \neq 0$, e, conseqüentemente

$$(\beta_1 \beta^{-1}) u_1 + \dots + (\beta_m \beta^{-1}) u_m + v = 0,$$

Isto significa que $v \in [B]$, outra contradição. Assim, $V = [B]$. \square

O teorema abaixo apresenta duas caracterizações de base.

Teorema 2.3.6 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $V \neq \{0\}$ e B um subconjunto de V . As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) B é uma base de V (sobre F);

ii) B é um subconjunto l.i. maximal de V , isto é, não existe subconjunto l.i. B' de V tal que $B' \neq B$ e $B \subset B'$;

iii) B é um conjunto gerador minimal de V , isto é, $V = [B]$ e não existe $B' \subset B$, $B' \neq B$ tal que $V = [B']$.

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$ Se $v \in V \setminus B$ então, por i), $v \in [B]$. Segue que $B \cup \{v\}$ é l.d. Portanto, qualquer conjunto contendo B é l.d.

$ii) \Rightarrow i)$ Se $V \neq [B]$, existiria $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $v \notin [B]$. Logo, $B \cup \{v\}$ seria um conjunto l.i., contradizendo ii).

$i) \Rightarrow iii)$ Seja $w \in B$. Então, $w \notin [B \setminus \{w\}]$, pois B é um conjunto l.i. Portanto, $[B \setminus \{w\}] \neq V$. Isto implica iii).

$iii) \Rightarrow i)$ Se existirem vetores (distintos) v_1, \dots, v_n em B e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, então um dos v_j , digamos v_n , é combinação linear dos demais. Logo, $[B \setminus \{v_n\}] = [B] = V$, contradizendo iii). \square

Teorema 2.3.7 *Seja V um espaço vetorial sobre F .*

i) Se $S \subset T \subset V$, S é l.i. e $V = [T]$, então existe uma base B de V tal que $S \subset B \subset T$;

ii) Se S é um subconjunto l.i. de V então existe uma base B de V que contém S ;

iii) Se $V = [T]$, então existe uma base B de V contida em T .

Demonstração. Para provar i), aplicamos o Lema de Zorn à família de conjuntos

$$\mathcal{F} := \{A : S \subset A \subset T \text{ e } A \text{ é l.i.}\},$$

munida da ordem parcial de inclusão. Concluimos que \mathcal{F} possui um elemento maximal B . Se existir algum elemento $u \in T \setminus [B]$, então $B \cup \{u\}$ é l.i., contradizendo a maximalidade

de B . Logo, $T \subset [B]$ e, conseqüentemente, $[T] \subset [B]$. Segue que $V = [B]$, e, portanto, B é base de V . Partes ii) e iii) seguem de i). \square

Teorema 2.3.8 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e B_1 e B_2 bases de V . Então, cada elemento de B_1 pode ser substituído por algum elemento de B_2 de modo que o conjunto resultante ainda é uma base de V .*

Demonstração. Seja $v \in B_1$. Se B_2 fosse um subconjunto de $B_1 \setminus \{v\}$, teríamos $V = [B_2] \subset [B_1 \setminus \{v\}]$, contradizendo o fato de B_1 ser um conjunto gerador minimal de V (veja Teorema 2.3.6). Logo, existe um elemento u de B_2 tal que $u \notin [B_1 \setminus \{v\}]$. Segue que $(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ é l.i. Se $v \notin [(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{u\}]$ então $(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{u\} \cup \{v\} = B_1 \cup \{u\}$ é l.i., contradizendo o fato de B_1 ser um conjunto l.i. maximal. Assim, $v \in [(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{u\}]$ e

$$V = [B_1] \subset [B_1 \cup \{u\}] = [((B_1 \setminus \{v\}) \cup \{u\}) \cup \{v\}] = [(B_1 \setminus \{v\}) \cup \{u\}],$$

completando a prova. \square

No teorema a seguir, utilizamos a noção de cardinalidade. Lembramos que dois conjuntos A e B têm mesma *cardinalidade* quando existe uma função $f : A \rightarrow B$ bijetora.

Teorema 2.3.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e B_1 e B_2 bases de V . Então B_1 e B_2 têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Primeiro caso: a cardinalidade de B_1 é infinita. Suponhamos que B_2 não tenha cardinalidade infinita. Como $V = [B_2]$ e todo elemento de B_2 é uma combinação linear de elementos de B_1 , $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ para algum subconjunto finito $\{v_1, \dots, v_m\}$ de B_1 . Como B_1 é infinito, existe $v \in B_1 \setminus \{v_1, \dots, v_m\}$, uma contradição. Portanto, a cardinalidade de B_2 é infinita.

Seja agora \mathcal{F} a família de todos os subconjuntos finitos de B_2 e defina $\phi : B_1 \rightarrow \mathcal{F}$ da seguinte maneira:

$$\phi(v) = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad v \in V,$$

onde $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, $\alpha_j \neq 0$ e $u_j \in B_2$, $j = 1, \dots, n$. Como B_2 é uma base de V , ϕ está bem definida. Notemos que ϕ não é necessariamente injetora.

Afirmamos agora que $\text{Im } \phi$ é um conjunto infinito. De fato, se não fosse, a união de todos os conjuntos S de $\text{Im } \phi$ seria um subconjunto finito de B_2 , gerando B_1 e, conseqüentemente, V , uma óbvia contradição.

Afirmamos agora que a imagem inversa de cada elemento de $\text{Im } \phi$ é um subconjunto finito de B_1 . De fato, seja $Y \subset \mathcal{F}$ e seja $v \in \phi^{-1}(Y)$. Então $v \in [Y]$. Como Y é finito, segue que existe um subconjunto finito X de B_1 tal que $[X] = [Y]$. Segue que, $v \in [X]$. Se $v \notin X$, então v escreve-se como combinação linear de elementos de X , ou equivalentemente, o vetor nulo é uma combinação linear não trivial de elementos de B_1 , uma contradição com o fato de B_1 ser base de V . Portanto, $v \in X$. Conseqüentemente, $\phi^{-1}(Y) \subset X$, e em particular, $\phi^{-1}(Y)$ é finito.

Fixando $Y \in \text{Im } \phi$, podemos usar o Teorema da Boa-Ordem (p.14 em [12]), para ordenar os elementos do conjunto $\phi^{-1}(Y)$, digamos $\{v_1, \dots, v_n\}$. Definamos uma aplicação $\psi_Y : \phi^{-1}(Y) \rightarrow \text{Im } \phi \times \mathbb{N}$ por $\psi_Y(v_k) = (Y, k)$ e notemos que ψ_Y está bem definida e é injetora. Os conjuntos $\phi^{-1}(Y)$, $Y \in \text{Im } \phi$, formam uma partição da base B_1 . Segue que a aplicação que a cada elemento v de B_1 associa o elemento $\psi_Y(v)$, $v \in \phi^{-1}(Y)$, está bem definida e é injetora. Portanto, a cardinalidade de B_1 é menor ou igual à cardinalidade de $\text{Im } \phi \times \mathbb{N}$. Agora notemos que a cardinalidade de $\text{Im } \phi \times \mathbb{N}$ coincide com a cardinalidade de $\text{Im } \phi$ e que esta é menor ou igual à cardinalidade de \mathcal{F} . Finalmente, notemos que a cardinalidade de \mathcal{F} é exatamente a cardinalidade de B_2 (as propriedades de cardinalidade invocadas acima podem ser encontradas na Introdução de [12]). Assim, a cardinalidade de B_1 é menor ou igual à cardinalidade de B_2 . A conclusão acima vale na ordem inversa. Pelo Teorema de Schröder-Bernstein ([12]), as cardinalidades de B_1 e B_2 coincidem.

Segundo caso: a cardinalidade de B_1 é finita. Podemos supor que a cardinalidade de B_2 também é finita. Escrevamos $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$. Podemos escrever

$$u_m = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_j \in F, \quad j = 1, \dots, n.$$

Seja α_k o primeiro α_j não-nulo. Então,

$$v_k = \alpha_k^{-1} u_m - \alpha_k^{-1} \alpha_{k+1} v_{k+1} - \dots - \alpha_k^{-1} \alpha_n v_n$$

e

$$V = \{\{u_m, v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}\}.$$

Em particular,

$$u_{m-1} = \beta_m u_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n,$$

onde $\beta_j \in F$, $j = m, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$. Nem todos os escalares β_j , $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$, são nulos. Portanto, podemos repetir o procedimento acima e substituir um dos v_j 's por u_{m-1} . Prosseguindo desta forma, obtemos um conjunto que contém os vetores $u_m, u_{m-1}, \dots, u_{m-k+1}$ e $n-k$ dos v_i 's e este conjunto ainda gera V . Se $n < m$, então ao fim de n passos concluímos que $\{u_m, \dots, u_{m-n+1}\}$ gera V . Como $m-n+1 \geq 2$, u_1 seria uma combinação linear de elementos deste conjunto, contradizendo a independência linear de B_2 . Assim, $m \leq n$. Um argumento similar, permitir-nos concluir que $n \leq m$. \square

Exemplos 2.3.10 1) Sejam F um corpo e n um inteiro positivo. O conjunto de n -uplas

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

é uma base de F^n (sobre F).

2) Seja F um corpo. Se $v \in F \setminus \{0\}$, então $\{v\}$ é uma base de F (sobre F).

3) Sejam F um corpo e m e n inteiros positivos. O conjunto formado por todas as matrizes E_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, com entrada ij igual a 1 e as demais iguais a 0, é uma base de $M_{m \times n}(F)$ (sobre F).

4) O conjunto $\{1, x, x^2, \dots\}$ é uma base do espaço $P(\mathbb{R})$ usual.

Definição 2.3.11 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Dizemos que V tem dimensão finita (sobre F) quando existe uma base de V formada por um número finito de vetores. Caso contrário, V tem dimensão infinita (sobre F).*

O Teorema 2.3.9 consolida a seguinte definição.

Definição 2.3.12 *Seja V um espaço vetorial sobre F . A dimensão de V sobre F , denotada por $\dim_F V$ ou simplesmente por $\dim V$ (quando o contexto permitir), é a cardinalidade de qualquer base de V sobre F .*

Exercícios 2.3.13 13) Seja V um espaço vetorial sobre F , v_1, \dots, v_m vetores de V e suponha que $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Prove (sem usar os quatro teoremas anteriores) que

todo subconjunto l.i. de V é finito e contém no máximo m elementos.

14) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e W um subespaço não-trivial de V . Prove que W tem dimensão finita (sobre F) e que $\dim_F W < \dim_F V$.

Teorema 2.3.14 *Seja V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . Então*

$$\dim_F(W_1 + W_2) + \dim_F(W_1 \cap W_2) = \dim_F W_1 + \dim_F W_2.$$

Demonstração. Seja $B = \{w_i : i \in I\}$ uma base de $W_1 \cap W_2$. Pelo Teorema 2.3.7, podemos estender B a uma base $B_1 = B \cup \{u_j : j \in J\}$ de W_1 e a uma base $B_2 = B \cup \{v_k : k \in K\}$ de W_2 . Como os conjuntos B , $\{u_j : j \in J\}$ e $\{v_k : k \in K\}$ são dois a dois disjuntos, vamos concluir a prova do teorema mostrando que $B_1 \cup B_2$ é uma base de $W_1 + W_2$. É fácil ver que $B_1 \cup B_2$ gera $W_1 + W_2$. Logo, resta mostrar que $B_1 \cup B_2$ é l.i. Suponhamos que alguma combinação linear de elementos de $B_1 \cup B_2$ é zero, digamos,

$$\sum_{i \in I'} \alpha_i w_i + \sum_{j \in J'} \alpha_j u_j + \sum_{k \in K'} \alpha_k v_k = 0,$$

onde I', J' e K' são subconjuntos finitos de I, J e K respectivamente e $\alpha_j \in F, j \in I' \cup J' \cup K'$. Segue que

$$\sum_{i \in I'} \alpha_i w_i + \sum_{j \in J'} \alpha_j u_j = - \sum_{k \in K'} \alpha_k v_k$$

é um elemento de $W_1 \cap W_2$. Logo, existe um subconjunto finito I'' de I e um subconjunto $\{\beta_i : i \in I''\}$ de F tais que

$$- \sum_{k \in K'} \alpha_k v_k = \sum_{i \in I''} \beta_i w_i,$$

isto é,

$$\sum_{i \in I''} \beta_i w_i + \sum_{k \in K'} \alpha_k v_k = 0.$$

Como B_2 é base de W_2 , concluímos que $\beta_i = 0, i \in I''$ e $\alpha_k = 0, k \in K'$. Portanto,

$$\sum_{i \in I'} \alpha_i w_i + \sum_{j \in J'} \alpha_j u_j = 0.$$

Como B_1 é base de W_1 , $\alpha_i = 0, i \in I'$ e $\alpha_j = 0, j \in J'$. Isto conclui a prova. \square

Corolário 2.3.15 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V .*

- i) Se W_1 e W_2 têm dimensão finita sobre F então $W_1 + W_2$ também tem;*
- ii) Se $V = W_1 \oplus W_2$, então $\dim_F V = \dim_F W_1 + \dim_F W_2$.*

Exercícios 2.3.16 15) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , $\{v_1, \dots, v_n\}$ um subconjunto l.i. de V e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares. Defina $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) O conjunto $\{v - v_1, \dots, v - v_n\}$ é l.i.;
- ii) $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 1$.

16) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $\{v_1, v_2, v_3\}$ um subconjunto l.i. de V . Prove que $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ é l.i. se, e somente se, a característica de F é $\neq 2$.

17) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Defina $M_0 = \{0\}$ e $M_k = \{v_1, \dots, v_k\}$, $k = 1, \dots, n$ e escolha $u_k \in M_k \setminus M_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$. Prove que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V .

18) Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial sobre F . Prove que:

- i) Se F tem apenas dois elementos e $\dim_F V = 1$ então V tem uma única base;
- ii) Se V possui uma única base B (sobre F) então $V = B \cup \{0\}$.
- iii) Se V tem uma única base então F tem somente dois elementos e $\dim_F V = 1$.

19) Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , de dimensão n . Prove que V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão $2n$.

20) Prove que um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, é soma direta de subespaços de dimensão 1.

21) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e W_1, \dots, W_n subespaços de V tais que $V = W_1 + \dots + W_n$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$;
- ii) $\dim_F V = \dim_F W_1 + \dots + \dim_F W_n$.

2.4 Espaço Quociente

Vamos aqui estudar conjuntos que são “translações” de subespaços vetoriais.

Sejam V um espaço vetorial sobre F e W um subespaço de V . A relação

$$\{(u, v) \in V \times V : u - v \in W\}$$

é uma relação de equivalência sobre V . As classes de equivalência desta relação são da forma

$$v + W := \{u \in V : u - v \in W\} = \{v + w : w \in W\},$$

e são chamadas de *subespaços afins* de V , gerados por W . Subespaços vetoriais são subespaços afins, mas a recíproca nem sempre vale. Como subespaços afins são classes de equivalência, a intersecção de dois subespaços afins é o conjunto vazio ou um subespaço afim. Vamos denotar por V/W o conjunto de todos os subespaços afins de V . Definamos então as seguintes operações sobre V/W :

$$(u + W) + (v + W) = (u + v) + W, \quad \alpha(u + W) = (\alpha u) + W, \quad u, v \in V, \quad \alpha \in F.$$

Teorema 2.4.1 *Nas condições acima, V/W é um espaço vetorial sobre F .*

Demonstração. Inicialmente, notemos que as operações definidas acima independem dos representantes das classes, isto é, as operações estão bem definidas. No caso da primeira operação, a justificativa de tal fato é como segue. Suponhamos que $v, v', u, u' \in V$ e que $v + W = v' + W$ e que $u + W = u' + W$. Então $v' - v \in W$ e $u' - u \in W$. Como $W \leq V$, segue que $(v' - v) + (u' - u) \in W$. Em outras palavras, $v' + u' - (v + u) \in W$, ou seja, $(v' + u') + W = (v + u) + W$. A justificativa para a outra operação é similar. As condições da definição de espaço vetorial são facilmente verificáveis. \square

Definição 2.4.2 *O espaço vetorial apresentado no Teorema 2.4.1 é denominado espaço quociente de V por W .*

Definição 2.4.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W um subespaço de V . A codimensão de W em V é a dimensão de V/W sobre F .*

Exemplo 2.4.4 No espaço \mathbb{R}^3 usual, consideremos o subespaço $W = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Os elementos de \mathbb{R}^3/W são da forma $(\alpha, \beta, \gamma) + W = \{(\alpha, \beta, \gamma) + \lambda(1, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Geometricamente, vemos então que os subespaços afins de \mathbb{R}^3 são retas com direção $(1, 0, 0)$. O teorema a seguir revela que \mathbb{R}^3/W e o espaço \mathbb{R}^2 usual têm a mesma dimensão sobre \mathbb{R} .

Teorema 2.4.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W um subespaço de V .*

i) Se B_1 é uma base de W e $\{v + W : v \in B_2\}$ é uma base de V/W então $B_1 \cup B_2$ é uma base de V ;

ii) Se B é uma base de V e $B_1 \subset B$ é uma base de W então $\{v + W : v \in B \setminus B_1\}$ é uma base de V/W ;

iii) Vale a fórmula $\dim_F V = \dim_F W + \dim_F V/W$.

Demonstração. i) Seja $v \in V$. Existem um conjunto finito J de índices, escalares $\{\alpha_j : j \in J\}$ e vetores $\{v_j : j \in J\}$ de B_2 tais que

$$v + W = \sum_{j \in J} \alpha_j (v_j + W) = \left(\sum_{j \in J} \alpha_j v_j \right) + W.$$

Logo, $v - \left(\sum_{j \in J} \alpha_j v_j \right) \in W$ e, conseqüentemente, existem um conjunto finito I de índices, escalares $\{\beta_i : i \in I\}$ e vetores $\{w_i : i \in I\}$ de B_1 tais que

$$v - \left(\sum_{j \in J} \alpha_j v_j \right) = \sum_{i \in I} \beta_i w_i.$$

Segue que $v \in [B_1 \cup B_2]$. Portanto, $V = [B_1 \cup B_2]$. Para mostrarmos que $B_1 \cup B_2$ é l.i., assumamos a notação acima e suponhamos que

$$\sum_{i \in I} \beta_i w_i + \sum_{j \in J} \alpha_j v_j = 0.$$

Então,

$$0 + W = \sum_{i \in I} \beta_i (w_i + W) + \sum_{j \in J} \alpha_j (v_j + W) = \sum_{j \in J} \alpha_j (v_j + W).$$

Como $\{v_j + W : j \in J\}$ é l.i., $\alpha_j = 0, j \in J$. Assim, $\sum_{i \in I} \beta_i w_i = 0$. Como $\{w_i : i \in I\}$ é l.i., $\beta_i = 0, i \in I$.

ii) Exercício.

iii) Segundo a notação anterior, $\dim_F V$ é a cardinalidade de $B_1 \cup B_2$. Observando que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, concluímos então que $\dim_F V$ é a soma da cardinalidade de B_1 com a cardinalidade de B_2 , isto é, $\dim_F W + \dim_F V/W$. \square

Exercício 2.4.6 22) Sejam V um espaço vetorial, W_1 e W_2 subespaços de V e $u, v \in V$. Prove:

- i) $u + W_1 \subset v + W_2$ se, e somente se, $u - v \in W_2$ e $W_1 \subset W_2$;
- ii) $(u + W_1) \cap (v + W_2) \neq \emptyset$ se, e somente se, $u - v \in W_1 + W_2$;
- iii) Se $w \in (u + W_1) \cap (v + W_2)$ então $(u + W_1) \cap (v + W_2) = w + W_1 \cap W_2$;
- iv) Se $V = W_1 \oplus W_2$, então $(u + W_1) \cap (v + W_2)$ é um conjunto unitário.

2.5 Coordenadas

Uma das características fundamentais de um espaço vetorial sobre F de dimensão finita n é que, usando uma ou mais bases de V , podemos introduzir coordenadas em V , análogas às “coordenadas naturais” x_i de um vetor $v = (x_1, \dots, x_n)$ do espaço usual F^n . Para isso, alguns cuidados fazem-se necessários. Um deles é o estabelecimento de uma ordenação dos elementos das bases utilizadas. Com isso, podemos dizer qual é o primeiro elemento da base, o segundo, etc. Isto significa que o conceito de coordenadas depende de como os vetores da base estão dispostos e não somente do conjunto de vetores que forma a base como um todo.

Definição 2.5.1 *Seja V um espaço vetorial sobre F de dimensão finita. Uma base ordenada de V é uma seqüência finita de vetores l.i. que gera V .*

Os conjuntos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(0, 1), (1, 0)\}$ são bases ordenadas distintas do espaço vetorial \mathbb{R}^2 usual.

Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ordenada de V . Dado um vetor v de V , este escreve-se de maneira única como combinação linear de elementos de B_1 :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F.$$

Definição 2.5.2 *O escalar α_i é denominado a i -ésima coordenada de v em relação à base ordenada B_1 .*

Cada base ordenada B_1 de V determina uma correspondência biunívoca entre V e F^n . Esta correspondência associa a cada elemento v de V a n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ formada

pelos escalares definidos no processo acima descrito. O vetor

$$v_{B_1} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t$$

é denominado o *vetor das coordenadas* de v em relação a B_1 . Se $B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ é outra base ordenada de V então podemos escrever

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \dots + \alpha_{nj}v_n, \quad \alpha_{ij} \in F, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Notemos que a matriz $M_{B_1}^{B_2} := (\alpha_{ij}) \in M_{n \times n}(F)$ é inversível e, $v_{B_1} = M_{B_1}^{B_2} v_{B_2}$.

Teorema 2.5.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n e B_1 e B_2 bases ordenadas de V . Então existe uma única matriz P de $M_{n \times n}(F)$ inversível que satisfaz $v_{B_1} = P v_{B_2}$.*

Demonstração. Exercício.

Definição 2.5.4 *A matriz do teorema anterior é denominada matriz de mudança da base B_1 para a base B_2 .*

Exercícios 2.5.5 23) Verifique quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial \mathbb{R}^n .

- i) $W_1 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0\}$;
- ii) $W_2 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 \alpha_2 = 0\}$;
- iii) $W_3 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_k \in \mathbb{Z} \text{ para algum } k\}$;
- iv) $W_4 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_k \geq 0 \text{ para todo } k\}$;
- v) $W_5 = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1\}$.

24) Verifique quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço usual $V = M_{n \times n}(F)$.

- i) $W_1 = \{A \in V : A \text{ não é inversível}\}$;
- ii) $W_2 = \{A \in V : AB = BA, B \text{ fixa}\}$;
- iii) $W_3 = \{A \in V : A^2 = A\}$.

25) Verifique quais dos seguintes conjuntos são subespaços de $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- i) $W_1 = \{f \in V : f(1) = 1\}$;
- ii) $W_2 = \{f \in V : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$;
- iii) $W_3 = \{f \in V : f(t) = f(1-t), t \in \mathbb{R}\}$;
- iv) $W_4 = \{f \in V : \int_0^1 f(t)f(1-t)dt = 0\}$;
- v) $W_5 = \{f \in V : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^3(1 + |f(t)|)^{-2}dt < \infty\}$.
- vi) $W_6 = \{f \in V : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2(1 + |f(t)|)^{-3}dt < \infty\}$.
- vii) $W_7 = \{f \in V : \int_0^1 f(t)dt \text{ é racional}\}$.

26) Determine todos os subespaços de \mathbb{Z}_3^2 e \mathbb{Z}_2^3 .

27) Sejam W_1, W_2, W_3 e W_4 subespaços de um espaço vetorial V .

i) Mostre que as seguintes inclusões são válidas: $W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3 \subset W_1 \cap (W_2 + W_3)$ e $(W_1 \cap W_2) + W_3 \subset (W_1 + W_3) \cap (W_2 + W_3)$;

ii) Exiba exemplos para mostrar que as inclusões do item i) podem ser próprias;

iii) Mostre que $W_1 \cap (W_2 + W_1 \cap W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$;

iv) Se $W_1 \cap W_2 = W_3 \cap W_4$, mostre que $W_1 = (W_1 + (W_2 \cap W_3)) \cap (W_1 + (W_2 \cap W_4))$.

28) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p e W_1, W_2, \dots, W_j subespaços de V . Suponha que $p - 2 > j$ e que $W_j \not\subset \cup_{i \neq j} W_i$. Mostre que se $V = \cup_{i=1}^j W_i$ então $V = W_i$ para algum i .

29) Seja S um subconjunto qualquer do espaço vetorial usual $P(\mathbb{R})$. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \exp(x)$ não é um elemento de $[S]$.

30) Seja F um corpo e consideremos os seguintes subconjuntos de F^3 :

$$W_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) : \alpha, \beta \in F\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(\gamma, \gamma, \gamma) : \gamma \in F\}$$

Verifique que W_1 e W_2 são subespaços de F^3 e que $F^3 = W_1 \oplus W_2$.

31) Seja F um corpo de característica $\neq 2$ e consideremos o espaço $V = M_{n \times n}(F)$.

i) Verifique que ambos, $W_1 = \{A \in V : A = A^t\}$ e $W_2 = \{A \in V : A = -A^t\}$ são subespaços de V ;

ii) Verifique que $V = W_1 \oplus W_2$.

32) Sejam W_1, W_2 e W_3 subespaços de um espaço vetorial V . Mostre que:

i) Se $W_1 \subset W_3$, então $W_3 \cap (W_1 + W_2) = W_1 + (W_2 \cap W_3)$;

ii) A hipótese $W_1 \subset W_3$ em i) é essencial;

iii) Se $V = W_1 \oplus W_2$ então a igualdade $W_3 = (W_1 \cap W_3) \oplus (W_2 \cap W_3)$ não vale em geral;

iv) Se $V = W_1 \oplus W_2$ e $W_1 \subset W_3$ então $W_3 = W_1 \oplus (W_2 \cap W_3)$.

33) Se V_1 e V_2 são espaços vetoriais sobre um mesmo corpo, $W_1 = \{(v_1, 0) : v_1 \in V_1\}$ e $W_2 = \{(0, v_2) : v_2 \in V_2\}$, mostre que $V_1 \times V_2 = W_1 \oplus W_2$.

34) Seja F um corpo. Se $W = \{(0, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in F\}$, prove que F^3/W é gerado pela classe $(1, 0, 0) + W$.

35) Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo, $V_1 \subset V$ e $W_1 \subset W$. Prove que:

i) Se $V_1 \leq V$ e $W_1 \leq W$ então $V_1 \times W_1 \leq V \times W$;

ii) $[V_1 \times W_1] \subset [V_1] \times [W_1]$;

iii) Em geral não se tem igualdade no item ii);

iv) $[V_1] \times [W_1] = [(V_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times W_1)]$.

36) Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo. Mostre que $V \times W$ é finitamente gerado se, e somente se, V e W são finitamente gerados.

37) Mostre que o subconjunto $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, onde $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, e $f_3(t) = \sin t + \pi/3$, é l.i. O que acontece se trocarmos f_3 por f_4 , onde $f_4(t) = \sin t + \pi/6$?

38) Mostre que o subconjunto $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, onde $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, e f_3 é um polinômio não-nulo, é l.i. O que acontece se trocarmos f_3 por f_4 , onde $f_4(t) = \exp(t)$?

39) No espaço vetorial \mathbb{Z}_3^3 decida quais dos seguintes conjuntos são l.i.:

i) $S_1 = \{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0})\}$;

ii) $S_2 = \{(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})\}$;

iii) $S_3 = \{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{1})\}$;

iv) $S_4 = \{(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})\}$.

40) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $\{v_1, \dots, v_n\}$ um subconjunto de V . Prove: o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.d. se, e somente se, algum dos vetores v_k ($k > 1$) é combinação linear de v_1, \dots, v_{k-1} .

41) Encontre bases de $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ que estejam contidas nos seguintes conjuntos:

i) $W_1 = \{A \in V : A^2 = A\}$;

ii) $W_2 = \{A \in V : A \text{ é inversível}\}$;

iii) $W_3 = \{A \in V : \det A = 1\}$.

42) Encontre $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

43) Se F é um corpo e $W = \{(x, y, x + y) : x, y \in F\}$, determine a dimensão de F^3/W .

44) Seja V um espaço vetorial sobre F e suponha que exista uma sequência $W_0, W_1 \dots$ de J subespaços de V (J pode ser inclusive a cardinalidade de \mathbb{N}) satisfazendo:

i) $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \dots$ (inclusões próprias);

ii) $V = \cup_{j \in J} W_j$;

iii) Se $M \leq V$ e $W_j \subset M \subset W_{j+1}$ para algum j então $M = W_j$ ou $M = W_{j+1}$.

Mostre que $\dim_F V = J$.

45) Sejam F_1, F_2 e F_3 corpos tais que $F_1 \subset F_2 \subset F_3$. Demonstre que $\dim_{F_1} F_2 \cdot \dim_{F_2} F_3 = \dim_{F_1} F_3$.

46) Mostre que não existe um corpo F tal que $\mathbb{R} \subset F \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{R} \neq F \neq \mathbb{C}$.

47) Dê exemplo de um espaço vetorial V e subespaços V_1, V_2 e V_3 de V de modo que $V = V_1 \oplus V_2 = V_2 \oplus V_3 = V_3 \oplus V_1$. A dimensão do espaço V que você encontrou é ímpar?

48) Seja V um espaço vetorial não-trivial sobre um corpo infinito. Mostre que V contém infinitos elementos.

49) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo de cardinalidade infinita. Então V não é uma união finita de subespaços próprios. Dê um exemplo para mostrar que a hipótese sobre a cardinalidade de F não pode ser retirada.

51) Sejam X um conjunto não-vazio, V um espaço vetorial sobre F e $\{f_1, \dots, f_n\}$ um subconjunto l.i. de V^X . Se Y é um conjunto não-vazio e $g : Y \rightarrow X$ é uma função sobrejetora, prove que o conjunto $\{f_1 \circ g, \dots, f_n \circ g\}$ é l.i.

52) Seja $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Se para cada inteiro positivo n , $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ é a função $f_n(x) = -1 + \operatorname{tg}^n x$, prove que $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$ é um subconjunto l.i. de \mathbb{R}^I .

53) Dizemos que um subconjunto $\{x_0, \dots, x_n\}$ de cardinalidade $n + 1$ de \mathbb{R}^n está em *posição adequada* se o conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ é l.i. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\{x_0, \dots, x_n\}$ está em posição adequada;

ii) Se $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, então $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$.

54) Sejam W_1, W_2 e W_3 subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V . Prove:

i) $\dim W_1 = \dim(W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3) + \dim W_1 \cap W_3 - \dim(W_1 + W_2) \cap W_3$;

ii) $\dim W_1 \cap W_2 + \dim(W_1 + W_2) \cap W_3 = \dim W_1 \cap W_3 + \dim(W_1 + W_3) \cap W_2$;

iii) Se $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{0\}$ então $(W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3) = W_1$;

iv) $2 \dim(W_1 + W_2 + W_3) \leq \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 + W_3) + \dim(W_2 + W_3)$;

v) Vale a igualdade em iv) se, e somente se, o conjunto $\{W_1, W_2, W_3\}$ é independente (Sugestão: $\dim(W_1 + W_2 + W_3) \leq \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 + W_3) - \dim W_1$, etc);

vi) $2(\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3) \geq 3[\dim(W_1 \cap W_2) + \dim W_2 \cap W_3 + \dim W_1 \cap W_3 - \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)]$;

vii) Vale a igualdade em vi) se, e somente, se $W_1 = W_2 = W_3$ (Sugestão: Use desigualdades do tipo $\dim W_1 \cap W_2 \cap W_3 \geq \dim W_1 \cap W_2 + \dim W_2 \cap W_3 - \dim(W_1 + W_3)$);

viii) Se $V = W_1 \oplus W_2$ então $2 \dim W_3 - \dim V \leq \dim(W_1 \cap W_3) + \dim(W_2 \cap W_3) \leq \dim W_3$.

Capítulo 3

Transformações Lineares

3.1 Linearidade

Nesta seção, estudaremos em detalhes funções entre espaços vetoriais que de alguma forma respeitam as estruturas dos espaços envolvidos. Usaremos as notações $+$ e \cdot para indicar adição e multiplicação por escalar em vários espaços vetoriais diferentes.

Definição 3.1.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo F . Uma transformação linear de U em V é uma função $T : U \rightarrow V$ que satisfaz:*

$$TL1. \quad T(u + u') = T(u) + T(u'), \quad u, u' \in U;$$

$$TL2. \quad T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \alpha \in F, \quad u \in U.$$

Observação 3.1.2 As condições TL1 e TL2 são equivalentes à condição única:

$$TL3. \quad T(\alpha u + u') = \alpha T(u) + T(u'), \quad \alpha \in F, \quad u, u' \in U.$$

Desse modo, toda transformação linear $T : U \rightarrow V$ “leva” combinações lineares de elementos de U em combinações lineares de elementos de V .

Observação 3.1.3 As igualdades $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$ revelam que uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ sempre satisfaz $T(0) = 0$.

Vamos denotar o conjunto de todas as transformações lineares de U em V por $\mathcal{L}(U, V)$. No caso em que $U = V$ escreveremos simplesmente $\mathcal{L}(U)$.

Definição 3.1.4 *Os elementos de $\mathcal{L}(U)$ são chamados de operadores lineares sobre U .*

- Exemplos 3.1.5**
1. Se U e V são espaços vetoriais sobre um mesmo corpo, $T : U \rightarrow V$ dada por $T(u) = 0$, $u \in U$, é um elemento de $\mathcal{L}(U, V)$. $S : U \rightarrow U$ dada por $S(u) = u$, $u \in U$, é um elemento de $\mathcal{L}(U)$.
 2. Sejam $U = M_{n \times n}(F)$ e A um elemento fixo de U . Então $T : U \rightarrow U$ dada por $T(X) = AX$, $X \in U$, é um elemento de $\mathcal{L}(U)$.
 3. Se $U = \mathbb{R}^\infty$, então $T : U \rightarrow U$ dada por $T((x_1, x_2, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $(x_1, x_2, \dots) \in U$, é um elemento de $\mathcal{L}(U)$. A expressão $S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ também define um elemento de $\mathcal{L}(U)$.
 4. $T : P_n(F) \rightarrow P_{n-1}(F)$, $n \geq 1$, dada por $T(p) = p'$ (derivada de p), $p \in P_n(F)$, é um elemento de $\mathcal{L}(P_n(F), P_{n-1}(F))$.
 5. Se V é um espaço vetorial sobre F e W é um subespaço de V , então $q_W : V \rightarrow V/W$, dada por $q_W(v) = v + W$, $v \in V$, é um elemento de $\mathcal{L}(V, V/W)$.

Definição 3.1.6 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então:*

$$\text{Ker } T := \{u \in U : T(u) = 0\},$$

$$\text{Im } T := \{T(u) \in V : u \in U\} \quad e$$

$$\text{Coker } T := V/\text{Im } T.$$

Observação 3.1.7 Como toda transformação $T \in \mathcal{L}(U, V)$ satisfaz $T(0) = 0$ então $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ são conjuntos não-vazios.

Teorema 3.1.8 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ são subespaços de U e V respectivamente.*

Demonstração. Exercício. □

Definição 3.1.9 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então*

$$\rho(T) := \text{posto de } T := \dim_F \text{Im } T \quad e$$

$$\eta(T) := \text{nulidade de } T := \dim_F \text{Ker } T$$

Teorema 3.1.10 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então $\dim_F U = \rho(T) + \eta(T)$.*

Demonstração. Seja B uma base de $\text{Im } T$. Para cada v de B , escolha um elemento $u = u_v$ de U tal que $T(u_v) = v$. Defina $B_1 = \{u_v : v \in \text{Im } T\}$. Se alguma combinação linear de elementos de B_1 for nula, digamos $\sum_i \alpha_i u_{v_i} = 0$, então

$$0 = T(0) = T\left(\sum_i \alpha_i u_{v_i}\right) = \sum_i \alpha_i T(u_{v_i}) = \sum_i \alpha_i v_i.$$

Como B é l.i, segue que $\alpha_i = 0$ para todo i . Em outras palavras, o conjunto B_1 é l.i. Para concluir a prova do teorema vamos mostrar que $U = [B_1] \oplus \text{Ker } T$. Seja $u \in U$. Como $T(u) \in \text{Im } T$, existem $v_1, \dots, v_n \in B$ tais que

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i T(u_{v_i}) = T\left(\sum_{i=1}^n \beta_i u_{v_i}\right), \quad \beta_i \in F$$

Logo,

$$u - \sum_{i=1}^n \beta_i u_{v_i} \in \text{Ker } T$$

e, conseqüentemente,

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_i u_{v_i} + \left(u - \sum_{i=1}^n \beta_i u_{v_i}\right) \in [B_1] \oplus \text{Ker } T.$$

Segue que $U = [B_1] + \text{Ker } T$. Se $u \in [B_1] \cap \text{Ker } T$, então, com a mesma notação usada acima, temos que

$$0 = T(u) = T\left(\sum_{i=1}^n \beta_i u_{v_i}\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i.$$

Como B é base de $\text{Im } T$, $\beta_i = 0$ para todo i , ou seja, $u = 0$. A conclusão segue do Corolário 2.3.15. \square

3.2 O Espaço das Transformações Lineares

Além de criar uma estrutura de espaço vetorial em $\mathcal{L}(U, V)$, introduzimos outras operações entre elementos de $\mathcal{L}(U, V)$ que preservam linearidade.

Teorema 3.2.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\alpha \in F$. As funções definidas por*

$$(S + T)(u) = S(u) + T(u), \quad u \in U \quad e$$

$$(\alpha T)(u) = \alpha T(u), \quad u \in U$$

são elementos de $\mathcal{L}(U, V)$.

Demonstração. Exercício. □

O conjunto $\mathcal{L}(U, V)$ munido das duas operações definidas no teorema anterior é um espaço vetorial sobre F . Na verdade, ele é um subespaço de V^U .

Teorema 3.2.2 *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre F , $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Então a composição $S \circ T$ de S com T é um elemento de $\mathcal{L}(U, W)$.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 3.2.3 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Se T é uma função inversível então sua inversa T^{-1} é um elemento de $\mathcal{L}(V, U)$.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 3.2.4 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Valem as seguintes afirmações:*

- i) T é injetora se, e somente se, $\text{Ker } T = \{0\}$;
- ii) T é sobrejetora se, e somente se, $\text{Coker } T = \{\text{Im } T\}$.

Demonstração. i) Suponha que T seja injetora e $u \in \text{Ker } T$. Então $T(u) = 0 = T(0)$ e, portanto, $u = 0$. Segue que $\text{Ker } T = \{0\}$. Reciprocamente, assumamos que $\text{Ker } T = \{0\}$ e suponhamos que $T(u) = T(u_1)$, $u, u_1 \in U$. Então, $T(u - u_1) = 0$, ou seja, $u - u_1 \in \text{Ker } T$. Segue que $u - u_1 = 0$ e T é injetora.

ii) Dizer que $V/\text{Im } T = \{\text{Im } T\}$ é equivalente a dizer que $\text{Im } T = V$. O resultado segue. □

Exemplos 3.2.5 1. Consideremos o espaço $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ munido das seguintes operações: a adição de vetores em V é a multiplicação usual de números reais e a multiplicação de elementos de V por números reais é a exponenciação do elemento pelo

número real. Então V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(v) = \ln v$ é um elemento de $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Ainda, $\text{Ker } T = \{1\}$ e $\text{Coker } T = \{\text{Im } T\} = \{\mathbb{R}\}$.

2. O conjunto $C(\mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ é contínua}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. A função $T : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ definida por

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in C(\mathbb{R})$$

é um elemento de $\mathcal{L}(C(\mathbb{R}))$. Não é difícil ver que $\text{Ker } T = \{0\}$ e que $\text{Im } T := C^1(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : f \text{ é diferenciável}\}$.

3. Já sabemos que a função $T : P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p'$ é um elemento de $\mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$. Aqui, $\text{Ker } T = \{p \in P(\mathbb{R}) : p \text{ é constante}\}$ e $\text{Coker } T = \{\text{Im } T\} = \{P(\mathbb{R})\}$.

Teorema 3.2.6 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) T é injetora;
- ii) Se $A \subset U$ é l.i. então $T(A)$ é l.i.

Demonstração. Exercício.

O próximo resultado estabelece que para transformações lineares entre espaços vetoriais de mesma dimensão finita, os conceitos de bijetividade, injetividade e sobrejetividade coincidem.

Teorema 3.2.7 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Assuma que $\dim_F U = \dim_F V < \infty$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) T é uma função inversível;
- ii) T é injetora;
- iii) T é sobrejetora.

Demonstração. É suficiente provar que ii) implica iii) e que iii) implica i). Se T é injetora então $\text{Ker } T = \{0\}$ e conseqüentemente $\eta(T) = 0$. Pelo Teorema 3.1.10, $\rho(T) = \dim_F U = \dim_F V$. Como $\text{Im } T \leq V$, segue que $\text{Im } T = V$. Portanto, ii) implica iii). Se T é sobrejetora, $\rho(T) = \dim_F V$. A hipótese e o Teorema 3.1.10 revelam que $\eta(T) = 0$. Em outras palavras, T é injetora. Portanto, T é bijetora e então inversível. Isto mostra que iii) implica i). □

O resultado a seguir será usado nas seções subseqüentes.

Teorema 3.2.8 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , $\{u_i : i \in I\}$ uma base de U e $\{v_i : i \in I\}$ um subconjunto de V . Então existe uma única transformação linear $T : U \rightarrow V$ tal que $T(u_i) = v_i$, $i \in I$. Além disso, T é injetora se, e somente se, $\{v_i : i \in I\}$ é l.i.; T é sobrejetora se, e somente se, $[\{v_i : i \in I\}] = V$.*

Demonstração. Cada elemento u de U pode ser escrito de maneira única como uma combinação linear de elementos de $\{u_i : i \in I\}$, digamos, $u = \sum_{i \in J} \alpha_i u_i$, onde J é um subconjunto finito de I (que depende de u). Definimos então T da seguinte forma

$$T(u) = \sum_{i \in J} \alpha_i v_i, \quad u \in U.$$

T é certamente um elemento de $\mathcal{L}(U, V)$ satisfazendo $T(u_i) = v_i$, $i \in I$. A unicidade de T segue do fato de $\{u_i : i \in I\}$ ser uma base de U . O núcleo de T é dado por

$$\text{Ker } T = \left\{ \sum_{i \in J} \alpha_i u_i : \sum_{i \in J} \alpha_i v_i = 0 \right\}$$

Logo, $\text{Ker } T = \{0\}$ se, e somente se, $\{v_i : i \in I\}$ é l.i. A imagem de T é precisamente

$$\text{Im } T = \left\{ \sum_{i \in J} \alpha_i v_i : J \subset I, \quad J \text{ finito, } \alpha_i \in F, \quad i \in J \right\}$$

Logo, T é sobrejetora se, e somente se, $[\{v_i : i \in I\}] = V$. □

Utilizaremos o restante desta seção para encontrarmos uma fórmula que calcule a dimensão do espaço $\mathcal{L}(U, V)$.

Teorema 3.2.9 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F . Valem as seguintes afirmações:*

- i) $\dim_F \mathcal{L}(U, V) \geq \dim_F U \dim_F V$;*
- ii) Se $\dim_F U < \infty$ então $\dim_F \mathcal{L}(U, V) = \dim_F U \dim_F V$;*
- iii) Se ambos U e V não têm dimensão finita, então a desigualdade em i) é estrita.*

Demonstração. Escolha bases $\{u_i : i \in I\}$ e $\{v_j : j \in J\}$ de U e V , respectivamente. Para cada par $(i, j) \in I \times J$, podemos usar o teorema anterior para construir $T_{ij} \in \mathcal{L}(U, V)$

satisfazendo $T_{ij}(u_i) = v_j$ e $T_{ij}(u_k) = 0$, $k \neq i$. Suponhamos inicialmente que alguma combinação linear dos T_{ij} seja nula, digamos

$$\sum_{(i,j) \in K} \alpha_{ij} T_{ij} = 0, \quad K \subset I \times J, \quad K \text{ finito}, \quad \alpha_{ij} \in F, \quad (i,j) \in K.$$

Escolhamos um par $(i_0, j) \in K$. Então

$$0 = \sum_{(i,j) \in K} \alpha_{ij} T_{ij}(u_{i_0}) = \sum_{(i_0,j) \in K} \alpha_{i_0j} T_{i_0j}(u_{i_0}) = \sum_{(i_0,j) \in K} \alpha_{i_0j} v_j.$$

Segue que $\alpha_{i_0,j} = 0$, para todo par $(i_0, j) \in K$. Como i_0 é arbitrário, concluímos que $\alpha_{ij} = 0$, $(i,j) \in K$. Logo, $\{T_{ij} : (i,j) \in I \times J\}$ é l.i. Em particular, $\dim_F \mathcal{L}(U, V)$ é no mínimo a cardinalidade de $I \times J$. Isto prova i).

Suponha agora que $\dim_F U = n$. Adote as notações acima e escreva $I = \{1, \dots, n\}$. Pelo item anterior, já temos que $\{T_{ij} : i \in I, j \in J\}$ é l.i. Vamos mostrar agora que tal conjunto gera $\mathcal{L}(U, V)$. De fato, se $T \in \mathcal{L}(U, V)$, então $\dim_F \text{Im } T < \infty$. Logo, existe um subconjunto finito J' de J tal que $\text{Im } T = [\{v_j : j \in J'\}]$. Daí, para cada $i \in I$ existem escalares α_j^i , $j \in J'$, tais que

$$T(u_i) = \sum_{j \in J'} \alpha_j^i v_j = \sum_{j \in J'} \alpha_j^i T_{ij}(u_i).$$

Segue que

$$T \in [\{T_{ij} : i \in I, j \in J'\}] \subset [\{T_{ij} : i \in I, j \in J\}].$$

Isto conclui a prova de ii).

Se U e V não têm dimensão finita, então é fácil construir $T \in \mathcal{L}(U, V)$ que não é uma combinação linear dos T_{ij} construídos acima. Portanto, $\dim_F \mathcal{L}(U, V)$ é um cardinal maior do que o produto das cardinalidades de I e J . \square

3.3 Isomorfismos

Estudamos aqui algumas particularidades das transformações lineares que são bijetoras.

Definição 3.3.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F . Dizemos que U e V são isomorfos (ou que U é isomorfo a V) e escrevemos $U \cong V$ quando existe $T \in \mathcal{L}(U, V)$ bijetora. T é então chamada um isomorfismo de U em V .*

Teorema 3.3.2 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F . São equivalentes:*

i) U e V são isomorfos;

ii) $\dim_F U = \dim_F V$

Demonstração. Suponhamos que exista um isomorfismo $T : U \rightarrow V$. Se B é uma base de U então, pelo Teorema 3.2.8, $T(B)$ é uma base de V . Logo, U e V tem a mesma dimensão. Reciprocamente, se U e V têm a mesma dimensão, existem bases $\{u_i : i \in I\}$ e $\{v_i : i \in I\}$ de U e V respectivamente, ambas indexadas no mesmo conjunto I . Pelo Teorema 3.2.8, existe uma única transformação linear bijetora $S : U \rightarrow V$ tal que $S(u_i) = v_i, i \in I$. Portanto, U e V são isomorfos. \square

Teorema 3.3.3 *Seja U um espaço vetorial sobre F de dimensão finita n . Então U é isomorfo a F^n .*

Demonstração. Segue diretamente do teorema anterior. \square

Exercício 3.3.4 1) Seja F um corpo qualquer. Prove:

i) $V = \{(\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots) : \alpha, \beta \in F\}$ é um subespaço de F^∞ ;

ii) V é isomorfo a F^2 .

Teorema 3.3.5 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F . Se $\dim_F U = n$, então $\mathcal{L}(U, V)$ é isomorfo a V^n .*

Demonstração. Seja $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U . Definamos $\psi : \mathcal{L}(U, V) \rightarrow V^n$ por $\psi(T) = (T(u_1), \dots, T(u_n))$. É fácil verificar que $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(U, V), V^n)$. Se $\psi(T) = 0$, $T \in \mathcal{L}(U, V)$, então $T(u_i) = 0, i = 1, \dots, n$. Como B é base de U , segue que $T = 0$. Portanto, $\text{Ker } \psi = \{0\}$, ou seja, ψ é injetora. Finalmente, seja $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$. Pelo Teorema 3.2.8, existe uma única $T \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $T(u_i) = v_i, i = 1, \dots, n$. Daí, $\psi(T) = (T(u_1), \dots, T(u_n)) = (v_1, \dots, v_n) = v$. Portanto, ψ é sobrejetora. \square

Matrizes aparecem naturalmente quando descrevemos transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita. Vejamos isso.

Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita, e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U e $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ uma base de V . Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existem escalares α_{ij} , $i = 1, \dots, m$, tais que

$$T(u_j) = \alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i$$

Definição 3.3.6 A matriz de $M_{m \times n}(F)$ cuja entrada ij é α_{ij} é denominada de matriz (das coordenadas) de T em relação às bases (ordenadas) B e C .

A matriz da definição anterior será denotada por $[T]_B^C$ ou simplesmente T_B^C .

ATENÇÃO: A matriz T_B^C depende obviamente das bases B e C e de T . Qualquer alteração nos elementos ou ordem dos elementos de alguma das bases produz uma matriz diferente. Em outras palavras, a mesma transformação linear pode ser representada por várias matrizes de $M_{m \times n}(F)$.

Observação 3.3.7 1) Seja u um elemento de U . Mantendo-se as notações acima, podemos escrever

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, \quad \alpha_j \in F, \quad j = 1, \dots, n.$$

Então

$$T(u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T(u_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \alpha_j \right) v_i.$$

Isto mostra que $T(u)$ fica completamente determinado pelas coordenadas de u em relação à base B e pela matriz T_B^C .

2) Se $U = V$, a matriz de mudança da base B para a base C coincide com a matriz da transformação identidade I_V em relação às bases B e C .

3) Dada uma matriz $A \in M_{m \times n}(F)$, existe uma única $T \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $T_B^C = A$ (veja Teorema 3.2.8).

4) As colocações anteriores permitem estabelecer uma relação biunívoca entre $\mathcal{L}(U, V)$ e $M_{m \times n}(F)$. Entretanto, essa correspondência depende de bases previamente escolhidas nos espaços envolvidos.

Teorema 3.3.8 Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , de dimensões n e m , respectivamente. Então $\mathcal{L}(U, V)$ e $M_{m \times n}(F)$ são isomorfos.

Demonstração. Fixemos bases $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ de U e V , respectivamente. Definamos $\psi : \mathcal{L}(U, V) \rightarrow M_{m \times n}(F)$ por $\psi(T) = T_B^C$. Se $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\alpha \in F$, então $[T + S]_B^C = T_B^C + S_B^C$ e $[\alpha T]_B^C = \alpha T_B^C$. Segue que $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(U, V), M_{m \times n}(F))$. Se $T_B^C = 0$, para alguma $T \in \mathcal{L}(U, V)$, então $T(u_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Como B é base de U , $T = 0$. Portanto ψ é injetora. Finalmente, seja $D = (\beta_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$. Pelo Teorema 3.2.8, existe uma única $T \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} v_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Isto significa que $T_B^C = D$, isto é, $\psi(T) = D$. Portanto, ψ é sobrejetora. \square

Observação 3.3.9 Nas condições do teorema anterior e lembrando o Teorema 3.2.9, temos que $\dim_F \mathcal{L}(U, V) = m.n$.

Teorema 3.3.10 *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre F , todos de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Se B, C , e D são bases de U, V e W respectivamente, então $[S \circ T]_B^D = S_C^D T_B^C$.*

Demonstração. Escrevamos $B = \{u_1, \dots, u_p\}$, $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $D = \{w_1, \dots, w_m\}$. Escrevamos ainda $T_B^C = (\alpha_{ij})$ e $S_C^D = (\beta_{jl})$. Então,

$$\begin{aligned} (S \circ T)(u_j) &= S \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{lj} v_l \right) = \sum_{l=1}^n \alpha_{lj} S(v_l) \\ &= \sum_{l=1}^n \alpha_{lj} \left(\sum_{i=1}^m \beta_{il} w_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=1}^n \beta_{il} \alpha_{lj} \right) w_i. \end{aligned}$$

Segue que

$$[S \circ T]_B^D = \left(\sum_{l=1}^n \beta_{il} \alpha_{lj} \right) = S_C^D T_B^C,$$

completando a prova. \square

Corolário 3.3.11 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e B e C duas bases de V . Então $M_B^C M_C^B = M_C^B M_B^C = I$.*

Demonstração. Exercício.

Teorema 3.3.12 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita. Sejam ainda $T \in \mathcal{L}(U, V)$, B_1 e B_2 bases de U e C_1 e C_2 bases de V . Então, $T_{B_1}^{C_1} = M_{C_1}^{C_2} T_{B_2}^{C_2} M_{B_2}^{B_1}$.*

Demonstração. Isso é conseqüência da seguinte sequência de igualdades

$$\begin{aligned} T_{B_1}^{C_1} &= [T \circ I_U]_{B_1}^{C_1} = T_{B_2}^{C_1} [I_U]_{B_1}^{B_2} = T_{B_2}^{C_1} M_{B_2}^{B_1} \\ &= [I_V \circ T]_{B_2}^{C_1} M_{B_2}^{B_1} = [I_V]_{C_2}^{C_1} T_{B_2}^{C_2} M_{B_2}^{B_1} = M_{C_1}^{C_2} T_{B_2}^{C_2} M_{B_2}^{B_1}, \end{aligned}$$

obtidas com a ajuda do corolário anterior. □

Corolário 3.3.13 *Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita, B e C bases de U e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então $T_B^B = M_B^C T_C^C M_C^B$.*

Observação 3.3.14 Como M_C^B é a matriz inversa de M_B^C , o corolário acima revela que as matrizes T_B^B e T_C^C são semelhantes.

Teorema 3.3.15 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , de dimensões finitas n e m , respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Escreva $s := \rho(T)$. Então existem bases B de U e C de V tais que*

$$T_B^C = \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{m \times n}$$

onde I_s é a matriz identidade de ordem s com entradas em F .

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.10, $\eta(T) = n - s$. Fixemos uma base $B_1 = \{u_1, \dots, u_{n-s}\}$ de $\text{Ker } T$. Pelo Teorema 2.3.7-ii), podemos encontrar vetores w_1, \dots, w_s de U tais que $B = \{w_1, \dots, w_s, u_1, \dots, u_{n-s}\}$ é uma base de U . Segue que

$$\text{Im } T = T(U) = T([B]) = [\{T(w_1), \dots, T(w_s)\}].$$

Como o conjunto $C_1 := \{T(w_1), \dots, T(w_s)\}$ tem no máximo s elementos e $\rho(T) = s$, concluímos que C_1 é uma base de $\text{Im } T$. Usando o Teorema 2.3.7-ii) mais uma vez, obtemos vetores v_1, \dots, v_{m-s} de V tais que $C := \{T(w_1), \dots, T(w_s), v_1, \dots, v_{m-s}\}$ é uma base de V . É fácil ver que T_B^C tem a forma desejada. □

Terminamos esta seção, apresentando alguns isomorfismos naturais envolvendo espaços quocientes.

Teorema 3.3.16 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então $U/\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ são isomorfos.*

Demonstração. Definamos $\psi : U/\text{Ker } T \rightarrow V$ por $\psi(u + \text{Ker } T) = T(u)$, $u \in U$. Inicialmente notemos que a definição de ψ não é afetada pelo fato de um elemento de seu domínio ser multiplamente representável. De fato, se $u, w \in U$ e $u + \text{Ker } T = w + \text{Ker } T$ então $u - w \in \text{Ker } T$ e, conseqüentemente, $T(u - w) = 0$. Portanto, $T(u) = T(w)$, ou seja, $\psi(u + \text{Ker } T) = \psi(w + \text{Ker } T)$. A linearidade de ψ segue das seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \psi((u + \text{Ker } T) + (w + \text{Ker } T)) &= \psi((u + w) + \text{Ker } T) \\ &= T(u + w) = T(u) + T(w) \\ &= \psi(u + \text{Ker } T) + \psi(w + \text{Ker } T) \end{aligned}$$

e

$$\psi(\alpha(u + \text{Ker } T)) = \psi(\alpha u + \text{Ker } T) = T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \psi(u + \text{Ker } T)$$

que valem para $u, w \in U$ e $\alpha \in F$. A injetividade segue do seguinte argumento: se $u + \text{Ker } T \in \text{Ker } \psi$ então $T(u) = 0$. Logo, $u \in \text{Ker } T$, ou seja, $u + \text{Ker } T = \text{Ker } T$. Portanto, $\text{Ker } \psi = \{\text{Ker } T\}$. \square

Corolário 3.3.17 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V satisfazendo $V = W_1 \oplus W_2$. Então V/W_1 e W_2 são isomorfos.*

Demonstração. Definamos $T : W_2 \rightarrow V/W_1$ por $T(w_2) = w_2 + W_1$. É fácil verificar que $T \in \mathcal{L}(W_2, V/W_1)$. Pelo teorema anterior, concluímos que $W_2/\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ são isomorfos. Vejamos agora o que são $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$. Seja $v + W_1 \in V/W_1$. Como $V = W_1 + W_2$, podemos escrever $v = w_1 + w_2$, onde $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Daí,

$$T(w_2) = w_2 + W_1 = (w_1 + W_1) + (w_2 + W_1) = (w_1 + w_2) + W_1 = v + W_1.$$

Logo, $V/W_1 \subset \text{Im } T$. Sendo a outra inclusão óbvia, temos que $\text{Im } T = V/W_1$. Finalmente, seja $w_2 \in \text{Ker } T$. Então $w_2 + W_1 = W_1$, ou seja, $w_2 \in W_1$. Segue que $w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Portanto, $\text{Ker } T = \{0\}$. Assim,

$$W_2 \cong W_2/\text{Ker } T \cong \text{Im } T = V/W_1,$$

concluindo a demonstração. \square

Teorema 3.3.18 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1 e W_2 subespaços de V . Então $(W_1 + W_2)/W_1$ e $W_2/(W_1 \cap W_2)$ são isomorfos.*

Demonstração. Definamos $T : W_2 \rightarrow (W_1 + W_2)/W_1$ por $T(w_2) = w_2 + W_1$, $w_2 \in W_2$. Como $T \in \mathcal{L}(W_2, (W_1 + W_2)/W_1)$, o Teorema 3.3.16 afirma que $W_2/\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ são isomorfos. Vejamos então o que são $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$. Se $w_2 \in \text{Ker } T$ então $w_2 + W_1 = W_1$, isto é, $w_2 \in W_1$. Segue que $w_2 \in W_1 \cap W_2$ e, por conseguinte, que $\text{Ker } T \subset W_1 \cap W_2$. Como a inclusão contrária é óbvia, concluímos que $\text{Ker } T = W_1 \cap W_2$. Se $w + W_1 \in (W_1 + W_2)/W_1$, então

$$w + W_1 = (w_1 + w_2) + W_1 = (w_1 + W_1) + (w_2 + W_1) = w_2 + W_1, \quad w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$$

Daí, $T(w_2) = w_2 + W_1 = w + W_1$, ou seja, $w + W_1 \in \text{Im } T$. Segue que $\text{Im } T = (W_1 + W_2)/W_1$. Assim,

$$W_2/(W_1 \cap W_2) = W_2/\text{Ker } T \cong \text{Im } T = (W_1 + W_2)/W_1,$$

concluindo a demonstração. □

Exercícios 3.3.19 2) Seja F um subcorpo de \mathbb{C} e considere $T \in \mathcal{L}(F^3)$ dada por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$. Determine $\text{Im } T$, $\rho(T)$, $\text{Ker } T$ e $\eta(T)$ nos seguintes casos: $F = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{Q}$ e $F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

3) Sejam F um corpo, m e n inteiros positivos e $A \in M_{m \times n}(F)$. Considere a transformação $T \in \mathcal{L}(M_{n \times 1}(F), M_{m \times 1}(F))$ dada por $T(X) = AX$. Demonstre que T é a transformação nula se, e somente se, $A = 0$.

4) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = \{0\}$;

ii) Se $v \in V$ e $T^2(v) = 0$ então $T(v) = 0$.

5) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se $T^2 = 0$, é possível estabelecer alguma relação entre $\text{Im } T$ e $\text{Ker } T$?

6) Sejam V_1, \dots, V_{n+1} espaços vetoriais sobre F e $T_j \in \mathcal{L}(V_j, V_{j+1})$, $j = 1, \dots, n$. Assuma que T_1 é injetora, T_n é sobrejetora e que $\text{Im } T_j = \text{Ker } T_{j+1}$, $j = 1, \dots, n - 1$. Prove que $\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \dim_F V_j = 0$.

7) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ satisfazendo $T^2 = T$. Prove que $T = I_{\mathbb{R}^2}$ ou existe uma base B de \mathbb{R}^2 tal que três entradas de T_B^B são nulas.

8) Verifique quais das seguintes aplicações $T : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ são lineares.

i) $T(a, b, c) = (b, -a, 1)$;

ii) $T(a, b, c) = (a^2, b^2, c^2)$;

iii) $T(a, b, c) = (a + 1, b + 1, c + 1)$.

9) Mostre que todos os elementos de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ são múltiplos de $I_{\mathbb{R}}$.

10) Sejam V_1 o espaço \mathbb{C} usual e V_2 o espaço \mathbb{C} sobre o corpo \mathbb{R} . Exiba $T \in \mathcal{L}(V_2)$ tal que $T \notin \mathcal{L}(V_1)$.

11) Encontrar transformações lineares T e S tais que $T \circ S = 0 \neq S \circ T$.

12) Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V, W)$, mostre que existe $S \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que $T \circ S \circ T = T$.

13) Prove: se $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ está em posição adequada e $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathbb{R}^n$, prove que existe uma função ϕ da forma $\phi(x) = Tx + v$, $x \in \mathbb{R}^n$, onde $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$, tal que $\phi(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$. Uma aplicação ϕ como acima é chamada *aplicação afim* de \mathbb{R}^n .

14) Sejam Δ_1 e Δ_2 duas regiões triangulares em \mathbb{R}^2 , a primeira delas não degenerada (vértices não alinhados). Prove que existe uma aplicação afim ϕ de \mathbb{R}^2 tal que $\phi(\Delta_1) = \Delta_2$.

15) Sejam V um espaço vetorial sobre F de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Demonstre que se $\rho(T^2) = \rho(T)$, então $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = \{0\}$.

16) Sejam V um espaço vetorial de dimensão 2 sobre \mathbb{R} e $T \in \mathcal{L}(V)$ dada por $T(v_1, v_2) = (v_2, v_1 + v_2)$. Verifique se existe uma base B de V tal que

$$T_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

17) Sejam $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que se $S \circ T - I$ é injetora então $T \circ S - I$ é injetora (Sugestão: $S \circ (T \circ S - I) = (S \circ T - I) \circ S$).

18) Dê exemplo de um espaço vetorial V e $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\text{Im } T \cap \text{Ker } T \neq \{0\}$. É possível dar exemplos onde $\text{Im } T = \text{Ker } T$? E se a condição for $\text{Im } T \subset \text{Ker } T$ ou $\text{Ker } T \subset \text{Im } T$ (inclusões próprias)?

19) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$ dada por

$$T(p(t)) = \int_0^t p(x) dx$$

20) Sejam V um espaço de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Prove que:

- i) Existe $R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = S \circ R$ se, e somente se, $\text{Im } T \subset \text{Im } S$;
- ii) Existe $R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = R \circ S$ se, e somente se, $\text{Ker } S \subset \text{Ker } T$.

21) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e W um subespaço de V de dimensão m .

Mostre que $U = \{T \in \mathcal{L}(V) : T|_W = 0\} \leq \mathcal{L}(V)$. Qual é a dimensão de U ?

22) Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que:

- i) Se $\text{Ker } T \neq \{0\}$ então existe $0 \neq S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T \circ S = 0$;
- ii) Se $\text{Im } T \neq V$ então existe $0 \neq S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $S \circ T = 0$.

23) Sejam U e V espaços vetoriais, $W \leq U$ e $T \in \mathcal{L}(W, V)$. Mostre que existe $S \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $S|_W = T$.

24) Sejam V um espaço vetorial e $W \leq V$. Mostre que existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ sobrejetora tal que $T(w) = w, w \in W$.

25) Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$.

- i) Mostre que $V_T = \{S \in \mathcal{L}(V) : T \circ S = 0\}$ é subespaço de $\mathcal{L}(V)$.
- ii) Explique como escolher T de modo que $\dim V_T = 0, n, \text{ ou } n^2$.
- iii) Se $W \leq \mathcal{L}(V)$, existe $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $W = V_T$? Justifique.

26) Sejam V um espaço vetorial sobre $F, W_1, \dots, W_n \leq V$ e $T \in \mathcal{L}(W_1 \times \dots \times W_n, V)$ dada por $T(w_1, \dots, w_n) = w_1 + \dots + w_n$. Prove: T é injetora se, e somente se, o conjunto $\{W_1, \dots, W_n\}$ é independente.

27) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Prove que $\{S \in \mathcal{L}(W, V) : S \circ T = 0\}$ é isomorfo a $\mathcal{L}(W, \text{Coker } T)$ enquanto que $\{S \in \mathcal{L}(W, V) : T \circ S = 0\}$ é isomorfo a $\mathcal{L}(W, \text{Ker } T)$.

28) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensões m e n respectivamente, com $m < n$. Se $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $S \in \mathcal{L}(W, V)$, mostre que $T \circ S$ não é isomorfismo.

29) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ tais que $T \circ S = I$.

- i) Mostre que $\text{Ker } S = \{0\}$ e $\text{Im } T = V$.
- ii) Se $\dim_F V < \infty$, então T é um isomorfismo e $T^{-1} = S$.
- iii) Mostre que a parte ii) pode ser falsa se $\dim_F V = \infty$.

30) Sejam V um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$. Verifique quando a aplicação $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$

dada por $\phi(S) = T \circ S$ é um isomorfismo.

31) Sejam V um espaço vetorial e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que T e S são isomorfismos se, e somente se, $T \circ S$ e $S \circ T$ são isomorfismos.

32) Mostre que se V é um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$ é tal que $T^2 - T + I = 0$ então T é um isomorfismo.

33) Sejam V um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que existe uma única $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T \circ S = I$. Mostre que T é um isomorfismo e que $T^{-1} = S$ (Sugestão: Considere $S \circ T + S - I$).

34) Se V é um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ é um isomorfismo, mostre que existe $p \in P(F)$ tal que $T^{-1} = p(T)$ (Sugestão: Encontre $0 \neq q \in P(F)$ de grau mínimo tal que $q(T) = 0$. Mostre que o termo constante de q é $\neq 0$).

35) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T \circ S = S \circ T$ para toda $S \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que se $0 \neq v \in V$ então $\{v, T(v)\}$ é l.d. Usando esse fato, mostre que T é um múltiplo da identidade, isto é, existe um escalar α tal que $T(u) = \alpha u$, $u \in V$.

36) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão 3 e seja $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$T_B^B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

para alguma base B de V . Encontre $\rho(T)$ e $\eta(T)$ nos casos $F = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{Z}_2$ e $F = \mathbb{Z}_3$. Verifique se a igualdade $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$ vale em algum dos casos acima.

37) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F com $\dim_F V = n$ e $\dim_F W = m$. Se $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, mostre que:

i) $|\rho(T) - \rho(S)| \leq \rho(T + S) \leq \rho(T) + \rho(S)$;

ii) $\eta(T + S) \geq \eta(T) + \eta(S) - n$;

iii) $\rho(T + S) \leq \min\{m, n, \rho(T) + \rho(S)\}$;

iv) $\rho(T + S) = \rho(T) + \rho(S)$ se, e só se, $\text{Im } (T + S) = \text{Im } T + \text{Im } S$ e $\text{Im } T \cap \text{Im } S = \{0\}$.

38) Sejam V_1, V_2 e V_3 espaços vetoriais de dimensão finita e sejam $R \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ e $S \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Prove:

i) $\rho(R) = \rho(S \circ R) + \dim(\text{Im } R \cap \text{Ker } S)$;

ii) $\rho(S \circ R) = \dim(\text{Im } R + \text{Ker } S) - \eta(S)$;

- iii) $\rho(S \circ R) \leq \min\{\rho(R), \rho(S)\}$;
- iv) $\eta(R) + \eta(S) \geq \eta(S \circ R)$;
- v) $\rho(R) - \eta(S) \leq \rho(S \circ R)$;
- vi) $\rho(R) - \eta(S) = \rho(S \circ R)$ se, e só se, $\text{Ker } S \subset \text{Im } R$;
- vii) $\rho(S \circ R) = \rho(S)$ se, e só se, $\text{Ker } S + \text{Im } R = V_2$;
- viii) Se $\text{Ker } R = \{0\}$ e $\dim V_1 = \dim V_2$ então $\rho(S \circ R) = \rho(S)$;
- ix) Mostre que a condição $\dim V_1 = \dim V_2$ em viii) é essencial;
- x) Se $\text{Im } R = V_2$ então $\rho(S \circ R) = \rho(S)$;
- xi) $\rho(S \circ R) = \rho(R)$ se, e só se, $\text{Ker } S \cap \text{Im } R = \{0\}$;
- xii) Se $\text{Ker } S = \{0\}$ então $\rho(S \circ R) = \rho(R)$.

39) Sejam V_1, V_2, V_3 e V_4 espaços de dimensão finita e sejam $R \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $S \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$ e $T \in \mathcal{L}(V_3, V_4)$. Prove:

- i) $\rho(T \circ S) + \rho(S \circ R) \leq \rho(S) + \rho(T \circ S \circ R)$;
- ii) $\eta(T \circ S) + \eta(S \circ R) \geq \eta(S) + \eta(T \circ S \circ R)$;
- iii) Se $\dim V_1 = \dim V_j$, $j = 2, 3, 4$ e $T \circ S \circ R = 0$ então $\rho(T) + \rho(S) + \rho(R) \leq 2 \dim V_1$.

40) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, e assuma que $\dim_F V^2 = (\dim_F V)^2$. Prove que $V = \{0\}$ ou V é isomorfo a F^2 .

41) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Prove: $T \circ S$ é um isomorfismo se, e somente se, $S \circ T$ é um isomorfismo. A hipótese “dimensão finita” é realmente necessária?

42) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita. Os espaços $\mathcal{L}(V, W)$ e $\mathcal{L}(W, V)$ são isomorfos?

43) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que existam subespaços V_1 e V_2 de V satisfazendo $V = V_1 + V_2$, $T(V_1) = \{0\}$ e $T(V_2) \subset V_1$. Prove que $T^2 = 0$.

44) Sejam A um conjunto qualquer, $B \subset A$, $V = \mathbb{R}^A$ e $W = \mathbb{R}^B$. Mostre que o conjunto $N = \{f \in V : f(t) = 0, t \in B\}$ é subespaço de V e que $V/N \cong W$.

45) Sejam V um espaço vetorial sobre F e V_1 e V_2 subespaços de V com $V_1 \subset V_2$. Mostre que $(V/V_1)/(V_2/V_1) \cong V/V_2$.

46) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $V_1, V_2 \leq V$. Prove:

- i) $V/(V_1 \cap V_2)$ é isomorfo a um subespaço de $V/V_1 \times V/V_2$;
- ii) $V/(V_1 + V_2)$ é isomorfo a um quociente de V/V_1 ;

iii) Se $\dim_F V < \infty$ então $\dim_F V/(V_1 + V_2) < \infty$, $\dim_F V/(V_1 \cap V_2) < \infty$ e $\dim_F V/(V_1 + V_2) + \dim_F V/(V_1 \cap V_2) = \dim_F V/V_1 + \dim V/V_2$ (Sugestão: $(V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1/V_1 \cap V_2) \oplus V_2/(V_1 \cap V_2)$).

47) Sejam V um espaço vetorial sobre F e V_1 e V_2 subespaços de V . Sabendo-se que $\dim_F V_1 = 5$, $\dim_F V_2 = 8$ e $\dim_F (V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2) = 3$, determine $\dim_F V_1 + V_2$ e $\dim_F V_1 \cap V_2$. É possível ter-se $\dim_F V_1 = 5$, $\dim_F V_2 = 8$ e $\dim_F (V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2) = 4$ simultaneamente?

48) Sejam V um espaço vetorial sobre F e V_1 e V_2 subespaços V . Sabendo-se que $\dim_F (V_1 + V_2)/V_2 = 6$, $\dim_F (V_1 + V_2)/V_1 = 5$ e $\dim_F V_1 \cap V_2 = 3$, encontre $\dim_F V_1$ e $\dim_F V_2$.

49) Seja V um espaço vetorial sobre F e considere o subespaço $\Delta = \{(v, v) : v \in V\}$ de $V \times V$. Mostre que $(V \times V)/\Delta \cong V$.

50) Sejam V_1, V_2 e V_3 espaços vetoriais sobre um mesmo corpo F , $T \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$ e $S \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Se $\text{Ker } T \subset \text{Ker } S$, mostre que existe $R \in \mathcal{L}(V_3, V_2)$ tal que $R \circ T = S$.

51) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão $n > 0$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $\text{Im } T = \text{Ker } T$;
- ii) $T^2 = 0$, $T \neq 0$, n é par e $\rho(T) = n/2$.

52) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que:

- i) $\text{Im } T^n \subset \text{Im } T^{n-1}$ e $\text{Ker } T^{n-1} \subset \text{Ker } T^n$, $n \geq 1$;
- ii) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Im } T^p = \text{Im } T^{p+1}$;
- iii) Se p é como em ii), então $\rho(T^p) = \rho(T^{p+k})$ e $\eta(T^p) = \eta(T^{p+k})$, $k \geq 1$;
- iv) Se p é como em ii), $V = \text{Im } T^p \oplus \text{Ker } T^p$;
- v) A hipótese “dimensão finita” é essencial para o item iv) acima valer.

53) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se $T^n = 0$ para algum inteiro positivo n , prove que $\eta(I_V - T) = 0$.

54) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(V)$ e n é um inteiro positivo, prove que

$$\eta(T^{n+1}) = \eta(T) + \sum_{k=1}^n \dim_F (\text{Im } T^k \cap \text{Ker } T)$$

55) Sejam V um espaço vetorial sobre $F = \mathbb{Z}_p$, de dimensão 3, e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que

para alguma base B de V ,

$$T_B^B = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

Prove que T é sobrejetora se, e somente se, $p \neq 5$.

56) Sejam F um corpo de característica $\neq 2$, V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que:

i) Se $T^2 = I$ então $V = \text{Im}(I + T) \oplus \text{Im}(I - T)$;

ii) Nas condições do ítem i), existem um inteiro positivo p e uma base B de V tal que

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} \end{array} \right)$$

iii) Se para alguma base B de V , T_B^B for como em ii) então $T^2 = I$.

57) Sejam F um corpo de característica 2, V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$ satisfazendo $T^2 = I$. Verifique que $\text{Ker}(I_V + T)$ é o conjunto dos pontos fixos de T . Mostre que existe um inteiro positivo p e uma base B de V tal que

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{n-2p} & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & J & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & J & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right)$$

onde $J \in M_{2 \times 2}(F)$ satisfaz $J_{11} = J_{12} = J_{22} = 1$ e $J_{21} = 0$ (Sugestão: Tome uma base de $\text{Im} S$ e estenda-a a uma base de $\text{Ker} S$. Daí, estenda essa base a uma base de V .)

58) Sejam n um inteiro positivo e V um espaço vetorial sobre F , de dimensão $2n$. Seja $0 \neq T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = 0$ e $\rho(T) = n$. Prove que existe uma base B de V tal que

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & J & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & J & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right)$$

onde $J \in M_{2 \times 2}(F)$ é tal que $J_{11} = J_{12} = J_{22} = 0$ e $J_{21} = 1$.

59) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V) \setminus \{0\}$ satisfazendo $T^2 = 0$. Seja ainda $W \leq V$ tal que $V = \text{Ker} T \oplus W$. Se $r := \rho(T)$, prove que:

i) $2r \leq n$ e $\dim_F W = r$;

ii) Se $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ é base de W então $\{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_r)\}$ é um subconjunto l.i. de $\text{Ker } T$;

iii) Existe uma base B de V tal que

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & 0 \\ I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

60) Sejam F um corpo de característica $\neq 2$ e V um espaço vetorial sobre F . Seja ainda $T \in \mathcal{L}(V)$ satisfazendo $T^3 = T$. Mostre que existem subespaços V_0, V_1 e V_2 de V tais que $V_0 \subset \text{Ker } T$, $V_1 \subset \{v : T(v) = v\}$, $V_2 \subset \{v : T(v) = -v\}$ e $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$. Se $\dim_F V < \infty$, conclua que existem inteiros s_0, s_1 e s_2 e uma base B de V tal que

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{s_0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{s_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{s_2} \end{array} \right)$$

onde 0_{s_0} é a matriz de $M_{s_0 \times s_0}(F)$ com todas as suas entradas iguais a 0.

61) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que $T_B^B = T_{B'}^{B'}$, quaisquer que sejam as bases B e B' de V . Prove que $T = \alpha I_V$, para algum $\alpha \in F$.

3.4 Funcionais Lineares

Vamos estudar nesta seção, um tipo especial de transformação linear. Mais precisamente, vamos estudar aquelas transformações lineares cujo contra-domínio é o corpo de escalares dos espaços vetoriais envolvidos.

Definição 3.4.1 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Um funcional linear (ou forma linear) sobre V é um elemento de $\mathcal{L}(V, F)$.*

Definição 3.4.2 *Seja V um espaço vetorial sobre F . O espaço dual (ou conjugado) de V , denotado por V^* , é o espaço $\mathcal{L}(V, F)$.*

Exemplos 3.4.3 1) Sejam F um corpo e n um inteiro positivo. A aplicação $T : F^n \rightarrow F$ dada por $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_j$ (j fixo) é um funcional linear sobre F^n . A aplicação $S : M_{n \times n}(F) \rightarrow F$ dada por $S(X) = \text{traço } X$ é um funcional linear sobre $M_{n \times n}(F)$.

2) A aplicação $T : P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(p) = p(2)$ é um funcional linear sobre $P(\mathbb{R})$. $S : P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $S(p) = p'(51) - 3p''(6)$ também é um funcional linear sobre $P(\mathbb{R})$.

Observação 3.4.4 Se V é um espaço vetorial sobre F então $\dim_F V^* \geq \dim_F V$. Se $\dim_F V$ é finita então $\dim_F V^* = \dim_F V$ e, conseqüentemente, V^* e V são isomorfos. Se $\dim_F V$ não é finita então $\dim_F V^* > \dim_F V$ (veja Teorema 3.2.9).

A seguir, veremos como obter uma descrição explícita do espaço dual V^* , no caso em que V tem dimensão finita.

Teorema 3.4.5 *Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Então existe uma única base $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Além disso, $f = \sum_{i=1}^n f(v_i)f_i$, $f \in V^*$ e $v = \sum_{i=1}^n f_i(v)v_i$, $v \in V$.*

Demonstração. A existência da base B^* segue do Teorema 3.2.8. Para provarmos a unicidade, suponhamos que $C = \{g_1, \dots, g_n\}$ seja base de V^* e que $g_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Então, $(g_i - f_i)(v_j) = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, e o fato de B ser base de V implica que $g_i - f_i = 0$ para todo i . Logo, $B^* = C$. Se $f \in V^*$ então

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \quad \alpha_i \in F, \quad i = 1, \dots, n.$$

Então, $f(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(v_j) = \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$. Finalmente, se $v \in V$, podemos escrever

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i, \quad \beta_i \in F, \quad i = 1, \dots, n.$$

Daí,

$$f_j(v) = f_j \left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \beta_i f_j(v_i) = \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Isto conclui a prova. □

Definição 3.4.6 *A base B^* de V^* descrita no teorema anterior é denominada a base dual da base B de V .*

Observação 3.4.7 A última conclusão do teorema acima implica que se $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ é a base dual de alguma base B de V então $f_i, i = 1, \dots, n$, é a função que a cada v de V associa a i -ésima coordenada de v em relação a B .

Exemplos 3.4.8 1) A base dual da base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 é $B^* = \{f_1, f_2\}$, onde $f_1(x, y) = x$ e $f_2(x, y) = y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) A base dual da base $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 é $B^* = \{f_1, f_2\}$, onde $f_1(x, y) = x - y$ e $f_2(x, y) = y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3) Consideremos a base $B = \{(1, 1, 2), (1, 2, 0), (3, 4, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 . Se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ então

$$(x, y, z) = \frac{z}{2}(1, 1, 2) + \left(\frac{3y}{2} + \frac{z}{4} - 2x\right)(1, 2, 0) + \left(x - \frac{z}{4} - \frac{y}{2}\right)(3, 4, 0).$$

Logo, os funcionais

$$f_1(x, y, z) = \frac{z}{2}, \quad f_2(x, y, z) = \frac{3y}{2} + \frac{z}{4} - 2x, \quad f_3(x, y, z) = x - \frac{z}{4} - \frac{y}{2}$$

formam a base dual de B .

4) Para $i \in \{1, 2, 3\}$, seja $L_i : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $L_i(p) = p(i - 1), p \in P_3(\mathbb{R})$. O conjunto $\{L_1, L_2, L_3\}$ é l.i. De fato, se $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha_1 p(0) + \alpha_2 p(1) + \alpha_3 p(2) = 0, \quad p \in P_3(\mathbb{R}).$$

Fazendo-se escolhas apropriadas de p , chegamos ao sistema

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3 = \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0,$$

cuja única solução é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Como $\dim V^* = \dim V = 3$, o conjunto $C = \{L_1, L_2, L_3\}$ é uma base de V^* . Será que C é a base dual de alguma base B de $P_3(\mathbb{R})$? Suponha que sim, e escreva $B = \{p_1, p_2, p_3\}$. Então $p_j(i - 1) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Escrevendo-se cada elemento de B como combinação linear dos polinômios $1, x$ e x^2 e impondo-se as condições acima obtemos três sistemas de três equações a três incógnitas. Resolvendo-se tais sistemas obtemos $p_1(x) = (x - 1)(x - 2)/2, p_2(x) = x(2 - x)$ e $p_3(x) = x(x - 1)/2$. Voltaremos a este assunto na próxima seção.

Teorema 3.4.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $v \in V \setminus \{0\}$. Então existe $T \in V^*$ tal que $T(v) \neq 0$*

Demonstração. O conjunto $\{v\}$ é l.i. Logo, pelo Teorema 2.3.7, existe uma base B de V cujo primeiro elemento é v . Consideremos então a base dual B^* de B . Então o primeiro elemento f_1 de B^* satisfaz $f_1(v) = 1$. \square

Observação 3.4.10 O teorema anterior garante então que o único vetor de um espaço vetorial V de dimensão finita que pode ser anulado por todos os elementos de V^* , é o vetor nulo.

Se $f : V \rightarrow F$ é um funcional linear não-nulo então $\rho(f) = 1$. O Teorema 3.1.10, revela que $\eta(f) = (\dim_F V) - 1$.

Em qualquer espaço vetorial de dimensão finita, subespaços de codimensão 1 são chamados *hiperplanos* do espaço. Logo, o núcleo de qualquer funcional linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita é um hiperplano do espaço.

O teorema anterior mostra que a recíproca deste fato também é verdadeira. De fato, seja V um espaço vetorial sobre F de dimensão finita e W um hiperplano de V . Como a codimensão de W é 1, existe $v \in V \setminus W$. Como $v \neq 0$, o teorema anterior garante a existência de $T \in V^*$ tal que $T(v) \neq 0$. Observando-se a prova daquele teorema, nota-se ainda que $\text{Ker } T = W$.

Definição 3.4.11 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e M um subconjunto de V . O anulador de M em V é o conjunto M° dado por*

$$M^\circ = \{f \in V^* : f(v) = 0, v \in M\}.$$

Exemplo 3.4.12 *Seja F um corpo e consideremos o espaço $V = F^2$. Vamos determinar M° onde $M = \{(\alpha, \beta) \in V : \alpha + \beta = 0\}$. Os elementos de V^* são da forma*

$$T(\alpha, \beta) = \alpha_1\alpha + \beta_1\beta, \quad (\alpha, \beta) \in V,$$

onde $\alpha_1, \beta_1 \in F$. Como cada elemento de M° deve anular os elementos de M , temos que

$$T(1, -1) = 0, \quad T \in M^\circ.$$

Logo, $\alpha_1 - \beta_1 = 0$. Concluimos então que os elementos de M° são da forma $T(\alpha, \beta) = \alpha_1(\alpha + \beta)$, $(\alpha, \beta) \in V$.

Observação 3.4.13 Se V é um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e M é um subespaço de V tal que $V \setminus M \neq \emptyset$, então o Teorema 3.4.9 revela que $M^\circ \neq \{0\}$.

Teorema 3.4.14 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e M um subconjunto de V . Então M° é um subespaço de V^* .*

Demonstração. Exercício.

Observação 3.4.15 Em qualquer espaço vetorial V , $\{0\}^\circ = V^*$ e $V^\circ = \{0\}$.

Aqui estão algumas propriedades menos elementares do anulador de um conjunto.

Teorema 3.4.16 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e M e N subconjuntos de V . Valem as seguintes afirmações:*

- i) *Se $M \subset N$ então $N^\circ \subset M^\circ$;*
- ii) *$[M]^\circ = M^\circ$;*
- iii) *$(M \cup N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$.*

Demonstração. i) Seja $T \in N^\circ$. Então $T(v) = 0$, $v \in N$. Se $M \subset N$ então $T(v) = 0$, $v \in M$. Portanto, $T \in M^\circ$.

ii) Como $M \subset [M]$, a inclusão $[M]^\circ \subset M^\circ$ segue da parte i). Seja agora $T \in M^\circ$. Como T anula cada elemento de M , ele anula cada combinação linear de elementos de M . Portanto, $T \in [M]^\circ$. Assim, $M^\circ \subset [M]^\circ$.

iii) Usando a parte i), vemos que $(M \cup N)^\circ \subset M^\circ$ e $(M \cup N)^\circ \subset N^\circ$. Logo, $(M \cup N)^\circ \subset M^\circ \cap N^\circ$. Seja agora $T \in M^\circ \cap N^\circ$ e fixe $v \in M \cup N$. Se $v \in M$ então $T(v) = 0$ pois $T \in M^\circ$. Da mesma forma, se $v \in N$, então $T(v) = 0$. Portanto, $T \in (M \cup N)^\circ$. \square

Teorema 3.4.17 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e W um subespaço de V . Então $\dim_F V = \dim_F W + \dim_F W^\circ$.*

Demonstração. Seja $\{w_1, \dots, w_m\}$ uma base de W . Pelo Teorema 2.3.7, existe uma base de V da forma $B = \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$. Seja $B^* = \{f_1, \dots, f_m, g_{m+1}, \dots, g_n\}$ a base dual de B . O restante da prova mostrará que $C = \{g_{m+1}, \dots, g_n\}$ é uma base de W° . Se $w \in W$, podemos escrever $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$. Logo,

$$g_j(w) = \alpha_1 g_j(w_1) + \dots + \alpha_m g_j(w_m) = 0, \quad j = m + 1, \dots, n.$$

Portanto, $C \subset W^\circ$. Como C é um subconjunto de uma base, segue que C é l.i. Seja agora $T \in W^\circ$. Como $T \in V^*$, podemos escrever

$$T = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_m f_m + \beta_{m+1} g_{m+1} + \cdots + \beta_n g_n, \quad \beta_j \in F \quad j = 1, \dots, n.$$

Daí, $0 = T(w_j) = \beta_j$, $j = 1, \dots, m$ e, conseqüentemente, $T = \beta_{m+1} g_{m+1} + \cdots + \beta_n g_n$. Segue que, $W^\circ \subset \{g_{m+1}, \dots, g_n\}$. Como B^* é a base dual de B , certamente a outra inclusão também vale. A conclusão do teorema segue dos fatos acima. \square

Corolário 3.4.18 *Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n . Se W é um subespaço de V de dimensão m então W é a intersecção de $n - m$ hiperplanos de V .*

Demonstração. Usando-se a notação da prova do teorema anterior, vemos que

$$W = \{v \in V : g_j(v) = 0, j = m + 1, \dots, n\}.$$

Logo, $W = \bigcap_{j=m+1}^n \text{Ker } g_j$, ou seja, uma intersecção de $n - m$ hiperplanos de V . \square

Corolário 3.4.19 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e U e W subespaços de V . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $U = W$;
- ii) $U^\circ = W^\circ$.

Demonstração. Certamente i) implica ii). Por outro lado, se $U \neq W$, podemos assumir sem perda de generalidade que existe $v \in W \setminus U$. A demonstração do teorema anterior mostra que existe $T \in V^*$ tal que $T(u) = 0$, $u \in U$ e $T(v) \neq 0$. Portanto, $T \in U^\circ \setminus W^\circ$, ou seja, $U^\circ \neq W^\circ$. \square

Exemplo 3.4.20 No espaço vetorial \mathbb{R}^4 consideremos o subespaço

$$W = \{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 1, 1)\}.$$

É fácil ver que $\{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 1, -1)\}$ é uma base de W . Ainda,

$$B = \{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

é uma base de \mathbb{R}^4 . Se $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, então

$$(x, y, z, w) = \alpha(1, 0, -1, 2) + \beta(0, 1, 1, -1) + \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(0, 0, 0, 1),$$

onde $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = z + x - y$ e $\delta = w - 2x + y$. Assim, $B^* = \{f_1, f_2, g_3, g_4\}$, onde $f_1(x, y, z, w) = x$, $f_2(x, y, z, w) = y$, $g_3(x, y, z, w) = z + x - y$ e $g_4(x, y, z, w) = w - 2x + y$, é a base dual de B . Pelo teorema anterior, concluímos que $W^\circ = \{g_3, g_4\}$.

Exercícios 3.4.21 62) No espaço vetorial \mathbb{C}^3 , determinar a base dual da base $\{(-1, 0, -1), (-1, -1, -1), (2, 2, 0)\}$.

63) Determinar uma base de W° onde W é o subespaço de \mathbb{R}^5 gerado pelo conjunto $\{(0, 1, 3, 3, 1), (1, 4, 6, 4, 1), (1, 2, 1, 0, 0)\}$.

64) Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial de dimensão finita. Prove que $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$ e $(U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$.

3.5 O Espaço Bidual

Perguntamos: toda base do espaço dual de algum espaço vetorial é a base dual de alguma base do espaço? Para responder esta questão, vamos considerar o espaço dual do espaço dual de um espaço vetorial.

Se V é um espaço vetorial sobre F , escreveremos V^{**} para denotar o espaço dual de V^* .

Vimos que, se V tem dimensão finita então V e V^* são isomorfos. O isomorfismo entre esses dois espaços dependia de uma base fixada. É claro que V e V^{**} também são isomorfos. Mostraremos que o isomorfismo entre esses dois espaços é natural, isto é, independe da escolha de qualquer base.

Teorema 3.5.1 *Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Consideremos a função $\psi : V \rightarrow V^{**}$ dada por $\psi(v) = \psi_v$, onde $\psi_v(T) = T(v)$, $T \in V^*$. Então ψ é um isomorfismo entre V e V^{**} .*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in F$. Para cada $T \in V^*$, temos

$$\psi_{v_1+v_2}(T) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \psi_{v_1}(T) + \psi_{v_2}(T) = (\psi_{v_1} + \psi_{v_2})(T)$$

e

$$\psi_{\alpha v_1}(T) = T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha \psi_{v_1}(T) = (\alpha \psi_{v_1})(T).$$

Segue que $\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2)$ e $\psi(\alpha v_1) = \alpha \psi(v_1)$. Logo, $\psi \in \mathcal{L}(V, V^{**})$. Seja agora $v \in \text{Ker } \psi$. Então $\psi(v) = 0$, ou seja, $\psi_v(T) = 0$, $T \in V^*$. Pela Observação 3.4.10, segue que $v = 0$. Portanto, $\text{Ker } \psi = \{0\}$, isto é, ψ é injetora. Finalmente, temos que $\dim_F \text{Im } \psi = \dim_F V = \dim_F V^{**}$. Como $\text{Im } \psi \leq V^{**}$, concluímos que $\text{Im } \psi = V^{**}$. Assim ψ é sobrejetora. \square

Corolário 3.5.2 *Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Para cada L em V^{**} existe um único v em V tal que $L(T) = T(v)$, $T \in V^*$.*

Teorema 3.5.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e C uma base de V^* . Então C é a base dual de alguma base de V .*

Demonstração. Seja $C = \{T_1, \dots, T_n\}$ e consideremos a base C^* de V^{**} , que é dual de C . Escrevamos $C^* = \{T_1^*, \dots, T_n^*\}$. Pelo corolário anterior, existem vetores v_1, \dots, v_n de V tais que $T_i^*(T) = T(v_i)$, $T \in V^*$, $i = 1, \dots, n$. Definamos então $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Inicialmente, notemos que B é base de V . De fato, se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0, \quad \alpha_i \in F, \quad i = 1, \dots, n,$$

então

$$\begin{aligned} (\alpha_1 T_1^* + \dots + \alpha_n T_n^*)(T) &= \alpha_1 T_1^*(T) + \dots + \alpha_n T_n^*(T) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = T(0) = 0, \quad T \in V^*. \end{aligned}$$

Em outras palavras, $\alpha_1 T_1^* + \dots + \alpha_n T_n^* = 0$. Como C^* é base de V^{**} , segue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Como B possui exatamente $n = \dim_F V^{**} = \dim_F V$ elementos, B é base de V . Resta verificar que C é a base dual de B . Isto segue de

$$T_i(v_j) = T_j^*(T_i) = \delta_{ji} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

concluindo a prova. \square

3.6 A Transposta de uma Transformação Linear

Cada transformação linear induz naturalmente uma transformação linear entre os espaços duais dos espaços envolvidos. Isto é explicado no teorema a seguir.

Teorema 3.6.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. A aplicação $T^* : V^* \rightarrow U^*$ dada por $T^*(f) = f \circ T$, $f \in V^*$, é um elemento de $\mathcal{L}(V^*, U^*)$.*

Demonstração. Certamente, $f \circ T \in U^*$, $f \in V^*$. Por outro lado, se $f, g \in V^*$ e $\alpha \in F$, então

$$T^*(\alpha f + g) = (\alpha f + g) \circ T = \alpha(f \circ T) + g \circ T = \alpha T^*(f) + T^*(g)$$

Portanto, $T^* \in \mathcal{L}(V^*, U^*)$. □

Definição 3.6.2 *A transformação T^* descrita no teorema acima é denominada transposta (ou adjunta) de T .*

Exemplos 3.6.3 1) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $W \leq V$. Consideremos a inclusão $i : W \rightarrow V$ dada por $i(w) = w$, $w \in W$. A transposta i^* de i satisfaz $i^*(f)(w) = f(i(w)) = f(w)$, $f \in V^*$, $w \in W$, isto é, $i^*(f) =$ restrição de f a W .

2) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(F^n, V)$. Defina $x_i = T(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base usual de F^n . Então

$$T^*(f)(e_i) = f(T(e_i)) = f(x_i), \quad f \in V^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Segue que

$$T^*(f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n), \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n.$$

Portanto,

$$T^*(f) = f(x_1)f_1 + \dots + f(x_n)f_n, \quad f_i \in (F^n)^*,$$

onde $f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$.

Teorema 3.6.4 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então $\text{Ker } T^* = (\text{Im } T)^\circ$. Além disso, se U e V têm dimensão finita então $\rho(T^*) = \rho(T)$ e $\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\circ$.*

Demonstração. Um elemento $f \in V^*$ está em $\text{Ker } T^*$ se, e somente se, $f \circ T = 0$, ou seja, se, e somente se, $f(T(u)) = 0$, $u \in U$. Isto equivale a dizer que $f \in (\text{Im } T)^\circ$. Portanto, $\text{Ker } T^* = (\text{Im } T)^\circ$. Suponhamos agora que U e V têm dimensão finita. Pelo Teorema 3.4.17, temos que $\dim_F(\text{Im } T)^\circ = \dim_F V - \rho(T)$. Pela primeira parte da prova, concluímos que

$$\rho(T^*) = \dim_F V^* - \eta(T^*) = \dim_F V^* - (\dim_F V - \rho(T)) = \rho(T).$$

Para concluirmos a prova, vejamos inicialmente que $\text{Im } T^* \leq (\text{Ker } T)^\circ$. Seja $g \in \text{Im } T^*$. Então $g = T^*(f)$, para algum $f \in V^*$. Daí,

$$g(u) = T^*(f)(u) = f(T(u)) = f(0) = 0, \quad u \in \text{Ker } T.$$

Portanto, $\text{Im } T^* \subset (\text{Ker } T)^\circ$ como desejado. Finalmente, usando novamente o Teorema 3.4.17, temos que

$$\dim_F(\text{Ker } T)^\circ = \dim_F U - \eta(T) = \rho(T) = \rho(T^*).$$

Segue que $\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\circ$. □

O próximo resultado explica por que a transposta de uma transformação linear tem este nome.

Teorema 3.6.5 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita, e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Sejam B e C bases de U e V , respectivamente, e B^* e C^* suas bases duais. Então $[T^*]_{C^*}^{B^*}$ é a matriz transposta de T_B^C .*

Demonstração. Escrevamos $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $T_B^C = (\alpha_{ij})$. Então

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Se $[T^*]_{C^*}^{B^*} = (\beta_{pk})$ então

$$T^*(v_k^*) = \sum_{p=1}^n \beta_{pk} u_p^*, \quad k = 1, \dots, m.$$

Daí, por um lado,

$$T^*(v_k^*)(u_l) = \sum_{p=1}^n \beta_{pk} u_p^*(u_l) = \beta_{lk}, \quad k = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, n,$$

e, por outro,

$$T^*(v_k^*)(u_l) = (v_k^* \circ T)(u_l) = v_k^*(T(u_l)) = v_k^*\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{il} v_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_{il} v_k^*(v_i) = \alpha_{kl}.$$

Portanto, $\beta_{lk} = \alpha_{kl}$, $l = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. □

Exercícios 3.6.6 65) Seja $V = P(\mathbb{R})$ e defina $f_1, f_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_1(p) = 2p(0) + p(1), \quad f_2(p) = \int_0^1 p(x) dx, \quad p \in V$$

Prove que $\{f_1, f_2\}$ é um subconjunto l.i. de V^* .

66) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T_1, T_2 \in V^*$. Defina $T \in F^V$ por $T(v) = T_1(v)T_2(v)$, $v \in V$. Se $T \in V^*$, deduza que $T_1 = 0$ ou $T_2 = 0$.

67) Determine a base dual da base $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ de $P_4(\mathbb{R})$.

68) Sejam t_1, t_2 e t_3 números reais distintos e defina $T_i \in P_3(\mathbb{R})^*$, $i = 1, 2, 3$ por $T_i(p) = p(t_i)$.

i) Mostre que $B^* := \{T_1, T_2, T_3\}$ é base de $P_3(\mathbb{R})^*$;

ii) Encontre a base B de $P_3(\mathbb{R})$ da qual B^* é dual.

69) Sejam V e W espaços vetoriais sobre um mesmo corpo. Mostre que $(V \times W)^* \cong V^* \times W^*$.

70) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ uma base de V^* . Mostre que a aplicação $T : V \rightarrow F^n$ dada por $T(v) = (T_1(v), T_2(v), \dots, T_n(v))$ é um isomorfismo.

71) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo F . Assuma que existe $\{T_1, \dots, T_n\} \subset V^*$ tal que $\bigcap_{j=1}^n \text{Ker } T_j = \{0\}$. Prove que $\dim V \leq n$. O que acontece se $\{T_1, \dots, T_n\}$ é l.i.?

72) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $0 \neq W \leq V$, $v \in V \setminus W$ e $w \in W$. Mostre que existe $T \in V^*$ tal que $T(v) = 1$ e $T(w) = 0$.

73) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $W \leq V^*$ e $T \notin W$. Prove que existe $v \in V$ tal que $T(v) = 1$ e $S(v) = 0$, $S \in W$.

74) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Um subespaço próprio W de

V é *maximal* quando ele satisfaz a condição: se $W_1 \leq V$ e $W \subset W_1$ então $W = W_1$ ou $W_1 = V$. Prove que um subespaço de V é maximal se, e somente se, é um hiperplano de V .

75) Comprove que o Teorema 3.4.17 não vale para espaços de dimensão infinita.

76) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $W \leq V$. Prove:

- i) $W^\circ = \{0\}$ se, e somente se, $V = W$;
- ii) $W^\circ = V^*$ se, e somente se, $W = \{0\}$.

77) Sejam V um espaço vetorial sobre F , $M \subset V$ e $N \subset V^*$. Prove:

- i) ${}^\circ N := \{v \in V : T(v) = 0, T \in N\}$ é um subespaço de V ;
- ii) M é um subespaço de ${}^\circ(M^\circ)$;

78) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $A := \{T_1, \dots, T_n\}$ um subconjunto de V^* . Verifique que ${}^\circ A = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } T_j$.

79) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $A := \{T_1, \dots, T_n\} \subset V^*$. Se $T \in V^*$ é tal que $T({}^\circ A) = \{0\}$, prove que $T \in [A]$.

80) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $U, W \leq V$. Prove que:

- i) $(V/W)^* \cong W^\circ$ e $V^*/W^\circ \cong W^*$;
- ii) Se $V = U \oplus W$ então $V^* = U^\circ \oplus W^\circ$;
- iii) Se $V = U \oplus W$ então $W^\circ \cong U^*$ e $U^\circ \cong W^*$.

81) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(V)$ com $\rho(T) = 1$, mostre que existem $u \in V \setminus \{0\}$ e $S \in V^* \setminus \{0\}$ tais que $T(v) = S(v)u$, $v \in V$. Generalize isso quando $\rho(T) = n \leq \dim_F V$.

82) Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p , de dimensão n . Para cada $m \leq n$, mostre que o número de subespaços de V de dimensão m coincide com o número de subespaços de V de dimensão $n - m$.

83) Seja V um espaço vetorial sobre F e $u, v \in V$ com $u \neq 0$. Mostre que $\{u\}^\circ \subset \{v\}^\circ$ se, e somente se, $\{u, v\}$ é l.d.

84) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Prove que:

- i) Se T é injetora então T^* é sobrejetora;
- ii) ${}^\circ[(\text{Ker } T)^\circ] = \text{Ker } T$;
- iii) Se $U \leq V$, então ${}^\circ(U^\circ) = U$;

iv) ${}^{\circ}(\text{Ker } T^*) = \text{Im } T$.

85) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Se $\dim_F W = 12$ e $\eta(T^*) = 4$, determine $\rho(T)$.

86) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere $T \in P(\mathbb{R})^*$ definido por

$$T(p) = \int_a^b p(t) dt.$$

Se $S : P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$ é dada por $S(p) = p'$, calcule $S^*(T)$.

87) Sejam U e V espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U, V)$.

Prove que:

i) T é sobrejetora se, e somente se, T^* é injetora;

ii) T é injetora se, e somente se, T^* é sobrejetora.

88) Sejam F um corpo, $V = M_{n \times n}(F)$ e $M \in V$. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(A) = AB - BA$. Se f é a função traço, o que é $T^*(f)$?

89) Sejam U e V espaços vetoriais sobre F e considere a aplicação $\psi : \mathcal{L}(U, V) \rightarrow \mathcal{L}(V^*, U^*)$ dada por $\psi(T) = T^*$. Mostre que

i) $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(U, V), \mathcal{L}(V^*, U^*))$;

ii) Se V tem dimensão finita então ψ é injetora.

90) Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre F , $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Prove que $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

91) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T, S \in V^*$. Verifique que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $T = \alpha S$, para algum $\alpha \in F$;

ii) $\text{Ker } S \subset \text{Ker } T$.

92) Sejam V um espaço vetorial e $T, T_1, \dots, T_n \in V^*$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $T \in \text{span}\{T_1, \dots, T_n\}$;

ii) $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } T_i \subset \text{Ker } T$.

93) Sejam V um espaço vetorial, W um subespaço de V de dimensão finita e $\{T_1, \dots, T_n\}$ uma base de W° . Demonstre que $W = \text{Ker } T_1 \cap \dots \cap \text{Ker } T_n$.

94) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $\{T_1, \dots, T_n\} \subset V^*$. Prove que:

- i) $\dim_F(\text{Ker } T_1 \cap \dots \cap \text{Ker } T_n) \geq \dim_F V - n$;
- ii) Vale a igualdade em i) se, e somente se, $\{T_1, \dots, T_n\}$ é l.i.

Capítulo 4

Operadores Lineares

4.1 Projeções

Nesta seção, vamos estudar um tipo especial de operador linear, as projeções.

Definição 4.1.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $P \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que P é uma projeção de V quando $P^2 = P$.*

Teorema 4.1.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e P uma projeção de V . Então*

i) $\text{Im } P = \{v \in V : P(v) = v\}$;

ii) $I_V - P$ é projeção de V ;

iii) $\text{Im } P = \text{Ker } (I_V - P)$ e $\text{Im } (I_V - P) = \text{Ker } P$.

Demonstração. i) Se $u \in \text{Im } P$ então $u = P(v)$, para algum $v \in V$. Daí, $P(u) = P(P(v)) = P^2(v) = u$, isto é, $u \in \{v \in V : P(v) = v\}$. Isto mostra que $\text{Im } P \subset \{v \in V : P(v) = v\}$. A outra inclusão é óbvia.

ii) Segue das igualdades

$$(I_V - P)^2 = I_V - P - P + P^2 = I_V - P - P + P = I_V - P.$$

iii) Usando a parte i) temos que

$$\text{Im } P = \{v \in V : P(v) = v\} = \{v \in V : (I_V - P)(v) = 0\} = \text{Ker } (I_V - P).$$

Usando esta relação para a projeção $I_V - P$ obtemos

$$\text{Im } (I_V - P) = \text{Ker } (I_V - (I_V - P)) = \text{Ker } P,$$

concluindo a demonstração. □

Exemplo 4.1.3 Seja F um corpo qualquer. O operador $P \in \mathcal{L}(F^4)$ dado por

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$$

é uma projeção de F^4 .

Teorema 4.1.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $P \in \mathcal{L}(V)$ uma projeção de V .*

Valem as seguintes afirmações:

i) $V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$;

ii) Se $\dim_F V = n$, então existe uma base B de V tal que

$$P_B^B = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

onde $r = \rho(P)$.

Demonstração. i) Inicialmente, se $v \in \text{Im } P \cap \text{Ker } P$ então, pelo teorema anterior, $v = P(v) = 0$. Segue que $\text{Im } P \cap \text{Ker } P = \{0\}$. Se $v \in V$ então $v = P(v) + (I_V - P)(v)$, onde $P(v) \in \text{Im } P$ e $(I_V - P)(v) \in \text{Im } (I_V - P) = \text{Ker } P$. Logo, $v \in \text{Im } P + \text{Ker } P$. Concluimos que $V = \text{Im } P + \text{Ker } P$. Portanto, $V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$.

ii) É uma consequência do Teorema 3.3.15. □

Observação 4.1.5 1) A decomposição $v = P(v) + (I_V - P)(v)$ de um elemento de V como soma de um elemento de $\text{Im } P$ com um elemento de $\text{Ker } P$ é única.

2) Se um espaço vetorial V é soma direta de dois subespaços W_1 e W_2 , então existe uma única projeção P de V tal que $\text{Im } P = W_1$ e $\text{Ker } P = W_2$. Tal projeção é dada pela expressão $P(w_1 + w_2) = w_1$, $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$. Esse operador P é costumeiramente chamado de operador projeção de V sobre W_1 (segundo W_2).

Exercício 4.1.6 1) Determine uma projeção de \mathbb{R}^2 sobre o subespaço $W_1 = \{(-2, 2)\}$ segundo $W_2 = \{(-2, 4)\}$.

Veremos a seguir que as projeções podem ser usadas para descrever decomposições de um espaço vetorial V em somas diretas de subespaços.

Teorema 4.1.7 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e W_1, \dots, W_n subespaços de V satisfazendo $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. Então existem P_1, \dots, P_n em $\mathcal{L}(V)$ tais que*

- i) P_i é projeção de V , $i = 1, \dots, n$;
- ii) $\text{Im } P_i = W_i$, $i = 1, \dots, n$;
- iii) $P_i \circ P_j = 0$, $i \neq j$;
- iv) $I_V = P_1 + \dots + P_n$.

Demonstração. i) Cada elemento v de V escreve-se de maneira única na forma

$$v = w_1 + \dots + w_n, \quad w_i \in W_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definamos então $P_i : V \rightarrow V$ por $P_i(v) = w_i$, $i = 1, \dots, n$. Obviamente, $P_i \in \mathcal{L}(V)$ e $P_i^2 = P_i$, $i = 1, \dots, n$.

ii) Seja $v \in \text{Im } P_i$ e adotemos a representação dada em i). Então, $v = P_i(v) = w_i \in W_i$. Segue que $\text{Im } P_i \subset W_i$. A outra inclusão é óbvia.

iii) Se $i \neq j$,

$$P_i \circ P_j(v) = P_i(P_j(w_1 + \dots + w_n)) = P_i(w_j) = 0.$$

Portanto, iii) segue.

iv) Temos que

$$(P_1 + \dots + P_n)(v) = P_1(v) + \dots + P_n(v) = w_1 + \dots + w_n = v = I_V(v), \quad v \in V.$$

Portanto, $P_1 + \dots + P_n = I_V$. □

Vamos colocar agora a recíproca desse resultado.

Teorema 4.1.8 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Assuma que existam projeções P_1, \dots, P_n de V satisfazendo $P_i \circ P_j = 0$, $i \neq j$, e $I_V = P_1 + \dots + P_n$. Então $V = \text{Im } P_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } P_n$.*

Demonstração. Se $v \in V$ então a hipótese sobre I_V garante que

$$v = I_V(v) = (P_1 + \dots + P_n)(v) = P_1(v) + \dots + P_n(v) \in \text{Im } P_1 + \dots + \text{Im } P_n.$$

Logo, $V = \text{Im } P_1 + \cdots + \text{Im } P_n$. Seja agora v um elemento de

$$\text{Im } P_j \cap (\text{Im } P_1 + \cdots + \text{Im } P_{j-1} + \text{Im } P_{j+1} + \cdots + \text{Im } P_n).$$

Então

$$v = P_j(v) = P_1(v_1) + \cdots + P_{j-1}(v_{j-1}) + P_{j+1}(v_{j+1}) + \cdots + P_n(v_n), \quad v_1, \dots, v_n \in V.$$

Daí, a outra hipótese implica que

$$\begin{aligned} v &= P_j(P_1(v_1) + \cdots + P_{j-1}(v_{j-1}) + P_{j+1}(v_{j+1}) + \cdots + P_n(v_n)) \\ &= (P_j \circ P_1)(v_1) + \cdots + (P_j \circ P_{j-1})(v_{j-1}) + (P_j \circ P_{j+1})(v_{j+1}) + \cdots + (P_j \circ P_n)(v_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, $\text{Im } P_j \cap (\text{Im } P_1 + \cdots + \text{Im } P_{j-1} + \text{Im } P_{j+1} + \cdots + \text{Im } P_n) = \{0\}$. Concluimos então que $V = \text{Im } P_1 \oplus \cdots \oplus \text{Im } P_n$. \square

Teorema 4.1.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e P e Q projeções de V . Assuma que $P \circ Q = Q \circ P$. Então*

i) $P \circ Q$ é uma projeção de V , $\text{Im } P \circ Q = \text{Im } P \cap \text{Im } Q$ e $\text{Ker } P \circ Q = \text{Ker } P + \text{Ker } Q$;

ii) $P + Q - P \circ Q$ é uma projeção de V , $\text{Im } (P + Q - P \circ Q) = \text{Im } P + \text{Im } Q$ e $\text{Ker } (P + Q - P \circ Q) = \text{Ker } P \cap \text{Ker } Q$.

Demonstração. i) Que $P \circ Q$ é uma projeção segue do seguinte cálculo

$$(P \circ Q)^2 = P \circ (Q \circ P) \circ Q = P \circ (P \circ Q) \circ Q = (P \circ P) \circ (Q \circ Q) = P \circ Q.$$

Se $v \in \text{Im } P \circ Q$ então $P(Q(v)) = v$ e, conseqüentemente, $v \in \text{Im } P$. Como $P \circ Q = Q \circ P$ então $v = Q(P(v))$ e $v \in \text{Im } Q$. Logo, $\text{Im } P \circ Q \subset \text{Im } P \cap \text{Im } Q$. Se $v \in \text{Im } P \cap \text{Im } Q$ então $v = P(v) = Q(v)$. Daí, $P(Q(v)) = P(v) = v$, ou seja, $v \in \text{Im } P \circ Q$. Logo, $\text{Im } P \cap \text{Im } Q \subset \text{Im } P \circ Q$. Se $v \in \text{Ker } P \circ Q$ então $P(Q(v)) = 0$, ou seja, $Q(v) \in \text{Ker } P$. Como $v = Q(v) + (v - Q(v))$ e $Q(v - Q(v)) = Q(v) - Q^2(v) = 0$, concluimos que $v \in \text{Ker } P + \text{Ker } Q$. Logo, $\text{Ker } P \circ Q \subset \text{Ker } P + \text{Ker } Q$. Se $v \in \text{Ker } P + \text{Ker } Q$ então $v = v_1 + v_2$ com $P(v_1) = 0$ e $Q(v_2) = 0$. Daí,

$$(P \circ Q)(v) = P(Q(v_1)) + P(Q(v_2)) = Q(P(v_1)) + P(Q(v_2)) = Q(0) + P(0) = 0,$$

ou seja, $v \in \text{Ker } P \circ Q$. Logo, $\text{Ker } P + \text{Ker } Q \subset \text{Ker } P \circ Q$.

ii) Usando as hipóteses temos que

$$\begin{aligned} (P + Q - P \circ Q)^2 &= P + P \circ Q - P \circ Q + Q \circ P + Q - Q \circ P - P \circ Q - P \circ Q + P \circ Q \\ &= P + Q - P \circ Q. \end{aligned}$$

Logo, $P + Q - P \circ Q$ é uma projeção de V . Se $v \in \text{Im } (P + Q - P \circ Q)$ então

$$v = (P + Q - P \circ Q)(v) = P(v - Q(v)) + Q(v) \in \text{Im } P + \text{Im } Q.$$

Logo, $\text{Im } (P + Q - P \circ Q) \subset \text{Im } P + \text{Im } Q$. Se $v \in \text{Im } P + \text{Im } Q$ então $v = u + w$ onde $u \in \text{Im } P$ e $w \in \text{Im } Q$. Como P e Q são projeções, $P(u) = u$ e $Q(w) = w$ e, então, $v = P(u) + Q(w)$. Daí,

$$\begin{aligned} (P + Q - P \circ Q)(v) &= (P + Q - P \circ Q)(u) + (P + Q - P \circ Q)(w) \\ &= P(u) + Q(u) - P(Q(u)) + P(w) + Q(w) - P(Q(w)) \\ &= u + Q(u) - Q(P(u)) + P(w) + w - P(Q(w)) \\ &= u + Q(u) - Q(u) + P(w) + w - P(w) \\ &= u + w = v \end{aligned}$$

ou seja, $v \in \text{Im } (P + Q - P \circ Q)$. Segue que $\text{Im } P + \text{Im } Q \subset \text{Im } (P + Q - P \circ Q)$. Finalmente, se $v \in \text{Ker } (P + Q - P \circ Q)$, então $P(v) + Q(v) - P(Q(v)) = 0$. Daí,

$$P(v) = P^2(v) = P(P(Q(v)) - Q(v)) = P(Q(v)) - P(Q(v)) = 0.$$

Similarmente, $Q(v) = 0$. Segue que $v \in \text{Ker } P \cap \text{Ker } Q$ e, portanto, $\text{Ker } (P + Q - P \circ Q) \subset \text{Ker } P \cap \text{Ker } Q$. A inclusão restante é óbvia. \square

Observação 4.1.10 A hipótese $P \circ Q = Q \circ P$ no teorema anterior não pode ser retirada. De fato, as projeções de \mathbb{R}^2 dadas por $P(x, y) = (x + y, 0)$ e $Q(x, y) = (0, y)$ satisfazem $P \circ Q \neq Q \circ P$. Ainda, $Q \circ P$ é projeção, mas $P \circ Q$ não é. O leitor também pode verificar através de exemplos que, quando $P \circ Q$ é uma projeção de V , a soma $\text{Ker } P \circ Q = \text{Ker } P + \text{Ker } Q$ não é necessariamente uma soma direta.

Corolário 4.1.11 *Sejam F um corpo de característica $\neq 2$, V um espaço vetorial sobre F e P e Q projeções de V . Então $P + Q$ é projeção de V se, e somente se, $P \circ Q = Q \circ P = 0$.*

Demonstração. Se $P \circ Q = Q \circ P = 0$ então, pelo teorema anterior, $P+Q = P+Q - P \circ Q$ é uma projeção de V . Suponhamos agora que $P + Q$ seja projeção de V . Então

$$(P + Q)^2 = P^2 + P \circ Q + Q \circ P + Q^2 = P + Q,$$

isto é, $P \circ Q + Q \circ P = 0$. Segue que $P \circ Q + P \circ Q \circ P = 0$ e $P \circ Q \circ P + Q \circ P = 0$. Portanto, $P \circ Q = Q \circ P$. Assim, $0 = P \circ Q + Q \circ P = 2(P \circ Q)$. Como F tem característica $\neq 2$, $P \circ Q = 0$. \square

Observação 4.1.12 Se, nas condições do corolário, $P + Q$ for uma projeção de V então a soma $\text{Im}(P+Q) = \text{Im} P + \text{Im} Q$ é necessariamente direta. De fato, se $v \in \text{Im} P \cap \text{Im} Q$ então $v = P(v) = Q(v)$ e, portanto, $v = P(v) = P(Q(v)) = 0$. Logo, $\text{Im} P \cap \text{Im} Q = \{0\}$.

Exercícios 4.1.13 2) Sejam V um espaço vetorial e P e Q projeções de V . Verifique que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $P \circ Q = Q \circ P = Q$;

ii) $\text{Im}(I_V - P) \subset \text{Im}(I_V - Q)$ e $\text{Im} Q \subset \text{Im} P$.

3) Sejam F um corpo de característica $\neq 2$ e V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Seja ainda $T \in \mathcal{L}(V)$ satisfazendo $T^2 = I_V$. Mostre que:

i) Algum múltiplo de $T + I_V$ é projeção de V ;

ii) Existe uma base de V em relação à qual a matriz $A = (a_{ij})$ que representa T satisfaz $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$, ou -1 .

4) Sejam V um espaço vetorial, $v \in V$ e $v^* \in V^*$.

i) Encontre condições para que $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(u) = v^*(u)v$ seja uma projeção de V ;

ii) Assumindo que T é projeção de V , descreva $\text{Im} T$ e $\text{Ker} T$.

5) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(V)$, mostre que existe $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $S \circ T$ é projeção de V . Existe $R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T \circ R$ é projeção de V ?

6) Sejam V um espaço vetorial sobre F e P uma projeção de V . O operador $I_V + P$ é um isomorfismo?

7) Sejam V um espaço vetorial sobre F e P uma projeção de V . Mostre que P^* é uma projeção de V^* , $\text{Im} P^* = (\text{Ker} P)^\circ$ e $\text{Ker} P^* = (\text{Im} P)^\circ$.

8) Sejam F um corpo de característica $\neq 2$ e V um espaço vetorial sobre F . Mostre que a

correspondência $P \rightarrow 2P - I_V$ define uma função bijetora entre o conjunto das projeções de V e o conjunto $\{T \in \mathcal{L}(V) : T^2 = I_V\}$.

9) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(V)$ tais que $I_V = T_1 + \dots + T_n$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) T_1, \dots, T_n são projeções de V ;
- ii) $T_i \circ T_j = 0, i \neq j$;
- iii) $\rho(T_1) + \dots + \rho(T_n) = n$.

10) Seja V um espaço vetorial sobre F . Mostre que:

i) Se $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ são projeções de V , então $\text{Im } P = \text{Im } Q$ se, e somente se, $P \circ Q = Q$ e $Q \circ P = P$;

ii) Se $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{L}(V)$ são projeções de V satisfazendo $\text{Im } P_1 = \dots = \text{Im } P_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ e $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, então $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$ é uma projeção de V e $\text{Im } (\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n) = \text{Im } P_1$;

iii) A hipótese $\text{Im } P_1 = \dots = \text{Im } P_n$ em ii) é essencial?

11) Sejam V um espaço vetorial sobre F e P e Q projeções de V . Assuma que $P \circ Q \circ P = Q \circ P$. Prove que:

- i) $P + Q - P \circ Q$ é uma projeção de V e $\text{Im } (P + Q - P \circ Q) = \text{Im } P + \text{Im } Q$.
- ii) $P \circ Q$ é uma projeção de V e $\text{Im } P \circ Q = \text{Im } P \cap \text{Im } Q$.
- iii) O que pode ser dito de $\text{Ker } P \circ Q$ e $\text{Ker } (P + Q - P \circ Q)$?

4.2 Subespaços Invariantes

Se V é um espaço vetorial sobre F , T é um operador linear sobre V e W é um subespaço não-trivial de V tal que $T(W) \subset W$, então algumas informações sobre T podem ser obtidas, estudando-se a restrição de T a W bem como o operador $\bar{T} : V/W \rightarrow V/W$ dado por $\bar{T}(v + W) = T(v) + W$, já que os espaços W e V/W são “menores” do que V .

Definição 4.2.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que um subespaço W de V é T -invariante (ou invariante sob T) quando $T(W) \subset W$.*

Observação 4.2.2 Nas condições da definição anterior, é fácil ver que W é T -invariante se, e somente se, $T|_W \in \mathcal{L}(W)$.

Exemplos 4.2.3 1) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então $\{0\}$ e V são subespaços T -invariantes de V .

2) Nas condições do exemplo 1), se V é soma direta de dois subespaços W_1 e W_2 e P é uma projeção sobre W_1 segundo W_2 então W_1 e W_2 são P -invariantes. Estes subespaços também são S -invariantes onde $S(w_1 + w_2) = w_1 - w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.

3) Sejam U o subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formado por todas as funções que são infinitamente diferenciáveis e $T \in \mathcal{L}(U)$ dada por $T(f) = f'$. $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço T -invariante de U , bem como os espaços gerados pelas funções seno e cosseno e o espaço gerado pelas funções $\exp(x)$ e $\exp(-x)$.

Se na definição anterior o espaço V tem dimensão finita, a T -invariância de W admite uma interpretação simples por meio de matrizes. Vejamos isso.

Teorema 4.2.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se V possui um subespaço W de dimensão m que é T -invariante então existe uma base B de V tal que*

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c} A_{m \times m} & A_1 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$$

Demonstração. Basta tomar uma base de W e usar o Teorema 2.3.7 para estendê-la a uma base de V . A base resultante produz a representação desejada para T . \square

Corolário 4.2.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se W_1, \dots, W_k são subespaços T -invariantes de V e $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, então existe uma base B de V tal que*

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & A_2 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & A_3 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$$

onde cada matriz A_j , $j = 1, 2, \dots, k$, tem ordem $\dim_F W_j$.

Teorema 4.2.6 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Se $S \circ T = T \circ S$ então $\text{Ker } S$ e $\text{Im } S$ são subespaços T -invariantes.*

Demonstração. Seja $v \in T(\text{Ker } S)$. Então $v = T(u)$ com $u \in \text{Ker } S$. Se $S \circ T = T \circ S$ então $S(v) = S(T(u)) = T(S(u)) = T(0) = 0$, ou seja, $v \in \text{Ker } S$. Logo, $T(\text{Ker } S) \subset \text{Ker } S$. Seja agora $v_1 \in T(\text{Im } S)$. Então, $v_1 = T(S(u_1))$, onde $u_1 \in V$. Se $S \circ T = T \circ S$, então $v_1 = S(T(u_1)) \in \text{Im } S$. Logo $T(\text{Im } S) \subset \text{Im } S$. \square

O próximo resultado será usado com frequência nas seções seguintes.

Teorema 4.2.7 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e W um subespaço T -invariante de V . Então existe um único $\bar{T} \in \mathcal{L}(V/W)$ tal que $\bar{T} \circ q_W = q_W \circ T$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação \bar{T} dada por $\bar{T}(v + W) = T(v) + W$, $v \in V$. Se $v, v' \in V$ e $v + W = v' + W$ então $v - v' \in W$. Como W é T -invariante, $T(v) - T(v') = T(v - v') \in W$. Logo, $T(v) + W = T(v') + W$, isto é, $\bar{T}(v + W) = \bar{T}(v' + W)$. Portanto, \bar{T} está bem definida. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{T}((v + W) + (v' + W)) &= \bar{T}((v + v') + W) = T(v + v') + W = (T(v) + T(v')) + W \\ &= (T(v) + W) + (T(v') + W) = \bar{T}(v + W) + \bar{T}(v' + W), \end{aligned}$$

e se $\alpha \in F$,

$$\bar{T}(\alpha(v + W)) = \bar{T}(\alpha v + W) = T(\alpha v) + W = (\alpha T(v)) + W = \alpha(T(v) + W) = \alpha \bar{T}(v + W).$$

Logo, $\bar{T} \in \mathcal{L}(V/W)$. Ainda,

$$(\bar{T} \circ q_W)(v) = \bar{T}(v + W) = T(v) + W = q_W(T(v)) = (q_W \circ T)(v), \quad v \in V.$$

Finalmente, suponha que exista $S \in \mathcal{L}(V/W)$ tal que $S \circ q_W = q_W \circ T$. Então

$$S(v + W) = (S \circ q_W)(v) = (q_W \circ T)(v) = q_W(T(v)) = T(v) + W = \bar{T}(v + W), \quad v \in V,$$

ou seja, $S = \bar{T}$. \square

4.3 Somas Diretas Invariantes

Se um espaço vetorial V é uma soma direta de subespaços invariantes sob um operador $T \in \mathcal{L}(V)$, digamos $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$, então toda a informação sobre T está contida

nas restrições de T aos subespaços W_j . De fato, se $v \in V$ então $v = w_1 + \cdots + w_n$, onde $w_j \in W_j$, $j = 1, \dots, n$. Logo, $T(v) = T(w_1) + \cdots + T(w_n) = T|_{W_1}(w_1) + \cdots + T|_{W_n}(w_n)$.

Esta seção contém alguns resultados sobre somas diretas de subespaços invariantes sob algum operador.

Definição 4.3.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que T é semi-simples se cada subespaço T -invariante de V possui um subespaço complementar T -invariante.*

Teorema 4.3.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador semi-simples e W um subespaço T -invariante de V . Então $T|_W$ e a aplicação \bar{T} do Teorema 4.2.7 são semi-simples.*

Demonstração. Escrevamos $S := T|_W$ e seja U um subespaço S -invariante de W . Então U é um subespaço T -invariante de V . Logo, existe um subespaço T -invariante U' de V tal que $V = U \oplus U'$. Daí, $W = U \oplus (W \cap U')$ e $W \cap U'$ é um subespaço S -invariante de W . Portanto, S é semi-simples. Seja agora W' um complementar T -invariante de W . Pela parte anterior podemos concluir que $T|_{W'}$ é semi-simples. Notemos agora que $\bar{T} = \phi \circ T|_{W'} \circ \phi$, onde ϕ é a restrição de q_W a W' . Como $T|_{W'}$ é semi-simples, \bar{T} também é. □

O teorema acima sugere que o seguinte procedimento pode ser aplicado a um operador T semi-simples sobre um espaço vetorial V de dimensão finita: se W_1 é um subespaço T -invariante não-trivial de V , podemos encontrar um complementar W_2 de W_1 que também é T -invariante. Se W_1 possui um subespaço W_3 que é T -invariante, podemos então encontrar um subespaço W_4 de W_1 que é T -invariante, pois $T|_{W_1}$ é semi-simples. O mesmo procedimento aplica-se a W_2 . Como V tem dimensão finita este processo é finito. Ao final, obtém-se uma decomposição $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$, onde cada W_j é T -invariante.

O parágrafo acima motiva a seguinte definição.

Definição 4.3.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $\mathcal{E} \neq \{0\}$ um subconjunto de $\mathcal{L}(V)$. Dizemos que V é \mathcal{E} -irredutível se V e $\{0\}$ são os únicos subespaços de V que são invariantes sob cada elemento de \mathcal{E} .*

Se \mathcal{E} é uma álgebra de operadores, isto é, $\alpha T + S \in \mathcal{E}$ e $T \circ S \in \mathcal{E}$ quando $\alpha \in F$ e $S, T \in \mathcal{E}$, temos que V é \mathcal{E} -irredutível se, e somente se, $V = \{T(v) : T \in \mathcal{E}\}$, para cada $v \in V \setminus \{0\}$. De fato, notemos inicialmente que o conjunto $\{T(v) : T \in \mathcal{E}\}$ é um subespaço de V , invariante por cada elemento de \mathcal{E} . Logo, se V é \mathcal{E} -irredutível, então este subespaço tem que ser V . A outra implicação é imediata.

Teorema 4.3.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $S \in \mathcal{L}(V)$ e \mathcal{E} um subconjunto de $\mathcal{L}(V)$. Assuma que V é \mathcal{E} -irredutível. Se $S \circ T = T \circ S$, $T \in \mathcal{E}$, então $S = 0$ ou S é bijetora.*

Demonstração. Suponha que $S \circ T = T \circ S$, $T \in \mathcal{E}$, e que $S \neq 0$. Se $v \in V$ e $S(v) = 0$ então $S(T(v)) = T(S(v)) = 0$, $T \in \mathcal{E}$. Ainda, $T(S(V)) = S(T(V)) \subset S(V)$, $T \in \mathcal{E}$. Logo, $\text{Ker } S$ e $\text{Im } S$ são invariantes sob cada elemento de \mathcal{E} . Como V é \mathcal{E} -irredutível, $\text{Ker } S = \{0\}$ e $\text{Im } S = V$. Portanto, S é bijetora. \square

Teorema 4.3.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e W_1, \dots, W_n subespaços de V satisfazendo $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. Sejam P_1, \dots, P_n as projeções de V dadas pelo Teorema 4.1.7. Valem as seguintes afirmações:*

- i) *Se $T \circ P_j = P_j \circ T$ para algum j então W_j é T -invariante;*
- ii) *Se W_j é T -invariante, $j = 1, \dots, n$, então $T \circ P_j = P_j \circ T$, $j = 1, \dots, n$.*

Demonstração. i) Seja $v \in W_j$. Como $W_j = \text{Im } P_j$, $P_j(v) = v$. Se $T \circ P_j = P_j \circ T$ então

$$T(v) = T(P_j(v)) = (T \circ P_j)(v) = (P_j \circ T)(v) \in \text{Im } P_j = W_j,$$

ou seja, W_j é T -invariante.

ii) Seja $v \in V$. Usando as informações do Teorema 4.1.7, temos que

$$v = I_V(v) = (P_1 + \dots + P_n)(v) = P_1(v) + \dots + P_n(v),$$

e, daí, $T(v) = (T \circ P_1)(v) + \dots + (T \circ P_n)(v)$. Se W_j é T -invariante então $T(P_j(v)) = P_j(u)$ para algum $u \in V$ e, conseqüentemente,

$$(P_j \circ T \circ P_j)(v) = (P_j \circ P_j)(u) = P_j(u)$$

Ainda, $(P_i \circ T \circ P_j)(v) = 0$, $i \neq j$. Concluindo, temos que

$$\begin{aligned}(P_j \circ T)(v) &= P_j((T \circ P_1)(v) + \cdots + (T \circ P_n)(v)) \\ &= (P_j \circ T \circ P_1)(v) + \cdots + (P_j \circ T \circ P_n)(v) \\ &= P_j(u) = T(P_j(v)) = (T \circ P_j)(v)\end{aligned}$$

Em outras palavras, $P_j \circ T = T \circ P_j$. □

Exercícios 4.3.6 12) Considere o subespaço V de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ formado pelas funções que são contínuas. Verifique então quais dos seguintes subespaços de V são T -invariantes, onde

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad f \in V$$

- i) $W = \{p|_{[0,1]} : p \in P(\mathbb{R})\}$;
- ii) $W = \{f|_{[0,1]} : f \text{ é diferenciável em } \mathbb{R}\}$;
- iii) $W = \{f \in V : f(1/2) = 0\}$.

13) Dê exemplo de um espaço vetorial V e um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ tais que os únicos subespaços T -invariantes de V são os triviais.

14) Dê exemplo de um espaço vetorial V , $T \in \mathcal{L}(V)$ e um subespaço T -invariante W tais que W não possua complementar T -invariante em V .

15) Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $W \leq V$. Mostre que se W é T -invariante então W° é T^* -invariante.

16) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão ímpar. Mostre que para cada operador $T \in \mathcal{L}(V) \setminus \{0\}$ existe pelo menos um subespaço T -invariante próprio de V .

17) Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $W \leq V$. Mostre que:

i) Se P é uma projeção de V tal que $\text{Im } P = W$ e $T \circ P = P \circ T \circ P$, então W é T -invariante;

ii) Se W é T -invariante então $T \circ P = P \circ T \circ P$ para toda projeção P de V cuja imagem é W ;

ii) Se P é uma projeção de V , comprove que $\text{Im } P$ e $\text{Ker } P$ são T -invariantes se, e somente se, $P \circ T = T \circ P$.

18) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V) \setminus \{0\}$. Suponha que $P \circ T = T \circ P$ para toda projeção P de V que possui imagem e núcleo P -invariantes. Mostre que:

i) $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$;

ii) T é um múltiplo de uma projeção de V .

19) Sejam V um espaço vetorial sobre F e W um subespaço não-trivial de V . Mostre que existe uma projeção P de V tal que W não é P -invariante.

20) Sejam V um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T \circ P = P \circ T$ para toda projeção P de V . Mostre que T é um múltiplo de I_V .

21) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove:

i) $\text{Im } T$ tem um complementar T -invariante se, e somente se, $\text{Ker } T$ e $\text{Im } T$ são subespaços independentes;

ii) Se $\text{Im } T$ e $\text{Ker } T$ são independentes então $\text{Ker } T$ é o único subespaço complementar de $\text{Im } T$ que é T -invariante.

4.4 Autovalores e Autovetores

Os menores subespaços de um espaço vetorial V sobre F que são invariantes sob um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$ são unidimensionais. Eles são da forma $\{\alpha v : \alpha \in F\}$ onde $v \neq 0$ e $T(v) = \lambda v$ para algum $\lambda \in F$.

Definição 4.4.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Um elemento $\lambda \in F$ é chamado autovalor de T se existir um vetor $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Cada vetor v que satisfaz esta relação é chamado de autovetor de T associado a λ .*

Observação 4.4.2 1) Nas condições acima, costuma-se dizer que λ é um autovalor associado a v .

2) Um autovetor tem exatamente um autovalor associado a ele (prove isso!).

3) Um escalar α é um autovalor de T se, e somente se, $\text{Ker } (T - \alpha I_V) \neq \{0\}$.

Exemplos 4.4.3 1) Sejam V um espaço vetorial sobre F , $\alpha \in F$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(v) = \alpha v$, $v \in V$. Se $\beta \in F \setminus \{\alpha\}$, então $T(v) = \beta v$ se, e somente se, $v = 0$. Logo, β não é autovalor de T . Por outro lado, α é autovalor de T e qualquer $v \in V \setminus \{0\}$ é autovetor de T associado a α .

2) Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(x, y) = (y, -x)$. A equação $T(x, y) = \alpha(x, y)$ corresponde às equações $y = \alpha x$ e $-x = \alpha y$. Resolvendo em y , obtemos $(1 + \alpha^2)y = 0$.

Logo, $y = x = 0$. Conseqüentemente, T não possui autovetores.

3) Sejam $V = \mathbb{C}^2$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(z, w) = (w, -z)$. Como acima, a equação $T(z, w) = \alpha(z, w)$ corresponde a $(1 + \alpha^2)w = 0$. Segue que $\alpha = i$ é autovalor de T e os autovetores associados são os vetores não-nulos de $\{(1, i)\}$. Da mesma forma, $\alpha = -i$ é autovalor de T e os autovetores associados são os vetores não-nulos de $\{(1, -i)\}$.

4) Sejam V um espaço vetorial sobre F e P uma projeção de V . A equação $P(v) = \alpha v$, $\alpha \in F$, equivale a $(\alpha - \alpha^2)v = 0$. Segue que $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ são autovalores de P . Todo vetor não-nulo de $\text{Ker } P$ é autovetor associado a $\alpha = 0$. Todo vetor não-nulo de $\text{Im } P$ é autovetor de P associado a $\alpha = 1$.

5) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que exista um inteiro positivo k tal que $T^k = 0$, mas $T^{k-1} \neq 0$. Se $T(v) = \alpha v$, vemos que $T^2(v) = T(\alpha v) = \alpha^2 v$ e, conseqüentemente, $T^m(v) = \alpha^m v$, $m = 1, 2, \dots$. Em particular, $\alpha^k v = 0$. Segue que $\alpha = 0$ é autovalor de T .

Teorema 4.4.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) T possui autovalor (e, conseqüentemente, autovetor);*
- ii) V possui um subespaço T -invariante de dimensão 1.*

Demonstração. Se α for um autovalor de T e $v \in V$ é um autovetor associado a α então $W = \{v\}$ é um subespaço de V e $\dim_F W = 1$. Se $w \in T(W)$ então $w = T(w')$, $w' \in W$. Pela definição de W , $w' = \beta v$, $\beta \in F$. Logo,

$$w = T(w') = T(\beta v) = \beta T(v) = \beta \alpha v \in W.$$

Portanto, W é T -invariante. Reciprocamente, suponha que $U = \{u\}$ seja um subespaço T -invariante de V . Como $u \neq 0$ e $T(u) \in U$, então $T(u) = \lambda u$, $\lambda \in F$. Portanto, λ é autovalor de T e u é um autovetor associado a λ . □

Definição 4.4.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $\alpha \in F$. O autoespaço de T associado a α é o subespaço de V dado por*

$$V(\alpha, T) := \{v \in V : T(v) = \alpha v\} = \text{Ker}(T - \alpha I_V).$$

O auto-espaço generalizado de T associado a α é o conjunto

$$V_\alpha(T) := \cup_{n=0}^{\infty} \text{Ker} (T - \alpha I_V)^n.$$

Exercício 4.4.6 22) Verifique que de fato $V(\alpha, T)$ é um subespaço T -invariante de V . Vale a mesma conclusão para $V_\alpha(T)$?

Teorema 4.4.7 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $\lambda \in F$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) λ é um autovalor de T ;
- ii) $V(\lambda, T) \neq \{0\}$;
- iii) $V_\lambda(T) \neq \{0\}$

Demonstração. As duas primeiras afirmações são obviamente equivalentes. A inclusão $V(\lambda, T) \subset V_\lambda(T)$ revela que ii) implica iii). Para concluir a prova, suponha que $v \in V_\lambda(T) \setminus \{0\}$. Existe um menor índice n tal que $v \in \text{Ker} (T - \lambda I_V)^n$. Segue que $(T - \lambda I_V)^{n-1}(v) \in \text{Ker} (T - \lambda I_V)$. Pela minimalidade de n , $(T - \lambda I_V)^{n-1}(v) \neq 0$. Portanto, $V(\lambda, T) \neq \{0\}$.

□

Quando o espaço é de dimensão finita, duas novas condições podem ser acrescentadas ao teorema anterior.

Teorema 4.4.8 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $\lambda \in F$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) λ é um autovalor de T ;
- ii) $T - \lambda I_V$ não é um isomorfismo;
- iii) $\det(T_B^B - \lambda I_n) = 0$, qualquer que seja a base B de V .

Demonstração. Se λ é autovalor de T , então $V(\lambda, T) \neq \{0\}$. Logo, $T - \lambda I_V$ não é injetora. Por outro lado, se $T - \lambda I_V$ não é um isomorfismo, o Teorema 3.2.7 revela que $T - \lambda I_V$ não é injetora. Portanto, $V(\lambda, T) \neq \{0\}$ e λ é autovalor de T . Assim i) e ii) são equivalentes. Suponhamos agora que $T - \lambda I_V$ é um isomorfismo. Então existe $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $(T - \lambda I_V) \circ S = S \circ (T - \lambda I_V) = I_V$. Se B é uma base de V , concluímos

que $I_n = (S \circ (T - \lambda I_V))_B^B = S_B^B(T - \lambda I_V)_B^B$. Em particular, $\det(T - \lambda I_V)_B^B \neq 0$. Logo, iii) implica ii). Finalmente, suponha que $\det(T - \lambda I_V)_B^B \neq 0$, para alguma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V . Escrevamos $R = T - \lambda I_V$ e denotemos por a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, as entradas da matriz R_B^B . Temos que

$$R(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Seja $v \in \text{Ker } R$. Escrevendo $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, temos que

$$0 = R(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j R(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} \right) v_i$$

Como B é base de V , segue que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Como $\det(a_{ij}) \neq 0$, $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, n$, isto é, $v = 0$. Assim, $\text{Ker } R = \{0\}$. \square

Lema 4.4.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Valem as seguintes propriedades:*

- i) *Se α é um autovalor de T e $S \in \mathcal{L}(V)$ satisfaz $S \circ T = T \circ S$ então $V(\alpha, T)$ e $V_\alpha(T)$ são subespaços S -invariantes; em particular, ambos são T -invariantes;*
- ii) *Se α é um autovalor de T , então α é o único autovalor de $T|_{V(\alpha, T)}$;*
- iii) *Se α é um autovalor de T então α não é um autovalor de $\bar{T} \in \mathcal{L}(V/V_\alpha(T))$, como definido no Teorema 4.2.7;*
- iv) *Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os autovalores distintos de T , então os espaços $V(\alpha_1, T), \dots, V(\alpha_n, T)$ são independentes.*

Demonstração. i) A condição $S \circ T = T \circ S$ revela que $((T - \alpha I_V)^k \circ S) = S \circ (T - \alpha I_V)^k$, $k = 1, 2, \dots$. Logo, se v está no núcleo de $(T - \alpha I_V)^k$ então o mesmo vale para $S(v)$.

ii) Seja λ um autovalor de $T|_{V(\alpha, T)}$ e suponhamos que $v \in V(\alpha, T)$ é um autovetor associado a ele. Então, $0 = (T - \alpha I_V)(v) = (\lambda - \alpha)v$. Como $v \neq 0$, segue que $\lambda = \alpha$.

iii) Suponhamos que α é um autovalor de T e que $\bar{T}(v + V_\alpha(T)) = \alpha(v + V_\alpha(T))$, para algum $v \in V \setminus \{0\}$. Então, pela definição de \bar{T} , vemos que $(T - \alpha I_V)(v) \in V_\alpha(T)$. Portanto,

existe um inteiro k tal que

$$(T - \alpha I_V)^{k+1}(v) = (T - \alpha I_V)^k((T - \alpha I_V)(v)) = 0$$

Em particular, $v \in V_\alpha(T)$, ou seja, $v + V_\alpha(T) = V_\alpha(T)$.

iv) Suponhamos que $v_1 + \dots + v_n = 0$, onde $v_i \in V(\alpha_i, T)$, $i = 1, \dots, n$. Então

$$0 = \prod_{j \neq i} (T - \alpha_j I_V)(v_1 + \dots + v_n) = \prod_{j \neq i} (T - \alpha_j I_V)v_i = \left(\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j) \right) v_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Segue que $v_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. □

Definição 4.4.10 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. O conjunto de todos os autovalores de T é denominado o espectro de T .*

Definição 4.4.11 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e α um autovalor de T . A dimensão de $V(\alpha, T)$ é chamada de multiplicidade geométrica de α .*

Definição 4.4.12 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n e $T \in \mathcal{L}(V)$. O polinômio característico de T é o polinômio de grau n dado por*

$$p_T(\lambda) = \det(T_B^B - \lambda I_n)$$

onde B é uma base qualquer de V .

Observação 4.4.13 1) O polinômio característico não depende da base B . De fato, se C é uma outra base de V , então existe uma matriz $A \in M_{n \times n}(F)$ tal que $T_C^C = A^{-1}T_B^B A$. Daí,

$$\begin{aligned} \det(T_C^C - \lambda I_n) &= \det[(A^{-1}T_B^B A) - \lambda I_n] = \det(A^{-1}T_B^B A - A^{-1}\lambda I_n A) \\ &= \det[A^{-1}(T_B^B - \lambda I_n)A] = \det A^{-1} \det(T_B^B - \lambda I_n) \det A \\ &= \det(T_B^B - \lambda I_n) \end{aligned}$$

2) As raízes do polinômio característico de T são os autovalores de T (Teorema 4.4.8).

Definição 4.4.14 *Um corpo F é algebricamente fechado se todo elemento de $P(F)$ possui pelo menos uma raiz em F .*

Exemplo 4.4.15 \mathbb{R} não é algebricamente fechado; \mathbb{C} é algebricamente fechado.

Teorema 4.4.16 *Sejam F um corpo algebricamente fechado, V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então T possui pelo menos um autovalor.*

Teorema 4.4.17 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ autovalores distintos de T . Se v_1, \dots, v_n são autovetores de T associados a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, respectivamente, então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.i.*

Demonstração. Usaremos indução sobre n . O caso $n = 1$ é trivial uma vez que todo autovetor é não nulo. Suponhamos então que o resultado seja verdadeiro para cada conjunto de $n - 1$ autovetores de T . Sejam v_1, \dots, v_n como no enunciado e suponhamos que $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = 0$, $\beta_i \in F$, $i = 1, \dots, n$. Então

$$0 = T(0) = T\left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \beta_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j v_j$$

Usando a equação original, obtemos

$$\beta_1(\alpha_1 - \alpha_n)v_1 + \dots + \beta_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n)v_{n-1} = 0.$$

Como $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é l.i., a hipótese de indução implica que $\beta_j(\alpha_j - \alpha_n) = 0$, $j = 1, \dots, n - 1$. Como os autovalores são distintos, $\beta_j = 0$, $j = 1, \dots, n - 1$. Voltando à equação original mais uma vez, obtemos $\beta_n v_n = 0$. Portanto, $\beta_n = 0$. Isto mostra que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.i. \square

Definição 4.4.18 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que T é diagonalizável quando V possui uma base formada somente por autovetores de T .*

Observação 4.4.19 Se na definição anterior, o espaço V tem dimensão finita, então a matriz de T em relação à base de autovetores é diagonal e sua diagonal principal é formada pelos autovalores de T (com possivelmente algumas repetições).

Corolário 4.4.20 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se T possui n autovalores distintos, então T é diagonalizável.*

Exemplo 4.4.21 Consideremos o espaço \mathbb{R}^3 usual e $T \in \mathcal{L}(V)$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z).$$

É fácil ver que o polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda)$. Portanto, T possui dois autovalores, $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$. A equação $T(x, y, z) = -2(x, y, z)$ equivale à equação escalar $x - y + z = 0$. Logo,

$$V(-2, T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = [\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}].$$

Similarmente,

$$V(4, T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z\} = [\{(1, 1, 2)\}].$$

Como $C = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ é l.i., segue que C é base de \mathbb{R}^3 . Ainda, T é diagonalizável e

$$T_C^C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideremos agora $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$S(x, y, z) = (-3x - 7y - 6z, x + 5y + 6z, -x - y - 2z).$$

Então, $p_S(\lambda) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda)$, $V(-2, S) = [\{(1, -1, 1)\}]$ e $V(4, S) = [\{(-1, 1, 0)\}]$. Como não existe uma base de \mathbb{R}^3 formada por autovetores de S , este não é diagonalizável.

Definição 4.4.22 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e α um autovalor de T . A multiplicidade algébrica de α , denotada por $m_T(\alpha)$, é a multiplicidade de α como raiz do polinômio característico p_T .*

Teorema 4.4.23 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se α é um autovalor de T então $\dim_F V(\alpha, T) \leq m_T(\alpha)$.*

Demonstração. Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base de $V(\alpha, T)$. Tome base B de V contendo esta base de $V(\alpha, T)$. É fácil ver que T_B^B é da forma

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c} \alpha I_k & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

onde $D \in M_{(n-k) \times (n-k)}(F)$. Daí,

$$p_T(\lambda) = (\alpha - \lambda)^k \det(D - \lambda I_{n-k}) = (-1)^k (\lambda - \alpha)^k \det(D - \lambda I_{n-k})$$

Portanto, $k \leq m_T(\alpha)$. □

Observação 4.4.24 O exemplo anterior mostra que a desigualdade do teorema acima pode ser estrita.

Teorema 4.4.25 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ os autovalores distintos de T . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) T é diagonalizável;*
- ii) $V = V(\alpha_1, T) + \dots + V(\alpha_n, T)$ (a soma é na verdade direta);*
- iii) $\dim_F V = \dim_F V(\alpha_1, T) + \dots + \dim_F V(\alpha_n, T)$;*
- iv) $p_T(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{d_1} \dots (\lambda - \alpha_n)^{d_n}$, onde $d_j = \dim_F V(\alpha_j, T)$, $j = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Se T é diagonalizável, então V possui uma base composta inteiramente de autovetores de T . Logo, $V = V(\alpha_1, T) + \dots + V(\alpha_n, T)$. Portanto, i) implica ii). O Lema 4.4.9-iv) revela que os espaços $V(\alpha_j, T)$, $j = 1, \dots, n$ são independentes. Logo, a condição ii) torna-se de fato $V = V(\alpha_1, T) \oplus \dots \oplus V(\alpha_n, T)$ (Exercícios 2.2.23). Em particular, ii) implica iii). Que iii) implica i) segue do fato dos espaços $V(\alpha_1, T), \dots, V(\alpha_n, T)$ serem independentes. Certamente iv) é equivalente às demais. □

Corolário 4.4.26 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. O operador T é diagonalizável se, e somente se, as seguintes condições valem:*

- i) Todas as raízes de p_T pertencem a F ;*
- ii) Se α é autovalor de T então $\dim_F V(\alpha, T) = m_T(\alpha)$.*

Demonstração. Se as condições i) e ii) valem então p_T decompõe-se como no ítem iv) do Teorema 4.4.25. Portanto, T é diagonalizável. Reciprocamente, se T é diagonalizável, a condição i) acima vale devido à equivalência entre as duas primeiras afirmações do Teorema 4.4.25. Finalmente, se α é um autovalor de T , o Teorema 4.4.23 revela que $\dim_F V(\alpha, T) \leq m_T(\alpha)$. A condição iii) do teorema anterior, mostra então que a desigualdade acima é na verdade uma igualdade. □

Corolário 4.4.27 *Sejam F um corpo algebricamente fechado, V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. O operador T é diagonalizável se, e somente se, $\dim_F V(\alpha, T) = m_T(\alpha)$ para cada autovalor α de T .*

Teorema 4.4.28 (Decomposição Espectral) *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) T é diagonalizável;

ii) $T = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os autovalores distintos de T e P_1, \dots, P_n são projeções de V satisfazendo $P_i \circ P_j = 0$, $i \neq j$, e $I_V = P_1 + \cdots + P_n$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que ii) vale. Pelo Teorema 4.1.8, sabemos que $V = \text{Im } P_1 \oplus \cdots \oplus \text{Im } P_n$. Para cada i , seja B_i uma base de $\text{Im } P_i$. Vamos mostrar que $\cup_{i=1}^n B_i$ é base de V , composta de autovetores de T . Notemos que

$$T \circ P_j = (\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n) \circ P_j = \alpha_j (P_j \circ P_j) = \alpha_j P_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Se $v_j \in B_j$ então

$$T(v_j) = T(P_j(v_j)) = (T \circ P_j)(v_j) = \alpha_j P_j(v_j) = \alpha_j v_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Logo, v_j é autovetor de T associado a α_j . Lema 4.4.9-iv) implica que $\cup_{i=1}^n B_i$ é base de V . Portanto, i) vale. Reciprocamente, suponhamos que T seja diagonalizável. Pelo Corolário 4.4.26, todas as raízes de p_T estão em F . Sejam β_1, \dots, β_m as raízes distintas de p_T . Pelo Teorema 4.4.25, temos ainda que $V = V(\beta_1, T) \oplus \cdots \oplus V(\beta_m, T)$. Pelo Teorema 4.1.7, existem projeções Q_1, \dots, Q_m de V tais que $I_V = Q_1 + \cdots + Q_m$, $\text{Im } Q_j = V(\beta_j, T)$, $j = 1, \dots, m$ e $Q_i \circ Q_j = 0$, $i \neq j$. No restante da prova, vamos verificar que $T = \beta_1 Q_1 + \cdots + \beta_m Q_m$. Seja então $v \in V$. Podemos escrever $v = v_1 + \cdots + v_m$, onde $v_j \in V(\beta_j, T)$, $j = 1, \dots, m$. Logo,

$$T(v) = T(v_1) + \cdots + T(v_m) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m = \beta_1 Q_1(v_1) + \cdots + \beta_m Q_m(v_m).$$

Por outro lado,

$$Q_j(v) = Q_j(v_1) + \cdots + Q_j(v_m) = Q_j(Q_1(v_1)) + \cdots + Q_j(Q_m(v_m)) = Q_j(v_j), \quad j = 1, \dots, m.$$

Assim,

$$T(v) = \beta_1 Q_1(v_1) + \cdots + \beta_m Q_m(v_m) = \beta_1 Q_1(v) + \cdots + \beta_m Q_m(v) = (\beta_1 Q_1 + \cdots + \beta_m Q_m)(v).$$

Isto tudo mostra que ii) vale. □

Definição 4.4.29 Uma decomposição do operador linear T como descrita no Teorema 4.4.28-ii) é chamada de decomposição espectral de T .

Exercícios 4.4.30 23) Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formado pelas funções que são contínuas. Determine os autovalores do operador $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

24) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que:

i) Se v é autovetor de T , então v é autovetor de T^n , $n \geq 1$;

ii) T é isomorfismo se, e somente se, 0 não é autovalor de T ;

iii) Se T é isomorfismo, então α é autovalor de T se, e só se, α^{-1} é autovalor de T^{-1} ;

iv) Se todo elemento não-nulo de V é autovetor, então T é um múltiplo da identidade.

25) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $S, T \in \mathcal{L}(V)$ tais que $S \circ T = T \circ S$. Mostre que se v é autovetor de T e $S(v) \neq 0$, então $S(v)$ é autovetor de T .

26) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove: se T tem todos os seus autovalores iguais a zero, existe $n \geq 1$ tal que $T^n = 0$.

27) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Defina o traço de T como sendo o traço de T_B^B , para alguma base B de V . Mostre que:

i) O traço de T está bem definido, isto é, sua definição independe da base B ;

ii) O traço de T é o coeficiente de λ^{n-1} na expressão de $p_T(\lambda)$;

iii) Se T é projeção de V então seu traço é igual a $\dim_F \text{Im } T$;

iv) Se F é algebricamente fechado então o traço de T é a soma de todos os autovalores de T , contando-se as possíveis repetições.

28) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e P uma projeção de V . Mostre que $P \circ T$ e $T \circ P$ têm o mesmo polinômio característico.

29) Sejam V um espaço vetorial sobre F , $p \in P(F)$, $p \neq$ constante e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que:

i) Se α é autovalor de T então $p(\alpha)$ é autovalor de $p(T)$;

ii) Se F é algebricamente fechado e λ é autovalor de $p(T)$ então $\lambda = p(\alpha)$ para algum autovalor α de T ;

iii) A hipótese sobre F em ii) é essencial.

30) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que:

i) Se $T \circ S = S \circ T$ e V tem uma base formada por autovetores de T e uma base formada por autovetores de S então V tem uma base formada por autovetores de ambos, T e S .

ii) Se V tem uma base formada por autovetores de ambos T e S , então $T \circ S = S \circ T$.

31) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que o espectro de T coincide com o espectro de T^* . Decida se a hipótese “dimensão finita” é essencial.

32) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que se T é diagonalizável então $T \circ T$ é diagonalizável.

33) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que se $I_V - T \circ S$ é um isomorfismo então $I_V - S \circ T$ também é. Conclua que $T \circ S$ e $S \circ T$ têm os mesmos autovalores.

34) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que:

i) Se F tem característica $\neq 2$ e $T^2 = I_V$ então T é diagonalizável;

ii) Se F é algebricamente fechado e $T^n = I_V$, para algum n positivo e n não é divisível pela característica de F , então T é diagonalizável.

35) Sejam $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ com pelo menos um deles sendo um isomorfismo. Mostre que se $T \circ S$ é diagonalizável então $S \circ T$ é diagonalizável.

36) Exiba isomorfismos T e S sobre um mesmo espaço vetorial tais que $T \circ S$ não seja diagonalizável.

37) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Dada uma decomposição espectral $T = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r$ de T , prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $S \circ T = T \circ S$;

ii) $S \circ P_j = P_j \circ S$, $1 \leq j \leq r$;

iii) $V(\alpha_j, T)$ é S -invariante para $1 \leq j \leq r$.

38) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que $T = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r$ seja uma decomposição espectral de T e que $\alpha_j \neq 0$ para todo j . Prove que T é um isomorfismo e que T^{-1} tem decomposição espectral dada por $T^{-1} = \alpha_1^{-1} P_1 + \dots + \alpha_r^{-1} P_r$.

39) Mostre que um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita possui

uma única decomposição espectral.

40) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $W \leq V$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ um isomorfismo. Prove: se W é T -invariante então W é T^{-1} -invariante.

41) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e W um subespaço T -invariante de V . Prove que p_T é o produto do polinômio característico de $T|_W$ pelo polinômio característico da aplicação \bar{T} definida no Teorema 4.2.7.

42) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e W um subespaço T -invariante de V . Assuma que T é diagonalizável. Prove que:

- i) Se $V = V(\alpha_1, T) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_n, T)$ então $W = (W \cap V(\alpha_1, T)) \oplus \cdots \oplus (W \cap V(\alpha_n, T))$;
- ii) W possui um complementar T -invariante;
- iii) $T|_W$ e \bar{T} são diagonalizáveis.

43) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e \mathcal{F} uma família de $\mathcal{L}(V)$ com a seguinte propriedade: se $S, T \in \mathcal{F}$ então $S \circ T = T \circ S$. Se cada elemento de \mathcal{F} é diagonalizável, prove que existe uma base B de V tal que a matriz de qualquer elemento de \mathcal{F} em relação a B é diagonal.

44) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se todas as raízes de p_T estão em F , prove que existe uma base de V em relação à qual a matriz de T é tri-diagonal (isto é, todos os elementos abaixo da diagonal principal da matriz são iguais a 0).

45) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e \mathcal{F} uma família de $\mathcal{L}(V)$ com a seguinte propriedade: se $S, T \in \mathcal{F}$ então $S \circ T = T \circ S$. Se cada elemento de \mathcal{F} é tri-diagonalizável, como descrito no exercício anterior, prove que existe uma base B de V tal que a matriz de qualquer elemento de \mathcal{F} em relação a B é tri-diagonal.

46) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador diagonalizável. Prove que $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$.

47) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador diagonalizável. Se $p_T(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$, prove que $\rho(T) = \max\{j : \alpha_j \neq 0\}$.

48) Sejam F um corpo algebricamente fechado, V um espaço vetorial sobre F , de dimensão 2 e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) T é diagonalizável;

ii) T é um múltiplo de I_V ou T possui dois autovalores.

49) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove: se A é um subconjunto l.i. de V formado por autovetores de T então existe uma base B de V composta inteiramente de autovetores de T que contém A .

50) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$.

i) Se α é um autovalor de T , encontre condições para que α seja o único autovalor de $T|_{V_\alpha(T)}$.

ii) Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os autovalores distintos de T , é sempre verdade que os espaços $V_{\alpha_1}(T), \dots, V_{\alpha_n}(T)$ são independentes?

4.5 O Polinômio Minimal

Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(V)$ não é diagonalizável, qual é a representação matricial mais simples desse operador?

Se p_T tem todas as suas raízes em F , mostraremos que é possível encontrar uma base B de V tal que T_B^B é “quase” uma matriz diagonal.

Definição 4.5.1 Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $p \in P(F)$. Se $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_i \in F$, $i = 0, \dots, n$, então

$$p(T) := a_0I_V + a_1T + \dots + a_nT^n$$

Observação 4.5.2 Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se $\dim_F V = n$ então existe pelo menos um polinômio $p \in P(F) \setminus \{0\}$ tal que $p(T) = 0$. De fato, se $T = 0$ a afirmação é óbvia. Se $T \neq 0$, notemos que o conjunto $\{I_V, T, \dots, T^{n^2}\}$ é l.d. uma vez que $\dim_F \mathcal{L}(V) = n^2$. Logo, existem $\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2} \in F$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_0I_V + \alpha_1T + \dots + \alpha_{n^2}T^{n^2} = 0.$$

Segue que

$$p(x) := \alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_{n^2}x^{n^2} \in P(F) \setminus \{0\}$$

e $p(T) = 0$.

O resultado a seguir é o famoso Teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema 4.5.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então $p_T(T) = 0$.*

Demonstração. Faremos a prova somente no caso em que F é algebricamente fechado. Para uma prova sem essa hipótese adicional, o leitor pode consultar alguns textos mais completos como por exemplo [12]. A prova será por indução sobre $n =: \dim_F V$. Obviamente, o resultado vale para espaços vetoriais unidimensionais. Suponhamos então que o resultado valha para espaços vetoriais de dimensão $n - 1$ e seja V um espaço vetorial sobre F de dimensão n . Fixemos um autovalor $\alpha \in F$ de T e consideremos uma base $B := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , onde v_1 é autovetor associado ao autovalor α . Olhando-se para T_B^B vemos que $p_T(\lambda) = (\alpha - \lambda)p_1(\lambda)$ onde $p_1(\lambda) = \det(A - \lambda I_{n-1})$, $A \in M_{(n-1) \times (n-1)}(F)$. Definamos agora $W = [\{v_1\}]$ e observemos que o conjunto $B_1 = \{v_2 + W, \dots, v_n + W\}$ é uma base de V/W . Como W é T -invariante, o Teorema 4.2.7 garante a existência de $\bar{T} \in \mathcal{L}(V/W)$ tal que $\bar{T} \circ q_W = q_W \circ T$. Obviamente, $\bar{T}_{B_1}^{B_1} = A$ e, conseqüentemente, $p_{\bar{T}} = p_1$. Pela hipótese de indução, $p_{\bar{T}}(\bar{T}) = p_1(\bar{T}) = 0$. Daí, $0 = p_1(\bar{T}) \circ q_W = q_W \circ p_1(T)$, revelando que $p_1(T)(v) \in W$, $v \in V$. Finalmente, se $v \in V$ e $p_1(T)(v) = \beta v_1$, $\beta \in F$, então

$$p_T(T)(v) = ((\alpha I_V - T) \circ p_1(T))(v) = (\alpha I_V - T)(\beta v_1) = \beta(\alpha v_1 - T(v_1)) = \beta 0 = 0.$$

Em outras palavras, $p_T(T) = 0$. □

Definição 4.5.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. O polinômio minimal de T é um elemento $p \in P(F)$, mônico (o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1) e de grau mínimo que satisfaz $p(T) = 0$.*

Coletamos as propriedades básicas do polinômio minimal na seguinte proposição.

Proposição 4.5.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$.*

- i) O polinômio minimal de T existe e é único;*
- ii) Se $p \in P(F)$ satisfaz $p(T) = 0$, então p é divisível pelo polinômio minimal de T ;*
- iii) As raízes do polinômio característico de T coincidem com as raízes do polinômio*

minimal de T ;

iv) Se α é uma raiz de multiplicidade r do polinômio minimal de T então $V_\alpha(T) = \text{Ker}(T - \alpha I_V)^r$.

Demonstração. i) Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que existe um polinômio $p \in P(F)$ tal que $p(T) = 0$. Logo, existe(m) aquele(s) de grau mínimo. Se p_1 e p_2 são dois polinômios de grau mínimo com $p_j(T) = 0$, $j = 1, 2$, então podemos escrever $p_1 = qp_2 + r$ onde $q, r \in P(F)$, com o grau de r menor do que o grau de p_2 . Como $r(T) = p_1(T) - q(T) \circ p_2(T) = 0$, concluímos que $r = 0$. Portanto, p_1 é divisível por p_2 . O fato do polinômio minimal ser mônico, garante então sua unicidade.

ii) É similar à prova de i).

iii) Se λ é um autovalor de T , $T(v) = \lambda v$ para algum $v \in V \setminus \{0\}$. Daí, se m é o polinômio minimal de T , então $0 = m(T)(v) = m(\lambda)v$. Segue que $m(\lambda) = 0$. Portanto, toda raiz de p_T é raiz de m . A recíproca segue de ii).

iv) Já sabemos que $\text{Ker}(T - \alpha I_V)^r \subset V_\alpha(T)$. Suponhamos então que exista $v \in V_\alpha(T) \setminus \text{Ker}(T - \alpha I_V)^r$. Existe um menor índice n , $n > r$, tal que $v \in \text{Ker}(T - \alpha I_V)^n$. Como α é raiz do polinômio minimal m de T , podemos escrever $m(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \alpha)^r$, onde $q \in P(F)$ e $n = \dim_F V$. Como q e $(\lambda - \alpha)^{n-r}$ não possuem divisores comuns diferentes de 1, podemos encontrar $q_1, q_2 \in P(F)$ tais que

$$q_1(\lambda)q(\lambda) + q_2(\lambda)(\lambda - \alpha)^{n-r} = 1.$$

Logo, se $w = (T - \alpha I_V)^r(v)$, temos que

$$w = q_1(T)q(T)(w) + q_2(T)(T - \alpha I_V)^{n-r}(w) = q_1(T)m(T)(v) + q_2(T)(T - \alpha I_V)^n(v) = 0,$$

uma contradição. □

Exemplos 4.5.6 1) Sejam F um corpo, $\alpha \in F$ e $V = F^n$. As aplicações $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$ dadas por $T_1(v) = \alpha v$, $v \in V$ e

$$T_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha\alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha\alpha_n), \quad \alpha_j \in F, \quad j = 1, \dots, n$$

têm o mesmo polinômio característico: $(\alpha - \lambda)^n$. Entretanto, o polinômio minimal de T_1 é $\lambda - \alpha$ e o de T_2 é $(\lambda - \alpha)^n$.

Teorema 4.5.7 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$.*

As seguintes afirmações são equivalentes:

i) T é diagonalizável;

ii) O polinômio minimal de T é da forma $(\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_n)$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ são dois a dois distintos.

Demonstração. Sejam m o polinômio minimal de T . Se T é diagonalizável, podemos usar a decomposição espectral de T dada no Teorema 4.4.28, para escrever

$$m(T) = m(\alpha_1)P_1 + \cdots + m(\alpha_n)P_n$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os autovalores distintos de T e P_1, \dots, P_n são projeções de V satisfazendo $P_i \circ P_j = 0$, $i \neq j$. Como $m(T) = 0$, segue que $m(\alpha_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$. A minimalidade de m revela então que este deve ter a forma descrita em ii). Reciprocamente, suponhamos que m seja da forma descrita em ii). Se $n = 1$ observemos que T já é diagonalizável. Se $n > 1$, consideremos os polinômios m_j de $P(F)$ dados por

$$m_j(\lambda) = \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i)^{-1} (\lambda - \alpha_i), \quad j = 1, \dots, n$$

É fácil ver que $m_j(\alpha_i) = 0$, $i \neq j$ e $m_j(\alpha_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$. Além disso,

$$p = \sum_{j=1}^n p(\alpha_j)m_j, \quad p \in P_n(F)$$

Escolhendo $p = 1$ e $p = \lambda$, obtemos

$$1 = m_1 + \cdots + m_n \quad \text{e} \quad \lambda = \alpha_1 m_1(\lambda) + \cdots + \alpha_n m_n(\lambda)$$

Definamos agora $P_j = m_j(T)$, $j = 1, \dots, n$. Segue que

$$I_V = P_1 + \cdots + P_n \quad \text{e} \quad T = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$$

Se $i \neq j$ então $m_i m_j$ é divisível por m . Logo, $P_i \circ P_j = 0$, $i \neq j$. Isto implica que cada P_j é uma projeção de V . Finalmente, a minimalidade de m garante que $P_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Assim, T é diagonalizável pelo Teorema 4.4.28. \square

Exercícios 4.5.8 51) Use o teorema de Cayley-Hamilton para encontrar a inversa do operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ cuja matriz em relação a alguma base é

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & -6 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

52) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que $\lambda \in F$ é um autovalor de T se, e somente se, λ é uma raiz do polinômio minimal de T .

53) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove:

i) T e T^* tem o mesmo polinômio minimal;

ii) T é um isomorfismo se, e somente se, seu polinômio minimal tem o termo constante diferente de zero;

54) Sejam V um espaço vetorial sobre F . Assuma que $V = W_1 \oplus W_2$, onde $\dim_F W_1 = r_1$ e $\dim_F W_2 = r_2$. Se P é a projeção de V sobre W_1 , determine o polinômio minimal de P . Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é dada por $T(w_1 + w_2) = w_1 - w_2$, $w_j \in W_j$, $j = 1, 2$, determine o polinômio minimal de T .

55) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Se para alguma base B de V , T_B^B e S_B^B são semelhantes, prove que os polinômios minimais de T e S coincidem. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa.

56) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove: T é um múltiplo da identidade se, e somente se, o polinômio minimal de T tem grau 1.

57) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) Os únicos subespaços T -invariantes de V são os triviais;

ii) p_T não pode ser escrito como um produto de dois polinômios de $P(F)$, ambos com grau inferior ao grau de p_T .

58) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $S \in \mathcal{L}(W)$. Prove:

i) Se existir $R \in \mathcal{L}(V, W)$ sobrejetora e satisfazendo $R \circ T = S \circ R$ então o polinômio minimal de S divide o polinômio minimal de T ; vale a recíproca?

ii) Se existir $R \in \mathcal{L}(W, V)$ injetora e satisfazendo $R \circ S = T \circ R$ então o polinômio

minimal de S divide o polinômio minimal de T ; vale a recíproca?

iii) Valem os itens i) e ii) quando as conclusões referem-se aos polinômios característicos dos operadores envolvidos.

4.6 A Forma Canônica de Jordan

Iniciamos esta seção introduzindo os subespaços cíclicos de um espaço vetorial.

Definição 4.6.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $v \in V$. O subespaço T -cíclico gerado por v , denotado por $Z(v, T)$, é o menor subespaço T -invariante de V que contém $\{v\}$. Um subespaço W de V é T -cíclico se $W = Z(v, T)$ para algum v de V .*

Teorema 4.6.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $v \in V$. Então:*

i) $Z(v, T) = [\{v, T(v), T^2(v), \dots\}] = \{p(T)(v) : p \in P(F)\};$

ii) v é um autovetor de T se, e somente se, $\dim_F Z(v, T) = 1$;

iii) Se $\dim_F V < \infty$ então $\{v, T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ é base de $Z(v, T)$, para algum inteiro positivo k .

Demonstração. i) $[\{v, T(v), T^2(v), \dots\}]$ é um subespaço T -invariante de V que contém $\{v\}$. Logo, $Z(v, T) \subset [\{v, T(v), T^2(v), \dots\}]$. Como $[\{v, T(v), T^2(v), \dots, \}]$ é um subconjunto de qualquer subespaço T -invariante de V que contém $\{v\}$, a outra inclusão também vale. A segunda igualdade é óbvia.

ii) Exercício

iii) Exercício. □

A seguir, formalizamos uma definição introduzida implicitamente em exercícios anteriores.

Definição 4.6.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V) \setminus \{0\}$. Dizemos que T é nilpotente quando existe um inteiro positivo k tal que $T^k = 0$. O menor k com essa propriedade é denominado índice (de nilpotência) de T .*

Exercícios 4.6.4 59) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se $u, v \in V$ e $v \in Z(u, T)$ prove que $Z(v, T) \subset Z(u, T)$.

60) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador nilpotente de índice de nilpotência k . Se $v \in V$ é tal que $T^{k-1}(v) \neq 0$ e $u \in V$ é tal que $T^i(u) \in Z(v, T)$, para algum $i \leq k$, prove que existe $w \in V$ tal que $w - u \in Z(v, T)$ e $T^i(w) = 0$.

Teorema 4.6.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se T é nilpotente de índice k e $T^{k-1}(v) \neq 0$ para algum $v \in V$ então $\{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ é base de $Z(v, T)$.*

Demonstração. Óbvvia. □

Observação 4.6.6 Nas notações do teorema anterior, vemos que a matriz de $T|_{Z(v, T)}$ em relação à base $\{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$ é da forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Em particular, $T|_{Z(v, T)}$ é nilpotente de índice $k - 1$.

Teorema 4.6.7 *Sejam $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador nilpotente. Então existem vetores não-nulos v_1, \dots, v_r em V tais que*

$$V = Z(v_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(v_r, T).$$

Demonstração. Por indução sobre $\dim_F V$. Se $\dim_F V = 1$, $V = Z(v, T)$, qualquer que seja $v \in V \setminus \{0\}$. Assuma então que o resultado vale para espaços de dimensão $< n$ e suponha que $\dim_F V = n$. Seja k o índice de nilpotência de T e escolha $v_1 \in V$ tal que $T^{k-1}(v_1) \neq 0$. Defina $W = Z(v_1, T)$ e $n_1 = \dim_F W$. Se $V = W$, nada a demonstrar. Suponhamos então que $V \neq W$. O Teorema 4.2.7 garante a existência de $\bar{T} \in \mathcal{L}(V/W)$ tal que $\bar{T} \circ q_W = q_W \circ T$. Daí,

$$\bar{T}^k(v + W) = \bar{T}^{k-1}(q_W(T(v))) = \bar{T}^{k-1}(T(v) + W) = \cdots = T^k(v) + W = W, \quad v \in V,$$

e, conseqüentemente, \bar{T} é nilpotente, com índice de nilpotência $\leq k$. Pela hipótese de indução, existem vetores $v_2, \dots, v_r \in V$ tais que

$$V/W = Z(v_2 + W, \bar{T}) \oplus \cdots \oplus Z(v_r + W, \bar{T}).$$

Escreva $n_i = \dim_F Z(v_i + W, \bar{T})$, $i = 2, \dots, r$. Pelo Exercício 60 acima, existe $u_i \in V$ tal que $v_i - u_i \in W$ e $T^{n_i}(u_i) = 0$. Logo,

$$V/W = Z(u_2 + W, \bar{T}) \oplus \cdots \oplus Z(u_r + W, \bar{T})$$

com $T^{n_i}(u_i) = 0$, $i = 2, \dots, r$. Afirmamos agora que

$$V = W \oplus Z(u_2, T) \oplus \cdots \oplus Z(u_r, T).$$

De fato, escrevendo-se $B_i = \{u_i, T(u_i), \dots, T^{n_i-1}(u_i)\}$, $i = 1, \dots, r$, basta mostrar que

$$B := \{v_1, T(v_1), \dots, T^{n_1}(v_1)\} \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$$

é uma base de V . Se $v \in V$, o fato de $v + W \in V/W$ e a decomposição de V/W em soma direta descrita acima, permite concluir que v é uma combinação linear de elementos de B . Logo, $V = [B]$. Se uma combinação linear de elementos de B é o vetor nulo, então o correspondente espaço afim gerado por W coincide com W . Daí, inserindo \bar{T} nesta equação, concluímos que todos os coeficientes da combinação linear, menos aqueles correspondentes aos elementos de $\{v_1, T(v_1), \dots, T^{n_1}(v_1)\}$, são nulos. Assim, obtemos o vetor nulo como uma combinação linear de elementos da base de $Z(v_1, T)$. Portanto, os coeficientes restantes são nulos também. Assim, B é l.i. \square

Observação 4.6.8 Se ordenarmos a soma direta do enunciado do teorema anterior na ordem crescente da dimensão dos subespaços envolvidos, então T_B^B é da forma

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_r} \end{array} \right)$$

onde $n_i = \dim_F Z(v_i, T)$ e $J_{n_i} \in M_{n_i \times n_i}(F)$ é dada por

$$J_{n_i} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Exemplo 4.6.9 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ dado por

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_5, 0, 0, \alpha_2 - \alpha_5), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}.$$

A matriz de T em relação à base canônica de \mathbb{R}^5 é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $T^3 = 0$ e $T^2 \neq 0$, vemos que T é nilpotente de índice 3. Escolhendo $v_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$, temos que $T(v_1) = (0, 1, 0, 0, 0)$ e $T^2(v_1) = (0, 1, 0, 0, 1)$. Segue que $\{v_1, T(v_1), T^2(v_1)\}$ é uma base de $Z(v_1, T)$. Escolhendo $v_2 = (0, 0, 0, 1, 0)$, segue que $B = \{v_1, T(v_1), T^2(v_1), v_2, T(v_2)\}$ é base de \mathbb{R}^5 e

$$T(v_1) = 0v_1 + 1T(v_1) + 0T^2(v_1) + 0v_2 + 0T(v_2),$$

$$T(T(v_1)) = 0v_1 + 0T(v_1) + 1T^2(v_1) + 0v_2 + 0T(v_2),$$

$$T(T^2(v_1)) = 0v_1 + 0T(v_1) + 0T^2(v_1) + 0v_2 + 0T(v_2),$$

$$T(v_2) = 0v_1 + 0T(v_1) + 0T^2(v_1) + 0v_2 + 1T(v_2),$$

$$T(T(v_2)) = 0v_1 + 0T(v_1) + 0T^2(v_1) + 0v_2 + 0T(v_2).$$

Assim, $V = Z(v_1, T) \oplus Z(v_2, T)$ e

$$T_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 4.6.10 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$.*

Valem as seguintes afirmações:

- i) $\text{Im } T^n \subset \text{Im } T^{n-1}$ e $\text{Ker } T^{n-1} \subset \text{Ker } T^n$, $n \geq 1$;*
- ii) Existe um inteiro positivo p (mínimo) tal que $\text{Im } T^p = \text{Im } T^{p+k}$, $k \geq 1$;*

- iii) Se p é como em ii) então $\rho(T^p) = \rho(T^{p+k})$ e $\eta(T^p) = \eta(T^{p+k})$, $k \geq 1$;
- iv) Se p é como em ii) então $V = \text{Im } T^p \oplus \text{Ker } T^p$;
- v) Os subespaços $\text{Im } T^p$ e $\text{Ker } T^p$ do ítem anterior são T -invariantes.

Demonstração. Os ítems i), ii), iii) e iv) compõem o Exercício 3.3.19-52. O ítem v) fica como exercício adicional. \square

Teorema 4.6.11 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então existem subespaços W_1 e W_2 de V tais que:*

- i) $V = W_1 \oplus W_2$;
- ii) W_1 e W_2 são T -invariantes;
- iii) $T|_{W_1}$ é um operador nilpotente e $T|_{W_2}$ é um isomorfismo.

Demonstração. O lema anterior garante que $V = \text{Im } T^p \oplus \text{Ker } T^p$, para algum inteiro positivo p . Além disso, $\text{Im } T^p$ e $\text{Ker } T^p$ são T -invariantes. Definamos então $W_1 = \text{Ker } T^p$, $W_2 = \text{Im } T^p$, $T_1 = T|_{W_1}$ e $T_2 = T|_{W_2}$. Devido ao Lema 4.6.10-i), vemos que $T_2 \in \mathcal{L}(W_2)$. Por outro lado, se $w_2 \in W_2 = \text{Im } T^p = \text{Im } T^{p+1}$, então $w_2 = T^{p+1}(u)$, $u \in V$. Daí, $w_2 = T(T^p(u))$, onde $T^p(u) \in \text{Im } T^p$. Segue que $w_2 \in \text{Im } T_2$ e, conseqüentemente, T_2 é sobrejetora. Pelo Teorema 3.2.7, T_2 é um isomorfismo de W_2 . Finalmente, se $w_1 \in W_1$ então $T^p(w_1) = 0$, ou seja, $T_1^p(w_1) = 0$. Portanto, T_1 é nilpotente de índice $\leq p$. \square

Teorema 4.6.12 (Forma Canônica de Jordan) *Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que p_T decompõe-se em um produto de polinômios lineares de $P(F)$ e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ as raízes distintas de p_T . Então existem subespaços T -invariantes W_1, \dots, W_p de V tais que*

- i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_p$;
- ii) $\dim_F W_j = m_T(\alpha_j)$, $j = 1, \dots, p$;
- iii) $T|_{W_j} = \alpha_j I_{W_j} + N_j$, onde cada $N_j \in \mathcal{L}(W_j)$ é nilpotente.

Demonstração. Definamos $T_1 = T - \alpha_1 I_V$. O teorema anterior garante que $V = W_1 \oplus V_1$, onde W_1 e V_1 são subespaços T_1 -invariantes de V , $T_1|_{W_1} \in \mathcal{L}(W_1)$ é nilpotente e $T_1|_{V_1} \in \mathcal{L}(V_1)$ é um isomorfismo. Então W_1 e V_1 são T -invariantes. Além disso,

$$T|_{W_1} = (T_1 + \alpha_1 I_V)|_{W_1} = T_1|_{W_1} + \alpha_1 I_{W_1},$$

tem a forma pedida em iii). Vejamos agora que $\dim_F W_1 = m_T(\alpha_1)$. Para isso, consideremos uma base B de V na forma $B = B_1 \cup B_2$, onde B_1 é uma base de W_1 e B_2 é uma base de V_1 . Então T_B^B é da forma

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$$

onde A_1 é a matriz de $T|_{W_1}$ em relação à base B_1 e A_2 é a matriz de $T|_{V_1}$ em relação à base B_2 . Conseqüentemente, p_T é da forma

$$p_T(\lambda) = \det(T_B^B - \lambda I_V) = \det(A_1 - \lambda I_{W_1}) \det(A_2 - \lambda I_{V_1}).$$

Como $T_1|_{V_1}$ é inversível e a matriz de $T_1|_{V_1}$ em relação à base B_2 é $A_2 - \alpha_1 I_{V_1}$, concluímos que $\det(A_2 - \alpha_1 I_{V_1}) \neq 0$ e portanto $\lambda - \alpha_1$ não divide $\det(A_2 - \alpha_1 I_{V_1})$. Logo, $(\lambda - \alpha_1)^{m_T(\alpha_1)}$ divide $\det(A_1 - \lambda I_{W_1})$, uma vez que $0 = p_T(\alpha_1) = \det(A_1 - \alpha_1 I_{W_1}) \det(A_2 - \alpha_1 I_{V_1})$. Segue que

$$m_T(\alpha_1) \leq \text{grau de } \det(A_1 - \lambda I_{W_1}) = \dim_F W_1.$$

Por outro lado, $T_1|_{W_1}$ é nilpotente, e como $T|_{W_1} = T_1|_{W_1} + \alpha_1 I_{W_1}$, segue que $p_{T|_{W_1}}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I_{W_1}) = (\alpha_1 - \lambda)^{\dim_F W_1}$ e, conseqüentemente, $m_T(\alpha_1) \geq \dim_F W_1$. Aplicando o mesmo procedimento ao operador $T|_{V_1}$, podemos encontrar dois subespaços $T_2 = (T|_{V_1} - \alpha_2 I_{V_1})$ -invariantes W_2 e V_2 tais que $V_1 = W_2 \oplus V_2$. Este processo sendo finito, produz uma decomposição da forma

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{p-1} \oplus V_{p-1}.$$

Como

$$\begin{aligned} \dim_F V &= \dim_F W_1 + \cdots + \dim_F W_{p-1} + \dim_F V_{p-1} \\ &= m_T(\alpha_1) + \cdots + m_T(\alpha_{p-1}) + m_T(\alpha_p) \end{aligned}$$

segue que $\dim_F V_{p-1} = m_T(\alpha_p)$. Mas $V_{p-1} = W_p \oplus V_p$ onde $\dim_F W_p = m_T(\alpha_p)$. Logo $V_p = \{0\}$. \square

Observação 4.6.13 Nas condições do teorema anterior, e levando-se em conta a

Observação 4.6.8, podemos concluir que existe uma base B de V tal que

$$T_B^B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_p \end{array} \right)$$

onde $M_j \in M_{m_T(\alpha_j) \times m_T(\alpha_j)}$, $j = 1, \dots, p$. Na verdade cada M_j é da forma

$$M_j = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{j_1}(\alpha_j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{j_2}(\alpha_j) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{j_r}(\alpha_j) \end{array} \right)$$

onde $J_{j_s}(\alpha_j) = \alpha_j J_{n_s}$, para algum n_s .

No exemplo a seguir, explicitamos a representação mencionada na observação anterior.

Exemplo 4.6.14 Sejam $V = \mathbb{R}^6$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ o operador cuja matriz em relação à base canônica B de \mathbb{R}^6 seja

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (\lambda - 4)^5(\lambda - 2)$. É fácil ver que

$$[(T - 4I_V)^3]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Segue que $\text{Ker}(T - 4I_V)^k = \text{Ker}(T - 4I_V)^3$, $k = 4, 5, \dots$. Ainda,

$$W_1 := \text{Ker}(T - 4I_V)^3 = \{(\beta_1, \dots, \beta_6) : \beta_5 = \beta_6\}$$

e $(T - 4I_V)|_{W_1}$ é nilpotente de índice 3. Existe então $v \in W_1$ tal que $(T - 4I_V)^2(v) \neq 0$. Escolhamos $v = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ e notemos que

$$(T - 4I_V)(v) = (1, -1, 0, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad (T - 4I_V)^2(v) = (2, 2, 0, 0, 0, 0).$$

Como $\dim_F W_1 = 5$, vamos completar o conjunto $\{v, (T - 4I_V)(v), (T - 4I_V)^2(v)\}$ a uma base de W_1 . Para tanto vamos escolher $w = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$. Com isso, $(T - 4I_V)(w) = (0, 0, 2, -2, 0, 0)$ e $\{v, (T - 4I_V)(v), (T - 4I_V)^2(v), w, (T - 4I_V)(w)\}$ é uma base de W_1 . Finalmente, se u é um autovetor qualquer de T associado a $\lambda = 2$, temos que

$$C = \{v, (T - 4I_V)(v), (T - 4I_V)^2(v), w, (T - 4I_V)(w), u\}$$

é base de V e

$$T_C^C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercícios 4.6.15 61) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se $V = Z(v, T^2)$ para algum $v \in V$ então $V = Z(w, T)$ para algum $w \in V$. Vale a recíproca?

62) Sejam F um corpo e $T \in \mathcal{L}(F^2)$. Prove:

i) Se $v \in F^2 \setminus \{0\}$ não é autovetor de T então $F^2 = Z(v, T)$;

ii) Se T não é um múltiplo de I_{F^2} então $F^2 = Z(v, T)$ para algum $v \in F^2$.

63) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $V = Z(v, T)$ para algum $v \in V$;

ii) T tem exatamente $\dim_F V$ autovalores distintos.

64) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador nilpotente de índice k e $v \in V \setminus \{0\}$. Prove:

i) $\dim_F T^m(Z(v, T)) = k - m$, $m \leq k$;

ii) Se V tem duas decomposições $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, onde $V_j = Z(v_j, T)$, $1 \leq j \leq r$, $W_i = Z(w_i, T)$, $1 \leq i \leq s$, $\dim_F V_j = n_j$ e $\dim_F W_i = m_i$, então $r = s$ e $n_j = m_j$, para $1 \leq j \leq r$.

65) Existe um operador nilpotente de índice 3 sobre um espaço vetorial de dimensão 2?

66) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ nilpotente de índice k . Mostre que $\eta(T^{j+1}) + \eta(T^{j-1}) \leq 2\eta(T^j)$, $1 \leq j \leq k - 1$.

67) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão 3, $T, S \in \mathcal{L}(V)$ operadores nilpotentes e B uma base de V . Mostre que T_B^B e S_B^B são semelhantes se, e somente se, T e S têm o mesmo índice de nilpotência. Isto vale se $\dim V = 4$?

68) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que T não é diagonalizável se, e somente se, existirem um autovalor α de T e $v \in V$ tais que $(T - \alpha I_V)^2(v) = 0 \neq (T - \alpha I_V)(v)$.

69) Encontre a forma de Jordan dos seguintes operadores $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ representados por cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

70) Sejam F um corpo algebricamente fechado, V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que para qualquer base B de V , T_B^B e sua transposta são matrizes semelhantes.

71) Sejam F um corpo e $T, S \in \mathcal{L}(F^n)$. Verifique quais das seguintes condições são suficientes para que $T \circ S$ e $S \circ T$ tenham a mesma forma de Jordan.

i) T e S são isomorfismos;

ii) T é isomorfismo, mas S não é.

No(s) caso(s) afirmativos verifique se a condição é necessária.

72) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se $\rho(T) = 1$, prove que T é diagonalizável ou T é nilpotente. T pode ser simultaneamente diagonalizável e nilpotente?

73) Seja V um espaço vetorial sobre F , $T \in \mathcal{L}(V)$ e $p \in P(F)$. Assuma que $p = p_1 \dots p_k$, onde $\{p_1, \dots, p_k\}$ é um subconjunto relativamente primo de $P(F)$ (isto significa que 1 é o polinômio de $P(F)$ de maior grau que divide cada p_j).

i) Prove que $\text{Ker } p(T) = \text{Ker } p_1(T) \oplus \dots \oplus \text{Ker } p_k(T)$;

ii) Se $p = p_T$, o que diz a conclusão do item i)?

74) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Denotemos por $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ os autovalores distintos de T em F . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $V = V_{\alpha_1}(T) + \dots + V_{\alpha_k}(T)$;

ii) Existe uma base B de V tal que T_B^B tem a forma descrita na Observação 4.6.13;

iii) Existe uma base C de V tal que T_C^C é triangular superior;

iv) Se W_1, \dots, W_{n-1} são subespaços de V , dois a dois distintos e satisfazendo $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_{n-1}$ então W_j é T -invariante, $j = 1, \dots, n-1$;

v) T tem exatamente n autovalores (contando-se as repetições);

vi) p_T escreve-se como um produto de polinômios lineares de $P(F)$.

75) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que T possui exatamente n autovalores em F (contando-se multiplicidades). Prove que:

i) (Decomposição Aditiva de Jordan) Existem $D, N \in \mathcal{L}(V)$ (únicos) tais que $T = D + N$, D é diagonalizável, N é nilpotente e $D \circ N = N \circ D$;

ii) (Decomposição Multiplicativa de Jordan) Existem $D, N \in \mathcal{L}(V)$ (únicos) tais que $T = D \circ N$, D é diagonalizável, $N - I_V$ é nilpotente e $D \circ N = N \circ D$.

76) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$.

i) Prove que se T é nilpotente então o traço de T^k , $k = 1, 2, \dots$, é zero.

ii) Prove que se F tem característica 0 e o traço de T^k é zero, $k = 1, 2, \dots$, então T é nilpotente.

77) Calcule A^{100} (produto de A por ela mesma 100 vezes) nos seguintes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -7 & 1 \\ 4 & 4 & -5 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

78) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que

T possui n autovalores em F (contando multiplicidades) e que $T^{k+1} = T$, para algum inteiro positivo k . Prove que T é diagonalizável.

79) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que $T - I_V$ é nilpotente se, e somente se, 1 é um autovalor de multiplicidade n de T .

80) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha que existam $S \in \mathcal{L}(V)$ inversível e um inteiro positivo k tal que $T^k = S \circ T \circ S^{-1}$. Prove que $T - I_V$ é nilpotente.

81) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que $T = D + N$ seja a decomposição aditiva de Jordan de T . Prove:

i) $B \in \mathcal{L}(V)$ satisfaz $B \circ T = T \circ B$ se, e somente se, $D \circ B = B \circ D$ e $N \circ B = B \circ N$;

ii) Se $p \in P(F)$ e $p(T) = D_1 + N_1$ é a decomposição aditiva de Jordan de $p(T)$, então $D_1 = p(D)$.

82) Dê exemplo de um espaço vetorial V , uma base B de V e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ tais que $\rho(T) = \rho(S)$ e $p_T = p_S$, mas T_B^B e S_B^B não são semelhantes.

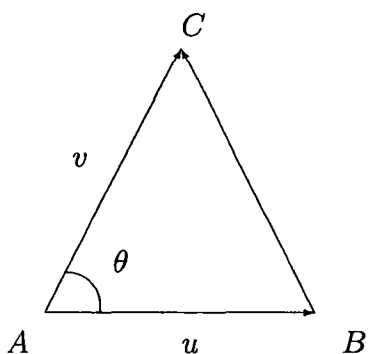
Capítulo 5

Espaços com Produto Interno

Nos capítulos anteriores, introduzimos a noção de espaço vetorial e estudamos propriedades “afins” referentes a eles. Neste capítulo, estudaremos as propriedades “métricas” de um espaço vetorial. A motivação para tal estudo reside nos espaços usuais \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n . Neste capítulo, vamos assumir que o corpo de escalares dos espaços vetoriais envolvidos é sempre \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

5.1 Produto Interno

Sejam $\{u, v\}$ um subconjunto l.i. do espaço \mathbb{R}^3 usual e θ o ângulo entre os vetores u e v .



O produto escalar de u por v é dado por $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$. Se B é a base canônica

de \mathbb{R}^3 , $u_B = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_B = (x_2, y_2, z_2)$ então

$$u \cdot v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Esta idéia de produto escalar é generalizada no seguinte conceito.

Definição 5.1.1 *Seja V um espaço vetorial sobre F . Um produto interno sobre V é uma função $(v_1, v_2) \in V^2 \rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \in F$ que satisfaz:*

$$PI1. \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle, \quad v_i \in V, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$PI2. \langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle, \quad \alpha \in F, \quad v_1, v_2 \in V;$$

$$PI3. \langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}, \quad v_1, v_2 \in V;$$

$$PI4. \langle v, v \rangle > 0, \quad v \in V, \quad v \neq 0.$$

Observação 5.1.2 Quando $F = \mathbb{R}$, a conjugação no item PI3 é supérflua. Se $F = \mathbb{C}$, a conjugação faz-se necessária uma vez que, se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$, $v_1, v_2 \in V$, então

$$0 < \langle iv, iv \rangle = ii \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0, \quad v \in V \setminus \{0\},$$

uma contradição.

As condições PI1, PI2 e PI3 implicam que

$$\begin{aligned} \langle v_1, \alpha v_2 + v_3 \rangle &= \overline{\langle \alpha v_2 + v_3, v_1 \rangle} \\ &= \overline{\langle \alpha v_2, v_1 \rangle + \langle v_3, v_1 \rangle} \\ &= \overline{\alpha \langle v_2, v_1 \rangle} + \overline{\langle v_3, v_1 \rangle} \\ &= \bar{\alpha} \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle, \quad \alpha \in F, \quad v_1, v_2, v_3 \in V. \end{aligned}$$

Exemplos 5.1.3 1) No espaço F^n usual,

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle := a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n$$

é denominado o *produto interno usual*.

2) A expressão

$$\langle A, B \rangle := \text{traço}(B^*A), \quad A, B \in M_{n \times n}(F)$$

define um produto interno em $M_{n \times n}(F)$. Aqui, B^* denota a matriz adjunta de B .

3) Seja $C([0, 1], F)$ o subespaço de $F^{[0,1]}$ formado pelas funções que são contínuas. A expressão

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in C([0, 1], F)$$

define um produto interno em $C([0, 1], F)$.

4) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ um produto interno sobre W e $T \in \mathcal{L}(V, W)$ injetora. Então a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow F$ dada por

$$\langle v_1, v_2 \rangle_V = \langle T(v_1), T(v_2) \rangle_W, \quad v_1, v_2 \in V$$

é um produto interno sobre V .

5) Consideremos o espaço vetorial e o produto interno do exemplo 3 e seja $T \in \mathcal{L}(C([0, 1], F))$ dada por $T(f)(x) = xf(x)$, $x \in [0, 1]$, $f \in C([0, 1], F)$. Como T é injetora, o exemplo anterior implica que

$$\langle f, g \rangle_{C([0,1],F)} := \int_0^1 tf(t)\overline{t g(t)}dt = \int_0^1 t^2 f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f, g \in C([0, 1], F)$$

é um produto interno em $C([0, 1], F)$.

Definição 5.1.4 *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial munido de um produto interno. Um espaço com produto interno é euclidiano, quando $F = \mathbb{R}$ e, unitário, quando $F = \mathbb{C}$.*

Definição 5.1.5 *Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A norma de um vetor v de V , denotada por $\|v\|$, é o número real positivo $\langle v, v \rangle^{1/2}$. Um vetor $v \in V$ é unitário quando $\|v\| = 1$.*

Coletamos algumas propriedades de norma no seguinte teorema.

Teorema 5.1.6 *Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Valem as propriedades:*

i) $\|v_1 \pm v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \pm 2\operatorname{Re} \langle v_1, v_2 \rangle + \|v_2\|^2$, $v_1, v_2 \in V$;

ii) $\langle v_1 + v_2, v_1 - v_2 \rangle = \|v_1\|^2 - 2i\operatorname{Im} \langle v_1, v_2 \rangle - \|v_2\|^2$, $v_1, v_2 \in V$;

iii) (*Identidade do paralelogramo*) $\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2$, $v_1, v_2 \in V$;

iv) (*Identidade de polarização*) $\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 + i(\|v_1 + iv_2\|^2 - \|v_1 - iv_2\|^2) = 4\langle v_1, v_2 \rangle$, $v_1, v_2 \in V$.

Demonstração. i) Exercício;

ii) Exercício;

iii) É consequência de i);

iv) Lembrando que $\operatorname{Im} \langle v_1, v_2 \rangle = \operatorname{Re}(-i\langle v_1, v_2 \rangle) = \operatorname{Re} \langle v_1, iv_2 \rangle$, iv) segue de i). \square

Observação 5.1.7 O leitor deve ratificar que as propriedades acima tornam-se mais simples no caso em que o espaço é euclidiano.

O próximo resultado apresenta algumas identidades adicionais.

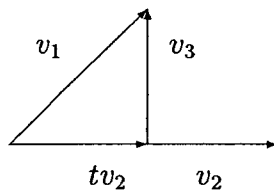
Teorema 5.1.8 *Seja V um espaço com produto interno. Valem as seguintes propriedades:*

- i) $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$;
- ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, $\alpha \in F$, $v \in V$;
- iii) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) $|\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \|v_1\| \|v_2\|$, $v_1, v_2 \in V$;
- iv) (Desigualdade triangular) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$, $v_1, v_2 \in V$.

Demonstração. i) Exercício;

ii) Exercício;

iii) Se $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz segue de i) e de PI2. Suponhamos que $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$. Seja $t = \|v_2\|^{-2} \langle v_1, v_2 \rangle$ e definamos $v_3 = v_1 - tv_2$.



Então

$$\begin{aligned}
 \|v_3\|^2 &= \langle v_1 - tv_2, v_1 - tv_2 \rangle \\
 &= \langle v_1, v_1 \rangle - \bar{t} \langle v_1, v_2 \rangle - t \langle v_2, v_1 \rangle + t \bar{t} \langle v_2, v_2 \rangle \\
 &= \|v_1\|^2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \langle v_1, v_2 \rangle - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \langle v_2, v_1 \rangle + \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \overline{\langle v_1, v_2 \rangle} \\
 &= \|v_1\|^2 - \frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|^2}{\|v_2\|^2}.
 \end{aligned}$$

Como $\|v_3\| \geq 0$, temos que $\|v_1\|^2 \geq \|v_2\|^{-2} |\langle v_1, v_2 \rangle|^2$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz segue.

iv) A desigualdade triangular é consequência da desigualdade

$$\begin{aligned}
 \|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle \\
 &= \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \overline{\langle v_1, v_2 \rangle} + \|v_2\|^2 \\
&= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v_1, v_2 \rangle \\
&\leq \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2 \langle v_1, v_2 \rangle \\
&\leq \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2 \|v_1\| \|v_2\| \\
&= (\|v_1\| + \|v_2\|)^2,
\end{aligned}$$

mediante extração de raiz quadrada de ambos os membros. □

O resultado a seguir, complementa a Observação 3.4.4 e o Teorema 3.4.5.

Teorema 5.1.9 *Seja V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Valem as seguintes propriedades:*

- i) Se $w \in V$, $T_w : V \rightarrow F$ dada por $T_w(v) = \langle v, w \rangle$, $v \in V$, é um elemento de V^* ;*
- ii) A aplicação $\varphi : V \rightarrow V^*$ dada por $\varphi(w) = T_w$, $w \in V$, é injetora;*
- iii) Se $\dim_F V < \infty$ então φ é bijetora;*
- iv) Se V é um espaço euclidiano e $\dim_F V < \infty$ então φ é um isomorfismo.*

Demonstração. i) Segue das igualdades

$$T_w(v_1 + v_2) = \langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = T_w(v_1) + T_w(v_2), \quad v_1, v_2 \in V$$

e

$$T_w(\alpha v) = \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle = \alpha T_w(v), \quad v \in V, \quad \alpha \in F.$$

ii) Sejam $w_1, w_2 \in V$ tais que $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. Então, $T_{w_1} = T_{w_2}$, ou seja, $T_{w_1}(v) = T_{w_2}(v)$, $v \in V$. Logo, $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$, $v \in V$, isto é, $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$, $v \in V$. Em particular, no caso em que $v = w_1 - w_2$, obtemos $\|w_1 - w_2\|^2 = \langle w_1 - w_2, w_1 - w_2 \rangle = 0$, ou seja, $w_1 - w_2 = 0$. Portanto, φ é injetora.

iii) Assuma que $\dim_F V < \infty$ e seja $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de V . A Observação 3.4.4 revela que $\dim_F V = \dim_F V^*$. Para concluirmos a prova, vamos mostrar inicialmente que $\{\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_n)\}$ é l.i. Suponhamos que

$$\alpha_1 \varphi(w_1) + \dots + \alpha_n \varphi(w_n) = 0, \quad \alpha_j \in F, \quad j = 1, \dots, n.$$

Segue que $\alpha_1 T_{w_1} + \dots + \alpha_n T_{w_n} = 0$ e, conseqüentemente,

$$\alpha_1 T_{w_1}(v) + \dots + \alpha_n T_{w_n}(v) = 0, \quad v \in V.$$

Daí,

$$\langle v, \bar{\alpha}_1 w_1 + \cdots + \bar{\alpha}_n w_n \rangle = 0, \quad v \in V,$$

e, por conseguinte, $\bar{\alpha}_1 w_1 + \cdots + \bar{\alpha}_n w_n = 0$. Como B é base de V , $\bar{\alpha}_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, ou seja, $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Portanto, $\dim_F \text{Im } \varphi \geq n$. A seguir, vamos verificar que $\text{Im } \varphi \leq V^*$. De fato, se $T_{w_1}, T_{w_2} \in \text{Im } \varphi$ então

$$(T_{w_1} + T_{w_2})(v) = T_{w_1}(v) + T_{w_2}(v) = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle = \langle v, w_1 + w_2 \rangle = (T_{w_1 + w_2})(v), \quad v \in V,$$

ou seja, $T_{w_1} + T_{w_2} = T_{w_1 + w_2} \in \text{Im } \varphi$. Ainda,

$$(\alpha T_{w_1})(v) = \alpha T_{w_1}(v) = \alpha \langle v, w_1 \rangle = \langle v, \bar{\alpha} w_1 \rangle = T_{\bar{\alpha} w_1}(v), \quad v \in V,$$

isto é, $\alpha T_{w_1} = T_{\bar{\alpha} w_1} \in \text{Im } \varphi$. Portanto, $\dim_F \text{Im } \varphi \leq n = \dim_F V^*$, ou seja, $\dim \text{Im } \varphi = \dim V^*$. Assim, $\text{Im } \varphi = V^*$ e, portanto, φ é bijetora.

iv) No caso em que $F = \mathbb{R}$, φ é linear. Portanto, φ é um isomorfismo. \square

Corolário 5.1.10 (Teorema da Representação de Riesz) *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in V^*$. Então existe um único $w \in V$ tal que $T(v) = \langle v, w \rangle$, $v \in V$.*

Observação 5.1.11 Nas condições do Teorema 5.1.9-iii), a expressão $[T_v, T_w] := \langle v, w \rangle$, $v, w \in V$, é um produto interno sobre V^* , quando $F = \mathbb{R}$.

Exemplos 5.1.12 1) Seja $T \in (\mathbb{R}^3)^*$ dada por $T(x, y, z) = 2x + y + z$. Se B é a base usual de \mathbb{R}^3 então $T = T_w$, onde $w_B = (2, 1, 1)$.

2) Sejam $V = P(\mathbb{C})$, munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \overline{q(x)} dx, \quad p, q \in V,$$

e $T \in V^*$ dada por $T(p) = p(3)$, $p \in V$. Como $P(\mathbb{C})$ não tem dimensão finita, não podemos garantir a existência de $q \in P(\mathbb{C})$ com $T = T_q$. Suponhamos que exista um tal q . Escolhendo $p \in V \setminus \{0\}$ tal que $p(3) = 0$ e $p(x) \neq 0$, $x \in [0, 1]$, temos

$$T(p \bar{p} q) = (p \bar{p} q)(3) = p(3) \bar{p}(3) q(3) = 0.$$

Por outro lado,

$$T(p\bar{p}q) = T_q(p\bar{p}q) = \int_0^1 p(x)\overline{p(x)}q(x)\overline{q(x)}dx = \int_0^1 |p(x)|^2|q(x)|^2dx.$$

Daí, $|p(x)|^2|q(x)|^2 = 0$, $x \in [0, 1]$, ou seja, $p(x)q(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Portanto, $q = 0$ e, conseqüentemente, $T = T_q = 0$, uma contradição.

Exercícios 5.1.13 1) Encontre condições sobre $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ de modo que a expressão

$$\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = az_1\bar{w}_1 + bz_2\bar{w}_1 + cz_1\bar{w}_2 + dz_2\bar{w}_2$$

defina um produto interno em \mathbb{C}^2 .

2) Mostre que a expressão

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

defina um produto interno no subespaço de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ formado pelas funções que são diferenciáveis.

3) Seja V o subespaço de $F^{\mathbb{R}}$ formado pelas funções que são contínuas e W o subespaço formado por aquelas que são polinomiais. Se $a < b$, verifique que a expressão

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

defina um produto interno em W , mas não em V .

4) Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente. Mostre que a expressão

$$\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle_V + \langle w_1, w_2 \rangle_W, \quad v_1, v_2 \in V, \quad w_1, w_2 \in W$$

defina um produto interno em $V \times W$.

5) Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Encontre condições sobre T de modo que a expressão $[v_1, v_2] = \langle T(v_1), v_2 \rangle$, $v_1, v_2 \in V$, defina um produto interno sobre V . Idem para a expressão $[v_1, v_2] = \langle T(v_1), T(v_2) \rangle$, $v_1, v_2 \in V$.

6) Sejam V um espaço com produto interno e $u, v \in V$. Prove que $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$ se, e somente se, $\{u, v\}$ é l.d.

7) Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar o seguinte resultado: se $\{a_n\}$ é

uma sequência de números reais, $a_n \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}/n < \infty$.

8) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} e $J : V \rightarrow V$ uma conjugação sobre V , ou seja, $J(u + v) = J(u) + J(v)$, $u, v \in V$, $J(\alpha u) = \bar{\alpha}J(u)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $u \in V$ e $J^2 = I_V$. Prove que:

- i) $W := \{v \in V : J(v) = v\}$ com as operações de V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} ;
- ii) Se $u \in V$, existem $w_1, w_2 \in W$ tais que $u = w_1 + iw_2$;
- iii) A representação do item ii) é única.

9) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} e $W \subset V$ satisfazendo:

- a) W , com as operações de V , é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} ;
- b) Se $v \in V$, existe um único par de vetores $w_1, w_2 \in W$ tais que $v = w_1 + iw_2$.

Mostre que:

i) A equação $J(v) = J(w_1 + iw_2) = w_1 - iw_2$, $w_1, w_2 \in W$, define uma conjugação sobre V ;

ii) $J(v) = v$ se, e somente se, $v \in W$;

iii) J é a única conjugação sobre V com a propriedade descrita em ii).

10) Determine todas as conjugações sobre os espaços usuais \mathbb{C} e \mathbb{C}^2 .

11) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , J uma conjugação sobre V , $W := \{v \in V : J(v) = v\}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ um produto interno sobre W . Prove:

i) Existe um único produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre V que satisfaz $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle_1$, $w_1, w_2 \in W$;

ii) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é como em i), $\langle J(u), J(v) \rangle = \langle v, u \rangle$, $u, v \in V$;

iii) Interprete i) quando $V = \mathbb{C}^n$ e $W = \mathbb{R}^n$.

12) Sejam V um espaço Euclidiano e $u, v, w \in V$. Prove a desigualdade de Ptolomeu:

$$\|u - v\| \|w\| \leq \|v - w\| \|u\| + \|w - u\| \|v\|$$

Quando vale a igualdade na relação acima?

13) Sejam V um espaço euclidiano. Mostre que se $u, v \in V \setminus \{0\}$ então existe um único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$. Este número θ é chamado de *ângulo* entre u e v .

14) Seja V o espaço com produto interno da Observação 5.1.3–3) com $F = \mathbb{R}$. Determine o ângulo entre $f(t) = t + e^t$ e $g(t) = t^2 - \cos t$.

5.2 Ortogonalidade

Na seção anterior, introduzimos a noção de norma de um vetor, uma extensão natural do conceito de módulo de um número real ou complexo. A seguir, vamos estender a noção de ângulo.

Definição 5.2.1 *Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dois elementos v_1 e v_2 de V são ortogonais quando $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Um subconjunto não-vazio A de V é ortogonal quando quaisquer dois vetores distintos de A são ortogonais. O complemento ortogonal de A é o conjunto*

$$A^\perp := \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, w \in A\}.$$

Exemplos 5.2.2 1) Consideremos o espaço \mathbb{R}^3 com produto interno usual e seja B a base usual deste espaço. Os vetores u e v dados por $u_B = (1, 1, 2)$ e $v_B = (0, -2, 1)$ são ortogonais. Se A é um plano passando pela origem então A^\perp é uma reta perpendicular a A passando pela origem.

2) Seja F um corpo e consideremos o subespaço V de F^∞ , formado por todas as sequências que são limitadas. A expressão

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j \overline{v_j}}{j^2}, \quad u = (u_1, u_2, \dots), \quad v = (v_1, v_2, \dots),$$

define um produto interno em V . Se U é o subespaço de V formado pelas sequências de V que possuem somente um número finito de termos não-nulos então $U^\perp = \{0\}$.

3) Em um espaço V com produto interno, dois vetores u e w são ortogonais se, e somente se, $u \in \text{Ker } T_w$.

Aqui estão algumas propriedades do complemento ortogonal de um conjunto.

Teorema 5.2.3 *Sejam V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e A e B subconjuntos de V . Valem as propriedades:*

- i) A^\perp é um subespaço de V ;*
- ii) Se $A \subset B$ então $B^\perp \subset A^\perp$;*
- iii) Se A e B são subespaços de V então $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$;*
- iv) $A \cap A^\perp = \{0\}$, $A \subset [A] \subset (A^\perp)^\perp := A^{\perp\perp}$ e $(A^{\perp\perp})^\perp = A^\perp = (A^\perp)^{\perp\perp}$;*

Demonstração. i) Exercício.

ii) Se um elemento de V é ortogonal a todos os elementos de B e $A \subset B$, então esse elemento é ortogonal a todos os elementos de A .

iii) Como $A, B \subset A + B$, a parte ii) revela que $(A + B)^\perp \subset A^\perp, B^\perp$ e, conseqüentemente, $(A + B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$. A outra inclusão é imediata.

iv) Se $u \in A \cap A^\perp$ então u é ortogonal a si mesmo. Logo, $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} = 0$. Portanto, $A \cap A^\perp = \{0\}$. As inclusões $A \subset A^{\perp\perp}$ e $A^\perp \subset (A^{\perp\perp})^\perp$ são triviais. Além disso, por ii), $(A^{\perp\perp})^\perp \subset A^\perp$, ou seja, $(A^{\perp\perp})^\perp = A^\perp$. A igualdade restante fica a cargo do leitor. \square

Teorema 5.2.4 *Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e W um subespaço de V . Valem as seguintes propriedades:*

i) $V = W \oplus W^\perp$ se, e somente se, existe $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\text{Im } T = W$, $\text{Ker } T = W^\perp$ e $T|_W = I_W$;

ii) Se $\dim_F W < \infty$ então $V = W \oplus W^\perp$;

iii) Se $V = W \oplus W^\perp$ então $W = W^{\perp\perp}$.

Demonstração. i) Uma implicação é conseqüência da Observação 4.1.5. Reciprocamente, se existir uma T como indicado, temos a decomposição $v = T(v) + (v - T(v))$, $v \in V$, onde $T(v) \in \text{Im } T = W$ e $T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(v) - T(v) = 0$. Logo, $V = \text{Im } T + \text{Ker } T = W + W^\perp$. Pelo Teorema 5.2.3-iv), a soma é direta.

ii) Basta mostrar que $V = W + W^\perp$. Seja $v \in V$ e consideremos a restrição S de T_v a W . Como $\dim_F W < \infty$, o Teorema 5.1.9 garante a existência de $w \in W$ tal que $S(u) = T_w(u)$, $u \in W$, isto é, $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$, $u \in W$. Segue que, $v - w \in W^\perp$. Portanto, $v = w + (v - w)$, onde $w \in W$ e $v - w \in W^\perp$.

iii) Exercício. \square

Definição 5.2.5 *Qualquer aplicação T como descrito no ítem i) acima é denominada projeção ortogonal de V sobre W . Notemos que, de fato, uma projeção ortogonal é uma projeção de V (Observação 4.1.5).*

Corolário 5.2.6 *Se V é um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno e W é um subespaço de V , então $W^{\perp\perp} = W$.*

Definição 5.2.7 *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um subconjunto A de V é ortonormal quando A é ortogonal e $\|v\| = 1$, $v \in A$.*

Exemplos 5.2.8 1) *Seja $V = F^n$ com o produto interno usual. A base usual de F^n é um conjunto ortonormal.*

2) *Sejam $V = M_{n \times n}(F)$ e $\langle A, B \rangle = \text{traço}(B^*A)$. A base usual de $M_{n \times n}(F)$ é um conjunto ortonormal.*

3) *Seja $V = C([0, 1], F)$ munido do produto interno definido na Observação 5.1.3-3. O conjunto*

$$A = \{1, \sqrt{2} \cos 2\pi x, \sqrt{2} \text{sen } 2\pi x, \sqrt{2} \cos 4\pi x, \sqrt{2} \text{sen } 4\pi x, \dots\}$$

é ortonormal.

Teorema 5.2.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e A um subconjunto de V . Se $0 \notin A$ e A é ortogonal então A é l.i.*

Demonstração. *Sejam $v_1, \dots, v_n \in A$ e suponhamos que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, $\alpha_j \in F$, $j = 1, \dots, n$. Então*

$$0 = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$, segue que $\alpha_j = 0$. □

O próximo resultado descreve o conhecido método de ortonormalização de Gram-Schmidt.

Teorema 5.2.10 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um subespaço de V e $\{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de W . Valem as seguintes propriedades:*

i) Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de W tal que $[\{w_1, \dots, w_k\}] = [\{v_1, \dots, v_k\}]$, $k = 1, \dots, n$;

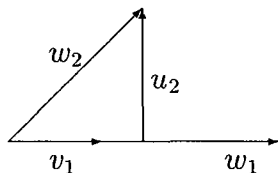
ii) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de W , a aplicação $P : V \rightarrow V$ dada por

$$P(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n, \quad v \in V,$$

é uma projeção ortogonal de V sobre W .

Demonstração. i) Definimos $v_1 = \|w_1\|^{-1}w_1$. Assumiremos que v_1, \dots, v_k já foram construídos e construiremos v_{k+1} . Definamos

$$u_{k+1} = w_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle w_{k+1}, v_j \rangle v_j, \quad \text{e} \quad v_{k+1} = \|u_{k+1}\|^{-1}u_{k+1}.$$



Notemos inicialmente que, como $\{w_1, \dots, w_{k+1}\}$ é l.i., $v_{k+1} \neq 0$. Por outro lado,

$$\langle u_{k+1}, v_l \rangle = \langle w_{k+1}, v_l \rangle - \sum_{j=1}^k \langle w_{k+1}, v_j \rangle \langle v_j, v_l \rangle = \langle w_{k+1}, v_l \rangle - \sum_{j=1}^k \langle w_{k+1}, v_j \rangle \delta_{jl} = 0$$

$l = 1, \dots, k$. Logo, v_{k+1} é ortogonal a v_j , $j \leq k$. Portanto, devido ao Teorema 5.2.9, $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ é l.i. O leitor pode verificar sem muita dificuldade que $[\{v_1, \dots, v_{k+1}\}] = [\{w_1, \dots, w_{k+1}\}]$.

ii) Se $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$ então

$$P(w) = \sum_{j=1}^n \left\langle \sum_{l=1}^n \alpha_l w_l, w_j \right\rangle w_j = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_l \langle w_l, w_j \rangle w_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j = w.$$

Logo, $P|_W = I_W$. Como $\text{Im } P \subset W$, na verdade $\text{Im } P = W$. Finalmente, $w \in \text{Ker } P$ se, e somente se, $\langle w, w_j \rangle = 0$, $j = 1, \dots, n$, ou seja, se, e somente se, $w = 0$. \square

Observação 5.2.11 O método de Gram-Schmidt pode ser aplicado em bases contendo infinitos elementos (enumeráveis).

Exercícios 5.2.12 15) Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$. Mostre que:

- i) u e v são ortogonais se, e somente se, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;
- ii) A equivalência do item i) não vale quando o espaço é unitário;
- iii) Se $\|u\| = \|v\|$ então $u + v$ e $u - v$ são ortogonais;
- iv) O item não vale quando o espaço é unitário.

16) Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$. Prove que u e v são ortogonais se, e

somente se, $\|u + \alpha v\| \geq \|u\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

17) Sejam V um espaço unitário e $u, v \in V$. Mostre que u e v são ortogonais se, e somente se, $\|\alpha u + \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

18) Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno. Se o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, prove que existe um único $v \in V$ tal que $\langle v, v_j \rangle = \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$.

19) Sejam V um espaço com produto interno, $v \in V$, $W \leq V$ e $u \in W$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\|v - u\| = \inf_{w \in W} \|v - w\|$;

ii) $v - u$ é ortogonal a todos os elementos de W .

20) Sejam V um espaço euclidiano, W um subespaço de V satisfazendo $V = W \oplus W^\perp$ e P a projeção ortogonal de V sobre W . Se $v \in V$, prove que $P(v)$ é o único elemento u de W satisfazendo as condições i) e ii) do exercício anterior.

21) No espaço \mathbb{R}^3 usual, determine o vetor do subespaço $\{(0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$ que está mais próximo de $(1, 1, 1)$.

22) Considere o subespaço de $\mathbb{C}^{[-1,1]}$ formado pelas funções que são contínuas, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in V,$$

e seja $W = \{1, t, t^2, t^3\}$. Encontre o elemento de W que está mais próximo de $\exp(t)$.

23) No espaço $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt, \quad f, g \in V,$$

determine W^\perp nos seguintes casos:

- i) $W = \{f \in V : f \text{ é ímpar}\}$;
- ii) $W = \{f \in V : f|_{[0,1]} = 0\}$;
- iii) $W = \{f \in V : f \text{ é diferenciável}\}$;
- iv) $W = \{f \in V : f \text{ é polinomial}\}$.

24) No espaço $P_3(\mathbb{R})$ usual, determine $\{p \in P_3(\mathbb{R}) : tp'(t) = p(t), t \in \mathbb{R}\}^\perp$.

25) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e V_1 e V_2 subespaços de V . Prove que

i) $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$;

ii) A hipótese “dimensão finita” é essencial?

26) Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$. Prove: u e v são ortogonais se, e somente se, v é o único elemento do conjunto $\{v + \alpha u : \alpha \in F\} \cap \{w \in V : \|w\| = \|v\|\}$.

27) No espaço vetorial do Exercício 22, aplique o método de Gram-Schmidt ao conjunto $\{2, 1 + t, t^2\}$.

28) No espaço usual \mathbb{C}^3 , encontre uma base ortonormal de $W = \{(1, 2, 1 - i), (1, i, 0)\}$. Estenda esta base a uma base ortonormal de \mathbb{C}^3 .

29) No espaço \mathbb{C}^4 usual, encontre uma base ortonormal de $W = \{(0, 2, 0, i), (1, 0, i, -1)\}$. Estenda esta base a uma base ortonormal de \mathbb{C}^4 .

30) Usando a notação do Teorema 5.2.10, deduza as seguintes fórmulas:

i) (Equação de Bessel) $\|v - P(v)\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle v, v_j \rangle|^2$, $v \in V$;

ii) (Desigualdade de Bessel) $\sum_{j=1}^n |\langle v, v_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$, $v \in V$.

31) Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto ortonormal em um espaço V , com produto interno e $v \in V$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $v \in \{v_1, \dots, v_n\}$;

ii) (Identidade de Parseval) $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle v, v_j \rangle|^2$;

iii) $v = \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle v_j$;

iv) Se $w \in V$ então $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle \langle v_j, w \rangle$.

5.3 Operadores que Preservam Produto Interno

Inicialmente, vamos formalizar a definição de operadores que preservam norma.

Definição 5.3.1 Sejam V e W espaços vetoriais, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

Dizemos que T é uma isometria quando $\|T(v)\| = \|v\|$, $v \in V$.

Exemplo 5.3.2 Sejam $V = W = C([0, 1], \mathbb{R})$, o primeiro munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x^2 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in V,$$

e o segundo do produto interno

$$[f, g] = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in W.$$

O operador $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(f)(x) = xf(x)$, $x \in [0, 1]$, $f \in V$, é uma isometria pois

$$\|T(f)\|^2 = [T(f), T(f)] = \int_0^1 xf(x)xf(x)dx = \langle f, f \rangle = \|f\|^2, \quad f \in V.$$

O leitor pode verificar como exercício que T não é um isomorfismo.

Os operadores que preservam produto interno são introduzidos a seguir.

Definição 5.3.3 *Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$.*

Dizemos que T preserva produto interno quando

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in V.$$

Dizemos que T é unitário (resp. ortogonal) quando V é unitário (resp. euclidiano), T é um isomorfismo e preserva produto interno.

Observação 5.3.4 1) Todo operador unitário ou ortogonal é uma isometria, mas a recíproca não vale.

2) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$.

Se T preserva produto interno ou norma então T já é um isomorfismo. De fato, se $v \in \text{Ker } T$ então $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = 0$, isto é, $v = 0$. Logo, $\text{Ker } T = \{0\}$ e, portanto, T é isomorfismo devido ao Teorema 3.2.7.

3) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$.

Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ são bases ortonormais de V e $T(v_j) = w_j$, $j = 1, \dots, n$, então T é unitário (ortogonal). De fato, se $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ e $v = \sum_{k=1}^n \beta_k v_k$, $\alpha_j, \beta_j \in F$, $j = 1, \dots, n$, então

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, \sum_{k=1}^n \beta_k w_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{\beta_j} = \langle u, v \rangle.$$

O exemplo anterior mostra que T é um isomorfismo.

Operadores unitários e ortogonais preservam norma.

Teorema 5.3.5 *Sejam V um espaço vetorial, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) T preserva produto interno;*
- ii) T preserva norma;*
- iii) Se B é base ortonormal de V então $\{T(v) : v \in B\}$ também é.*

Demonstração. Obviamente i) implica ii). A identidade de polarização revela que ii) implica i). Se T preserva norma e produto interno então ele leva base ortonormal de V em base ortonormal de V . Portanto, ii) implica iii). A implicação restante fica como exercício para o leitor. \square

Exercícios 5.3.6 32) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita n , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $v_0 \in V$ unitário. Defina $T \in V^V$ por $T(v) = v - 2\langle v, v_0 \rangle v_0$, $v \in V$. Mostre que:

- i) $T(v) - v \in H^\perp$, $v \in V$ e $T(v) + v \in H$, $v \in V$, onde H é o hiperplano ortogonal a v_0 ;
- ii) T é ortogonal;
- iii) 1 e -1 são autovalores de T ;
- iv) T é diagonalizável.

33) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita n , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $S \in \mathcal{L}(V)$ é ortogonal, 1 é um autovalor de S e $V(1, S)$ é um hiperplano, prove que $S(v) = v - 2\langle v, u \rangle u$, $v \in V$, onde $u \in V$ e $\|u\| = 1$.

34) Aplicações do tipo introduzido no exercício 32) são chamadas de reflexões em relação a H . Determine uma matriz da reflexão em relação a H no caso em que $V = \mathbb{R}^4$ e H é o hiperplano dado por $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 2z - w = 0\}$.

35) Seja V um espaço euclidiano, de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador ortogonal e W um subespaço T -invariante de V . Prove que $T(W) = W$ e que $T(W^\perp) = W^\perp$.

36) Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão 2 e $\{v_1, v_2\}$ base ortonormal de V . Existe $T \in \mathcal{L}(V)$ que preserva produto interno e satisfaz $T(v_1) = (v_1 + v_2)/2$?

5.4 A Transformação Adjunta

Vamos estudar agora operadores lineares sobre espaços com produto interno, que preservam algum tipo de estrutura relativa aos produtos internos dos espaços.

O teorema a seguir introduz o principal conceito das seções futuras.

Teorema 5.4.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Assuma que $\dim_F V < \infty$. Existe um único*

$T^* \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que

$$\langle u, T^*(v) \rangle_V = \langle T(u), v \rangle_W, \quad u, v \in V.$$

Demonstração. Seja $w \in W$. A aplicação $\psi : V \rightarrow F$ dada por $\psi(u) = \langle T(u), w \rangle_W$, $u \in V$, é linear. Pelo Teorema 5.1.9, existe um único $v = v(w) \in V$ tal que $\psi = T_v$. Logo,

$$\langle T(u), w \rangle_W = \psi(u) = T_v(u) = \langle u, v \rangle_V, \quad u \in V.$$

Definimos então $T^* : W \rightarrow V$ por $T^*(w) = v$, $w \in W$. Se $w_1, w_2 \in W$ então

$$\begin{aligned} \langle u, T^*(w_1 + w_2) \rangle_V &= \langle T(u), w_1 + w_2 \rangle_W \\ &= \langle T(u), w_1 \rangle_W + \langle T(u), w_2 \rangle_W \\ &= \langle u, T^*(w_1) \rangle_V + \langle u, T^*(w_2) \rangle_V \\ &= \langle u, T^*(w_1) + T^*(w_2) \rangle_V, \quad u \in V. \end{aligned}$$

Logo, $\langle u, T^*(w_1 + w_2) - T^*(w_1) - T^*(w_2) \rangle_V = 0$, $u \in V$ e, portanto, $T^*(w_1 + w_2) = T^*(w_1) + T^*(w_2)$. Analogamente, $T^*(\alpha w) = \alpha T^*(w)$, $\alpha \in F$, $w \in W$. Portanto, $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$.

Suponhamos agora que existe $T' \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que $\langle u, T'(w) \rangle_V = \langle T(u), w \rangle_W$, $u \in V$, $w \in W$. Então

$$\begin{aligned} \langle u, (T^* - T')(w) \rangle_V &= \langle u, T^*(w) - T'(w) \rangle_V \\ &= \langle u, T^*(w) \rangle_V - \langle u, T'(w) \rangle_V \\ &= \langle T(u), w \rangle_W - \langle T(u), w \rangle_W = 0, \quad u \in V, \quad w \in W. \end{aligned}$$

Segue que $(T^* - T')(w) = 0$, $w \in W$. Portanto, $T^* = T'$. □

Exemplo 5.4.2 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dada por $T(x, y) = (x + y, x - 2y)$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle T(x, y), (x_1, y_1) \rangle &= \langle (x + y, x - 2y), (x_1, y_1) \rangle \\ &= x_1(x + y) + y_1(x - 2y) \\ &= xx_1 + xy_1 + yx_1 - 2yy_1 \\ &= \langle (x, y), (x_1 + y_1, x_1 - 2y_1) \rangle, \quad x, y, x_1, y_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, $T^*(x_1, y_1) = (x_1 + y_1, x_1 - 2y_1)$, $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 5.4.3 Sejam V e W espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Se existir $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$ satisfazendo $\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, T^*(w) \rangle_V$, $v \in V$, $w \in W$, dizemos que T possui uma adjunta e que T^* é a transformação adjunta de T .

Observação 5.4.4 1) Não é mera coincidência que a notação para a transformação adjunta introduzida acima coincide com a notação para a transposta apresentada na Seção 3.6. De fato, se S é a transposta de T então $S(f) = f \circ T$, $f \in W^*$. Como cada $f \in W^*$ escreve-se na forma $f(\cdot) = \langle \cdot, w \rangle_W$, $w \in W$ então

$$S(\langle \cdot, w \rangle_W) = \langle \cdot, w \rangle_W \circ T = \langle T(\cdot), w \rangle_W.$$

Por outro lado, $S(\langle \cdot, w \rangle_W)$ é um elemento de V^* . Logo, $S(\langle \cdot, w \rangle_W) = \langle \cdot, v_0 \rangle_V$, para um único $v_0 = v_0(w) \in V$. Portanto,

$$\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, v_0 \rangle_V, \quad v \in V, \quad w \in W.$$

Assim, a função $w \in W \rightarrow v_0(w) \in V$ é precisamente T^* .

2) Se a adjunta de uma transformação linear existe, então ela é única, mesmo que as dimensões dos espaços envolvidos não sejam finitas.

Exemplo 5.4.5 Seja $V = P(\mathbb{C})$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \overline{q(x)} dx, \quad p, q \in V.$$

Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $T(p) = p'$. Vamos mostrar que T não possui adjunta. De fato, suponhamos que exista $T^* \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\langle p, T^*(q) \rangle = \langle T(p), q \rangle$, $p, q \in V$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle p, T^*(q) \rangle &= \int_0^1 p'(x) \overline{q(x)} dx \\ &= p(1) \overline{q(1)} - p(0) \overline{q(0)} - \int_0^1 p(x) \overline{q'(x)} dx \\ &= p(1) \overline{q(1)} - p(0) \overline{q(0)} - \langle p, T(q) \rangle, \quad p, q \in V. \end{aligned}$$

ou seja, $\langle p, T^*(q) + T(q) \rangle = p(1) \overline{q(1)} - p(0) \overline{q(0)}$, $p, q \in V$. Em particular, escolhendo $q \in V$ tal que $q(1) \neq 0$ e $q(0) = 0$ podemos escrever $\langle p, (T^* + T)(q) \rangle = p(1) \overline{q(1)}$, $p \in V$. Logo, $\langle p, (T^* + T)(q/q(1)) \rangle = p(1)$, $p \in V$. Esta igualdade revela que o funcional linear

$\varphi \in V^*$ dado por $\varphi(p) = p(1)$ é da forma $\varphi(p) = \langle p, p_0 \rangle$, para algum $p_0 \in V$. Entretanto, usando-se um argumento similar àquele utilizado na Observação 5.1.12-ii), concluímos que φ não pode ser escrito nesta forma, a menos que $\varphi = 0$. Por conseguinte, $\varphi = 0$. Daí, $p(1) = 0$, $p \in V$. Em particular, $q(1) = 0$, uma contradição.

Nos próximos teoremas, apresentamos algumas propriedades relacionadas com o conceito de adjunta.

Teorema 5.4.6 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Assuma que T tem adjunta. Valem as seguintes propriedades:*

i) *Se $S \in \mathcal{L}(V, W)$ e S tem adjunta então $T + S$ tem adjunta e $(T + S)^* = T^* + S^*$;*

ii) *Se $\alpha \in F$ então αT tem adjunta e $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$;*

iii) *T^* tem adjunta e $(T^*)^* = T$;*

iv) *Se U é um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$, $S \in \mathcal{L}(U, V)$ e S tem adjunta então $T \circ S$ tem adjunta e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$;*

v) *Se T é inversível e T^{-1} tem adjunta então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Demonstração. i) Segue das igualdades

$$\begin{aligned} \langle (T + S)(v), w \rangle_W &= \langle T(v) + S(v), w \rangle_W \\ &= \langle T(v), w \rangle_W + \langle S(v), w \rangle_W \\ &= \langle v, T^*(w) \rangle_V + \langle v, S^*(w) \rangle_V \\ &= \langle v, T^*(w) + S^*(w) \rangle_V \\ &= \langle v, (T^* + S^*)(w) \rangle_V, \quad v \in V, \quad w \in W. \end{aligned}$$

ii) Exercício.

iii) Segue de

$$\langle T^*(w), v \rangle_V = \overline{\langle v, T^*(w) \rangle_V} = \overline{\langle T(v), w \rangle_W} = \langle w, T(v) \rangle_W, \quad v \in V, \quad w \in W.$$

iv) Basta usar as igualdades

$$\begin{aligned} \langle (T \circ S)(u), w \rangle_W &= \langle T(S(u)), w \rangle_W = \langle S(u), T^*(w) \rangle_V \\ &= \langle u, S^*(T^*(w)) \rangle_U = \langle u, (S^* \circ T^*)(w) \rangle_U, \quad u \in U, \quad w \in W. \end{aligned}$$

v) É consequência de iv). □

Teorema 5.4.7 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Assuma que T possui adjunta. Valem as seguintes propriedades:*

- i) $\text{Ker } T^* = (\text{Im } T)^\perp$ e $(\text{Im } T^*)^\perp = \text{Ker } T$;
- ii) Se $\dim_F V < \infty$ então $V = \text{Im } T^* \oplus \text{Ker } T$;
- iii) Se $\dim_F W < \infty$ então $W = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T^*$;
- iv) Se $V = W$ e U é um subespaço T -invariante de V então U^\perp é T^* -invariante;
- v) Se $V = W$ e $\dim_F V < \infty$ então vale a recíproca de iv);
- vi) $\text{Ker } T^* \circ T = \text{Ker } T$;
- vii) Se $\dim_F V < \infty$ então $\text{Im } T^* \circ T = \text{Im } T^*$;

Demonstração. i) Seja $w \in W$. Então $w \in (\text{Im } T)^\perp$ se, e somente se, $\langle T(v), w \rangle_W = 0$, $v \in V$, isto é, se, e somente se, $\langle v, T^*(w) \rangle_V = 0$, $v \in V$. Isto equivale a dizer que $T^*(w) = 0$, ou seja, que $w \in \text{Ker } T^*$.

A outra igualdade é obtida aplicando-se a primeira para T^* e lembrando-se que $T^{**} = T$.

ii) Basta combinar o Teorema 5.2.4, o Corolário 5.2.6 e a segunda igualdade em i).

iii) Exercício.

iv) Sejam U um subespaço T -invariante de V e $w \in U^\perp$. Então

$$\langle T^*(w), u \rangle_V = \langle w, T(u) \rangle_W = 0, \quad u \in U.$$

Segue que $T^*(w) \in U^\perp$. Portanto, U^\perp é T^* -invariante.

v) Basta usar iv) e o Corolário 5.2.6.

vi) Obviamente $\text{Ker } T \subset \text{Ker } T^* \circ T$. Se $v \in \text{Ker } T^* \circ T$ então

$$0 = \langle v, 0 \rangle_V = \langle v, T^*(T(v)) \rangle_V = \langle T(v), T(v) \rangle_W = \|T(v)\|^2,$$

ou seja, $v \in \text{Ker } T$. A primeira igualdade segue.

vii) Observemos inicialmente que, devido a ii) e vi) temos que

$$\begin{aligned} \dim_F \text{Im } T^* &= \dim_F (\text{Ker } T)^\perp = \dim_F V - \dim_F \text{Ker } T \\ &= \dim_F V - \dim_F (\text{Ker } T^* \circ T) = \dim_F \text{Im } T^* \circ T. \end{aligned}$$

Como obviamente $\text{Im } T^* \circ T \subset \text{Im } T^*$, a igualdade segue. □

Teorema 5.4.8 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , ambos de dimensão finita, com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Valem as seguintes propriedades:*

i) Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ são bases ortonormais de V e W , respectivamente, então $(T^)_C^B = \overline{T_B^C}^t$;*

ii) Se $V = W$ e α é um autovalor de T^ então $\bar{\alpha}$ é um autovalor de T (de mesma multiplicidade algébrica);*

iii) Se $V = W$, u é autovetor de T associado ao autovalor α , v é autovetor de T^ associado ao autovalor β e $\alpha \neq \bar{\beta}$ então u e v são ortogonais.*

Demonstração. i) Escreva $T_B^C = (\alpha_{jl})$ e $(T^*)_C^B = (\beta_{lj})$. Então $T(v_l) = \sum_{k=1}^m \alpha_{kl} w_k$, $l = 1, \dots, n$ e $T^*(w_j) = \sum_{k=1}^n \beta_{kj} v_k$, $j = 1, \dots, m$. Segue que

$$\alpha_{jl} = \langle T(v_l), w_j \rangle_W = \langle v_l, T^*(w_j) \rangle_V = \overline{\beta_{lj}}, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, n.$$

ii) Basta computar o polinômio característico de T^* :

$$p_{T^*}(\lambda) = \det((T^*)_C^B - \lambda I_n) = \det(\overline{(T_B^C - \bar{\lambda} I_n)}^t) = \det(\overline{T_B^C - \bar{\lambda} I_n}) = \overline{p_T(\bar{\lambda})}.$$

A conjugação de $p_T(\bar{\lambda})$ na expressão acima significa conjugação dos coeficientes de $p_T(\bar{\lambda})$.

iii) Temos que

$$\alpha \langle u, v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle = \langle u, \beta v \rangle = \bar{\beta} \langle u, v \rangle.$$

Como $\alpha \neq \bar{\beta}$, $\langle u, v \rangle = 0$. □

Terminamos esta seção apresentando uma caracterização para operadores unitários e ortogonais.

Teorema 5.4.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Valem as seguintes propriedades:*

i) Se T é unitário então T tem adjunta e $T^ \circ T = T \circ T^* = I_V$;*

ii) Se $\dim_F V < \infty$ e $T^ \circ T = I_V$ então T é unitário.*

Demonstração. i) Se T é unitário então

$$\langle T(u), v \rangle = \langle T(u), T(T^{-1}(v)) \rangle = \langle u, T^{-1}(v) \rangle, \quad u, v \in V.$$

Logo, T^* existe e $T^* = T^{-1}$.

ii) Se $T^* \circ T = I_V$ então

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, T^*(T(v)) \rangle = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in V.$$

Como $\dim_F V < \infty$, T é isomorfismo. Logo, T é unitário. \square

Exercícios 5.4.10 37) Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se T possui adjunto e $T^* = \lambda T$ para algum $\lambda \in F$, prove que $|\lambda| = 1$.

38) Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão finita, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de V e $T \in \mathcal{L}(V) \setminus \{0\}$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$, então $\langle T(u), T(v) \rangle = 0$. Prove:

i) Se $u, v \in V$ e $\|u\| = \|v\|$, então $\|T(u)\| = \|T(v)\|$;

ii) Se $r := \|T(v_1)\|$, então $T^* \circ T = r^2 I_V$;

iii) Se r é como em ii), então $r^{-1}T$ é um operador ortogonal;

iv) T é um múltiplo de um operador ortogonal.

39) Considere o espaço \mathbb{C}^3 usual. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ o operador cuja matriz em relação à base canônica é da forma $A_{jk} = i^{j+k}$, $j, k = 1, 2, 3$. Determine uma base para $\text{Ker } T^*$.

40) Considere $V = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ munido do produto interno $\langle A, B \rangle = \text{traço } A\bar{B}^t$, $A, B \in V$. Seja X um elemento inversível de V . Defina $T_X \in \mathcal{L}(V)$ por $T_X(A) = X^{-1}AX$, $A \in V$. Determinar o operador T_X^* .

41) Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno. Dois operadores $T, S \in \mathcal{L}(V)$ são *congruentes* quando existe um isomorfismo $R \in \mathcal{L}(V)$, que possui adjunta, tal que $T = R^* \circ S \circ R$. Prove que:

i) Congruência é uma relação de equivalência;

ii) Se T e S possuem adjuntas e T e S são congruentes então T^* e S^* são congruentes;

iii) Se $\alpha \in F$, existe $T \in \mathcal{L}(V)$ congruente a αI_V tal que $T \neq \alpha I_V$?

iv) Existem $T, S \in \mathcal{L}(V)$ tais que T e S são congruentes, mas T^2 e S^2 não são?

v) Se $T, S \in \mathcal{L}(V)$ são isomorfismos, mostre que T e S são congruentes se, e somente se, T^{-1} e S^{-1} são congruentes.

42) Sejam U e V espaços euclidianos, ambos de dimensão finita. Mostre que a expressão

$$\langle T, S \rangle = \text{traço } (S^* \circ T), \quad S, T \in \mathcal{L}(U, V)$$

define um produto interno em $\mathcal{L}(U, V)$.

5.5 Operadores Autoadjuntos

Definição 5.5.1 *Sejam V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que T tem adjunta. Dizemos que T é autoadjunto quando $T = T^*$ e anti-autoadjunto quando $T^* = -T$.*

Exemplo 5.5.2 1) Sejam $P(\mathbb{C})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \overline{q(x)} dx, \quad p, q \in P(\mathbb{C})$$

e $T \in \mathcal{L}(P(\mathbb{C}))$ dada por $T(p)(x) = xp(x)$, $x \in \mathbb{C}$, $p \in P(\mathbb{C})$. Então

$$\begin{aligned} \langle T(p), q \rangle &= \int_0^1 T(p)(x) \overline{q(x)} dx = \int_0^1 xp(x) \overline{q(x)} dx \\ &= \int_0^1 p(x) \overline{xq(x)} dx = \langle p, T(q) \rangle, \quad p, q \in P(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Portanto, $T^* = T$, isto é, T é autoadjunto. O operador iT é anti-autoadjunto.

2) O único operador linear sobre um espaço com produto interno que é autoadjunto e anti-autoadjunto simultaneamente é o operador nulo.

Exemplos adicionais são fornecidos pelos dois teoremas abaixo.

Teorema 5.5.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Valem as seguintes propriedades:*

i) Se T tem adjunto então $T^ \circ T$ e $T + T^*$ são autoadjuntos, enquanto que $T - T^*$ é anti-autoadjunto;*

ii) Se $F = \mathbb{C}$ então T é autoadjunto se, e somente se, iT é anti-autoadjunto.

Demonstração. i) Usando o Teorema 5.4.6, vemos que $(T^* \circ T)^* = T^* \circ (T^*)^* = T^* \circ T$, $(T + T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = T + T^*$ e $(T - T^*)^* = T^* - (T^*)^* = T^* - T = -(T - T^*)$.

ii) Se $T^* = T$ então $(iT)^* = \bar{i}T^* = -iT$. Reciprocamente, se $(iT)^* = -iT$ então $-iT^* = -iT$, ou seja, $T = T^*$. □

Teorema 5.5.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Valem as seguintes propriedades:*

i) Se $T \neq 0$ é autoadjunto e $\alpha \in F$ então αT é autoadjunto se, e somente se, $\alpha \in \mathbb{R}$;

ii) Se T é isomorfismo então T é autoadjunto se, e somente se, T^{-1} é autoadjunto.

Demonstração. i) Assuma que $T \neq 0$ e que T é autoadjunto. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, o Teorema 5.4.6 garante que $(\alpha T)^* = \alpha T^* = \alpha T$. Logo, αT é autoadjunto. Reciprocamente, se αT é autoadjunto, $\alpha T = (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* = \bar{\alpha} T$, ou seja, $(\alpha - \bar{\alpha})T = 0$. Em particular, $(\alpha - \bar{\alpha})T(v) = 0$, $v \in V \setminus \text{Ker } T$. Como $T \neq 0$, $\alpha - \bar{\alpha} = 0$, ou seja, $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Assuma que T é um isomorfismo. Se $T = T^*$, sejam $u, v \in V$ e escreva $v = T(w)$, $w \in V$. Então

$$\begin{aligned} \langle T^{-1}(u), v \rangle &= \langle T^{-1}(u), T(w) \rangle = \langle T^{-1}(u), T^*(w) \rangle \\ &= \langle T(T^{-1}(u)), w \rangle = \langle u, w \rangle = \langle u, T^{-1}(v) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $(T^{-1})^*$ existe e $(T^{-1})^* = T^{-1}$. Reciprocamente, se T^{-1} é autoadjunto então $(T^{-1})^{-1} = T$ é autoadjunto pelo acima descrito. \square

Teorema 5.5.5 *Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ um base ortonormal de V e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então T é autoadjunto se, e somente se, T_B^B é uma matriz hermitiana.*

Demonstração. Seja $T_B^B = (a_{jl})$. Então já sabemos que $a_{jl} = \langle T(v_l), v_j \rangle$, $j, l = 1, \dots, n$. Se T é autoadjunto então

$$a_{jl} = \langle T(v_l), v_j \rangle = \langle v_l, T^*(v_j) \rangle = \langle v_l, T(v_j) \rangle = \overline{\langle T(v_j), v_l \rangle} = \overline{a_{lj}}.$$

Logo, T_B^B é uma matriz hermitiana. Reciprocamente, se T_B^B é hermitiana,

$$\langle T(v_l), v_j \rangle = a_{jl} = \overline{a_{lj}} = \overline{\langle T(v_j), v_l \rangle} = \langle v_l, T(v_j) \rangle, \quad j, l = 1, \dots, n.$$

Portanto, segue que $T = T^*$. \square

Teorema 5.5.6 *Sejam V um espaço com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que T tenha adjunta. Então*

i) T escreve-se, de maneira única, na forma $T = R + S$, onde $R, S \in \mathcal{L}(V)$, R é autoadjunto e S é anti-autoadjunto;

ii) Se V é unitário, T escreve-se, de maneira única, na forma $T = R + iS$, onde $R, S \in \mathcal{L}(V)$ são autoadjuntos.

Demonstração. i) Basta definir

$$R = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{e} \quad S = \frac{1}{2}(T - T^*).$$

Se $T = R + S = R' + S'$ com $R = R^*$, $R' = (R')^*$, $S^* = -S$ e $(S')^* = -S'$ então $R - R' = S' - S$ é, simultaneamente, autoadjunto e anti-autoadjunto. Logo, pelo Exemplo 5.5.2, $R - R' = S' - S = 0$, ou seja, $R = R'$ e $S = S'$.

ii) T já possui uma representação como em i). Daí, $T = R + S = R + i(-iS)$ e $(-iS)^* = iS^* = i(-S) = -iS$, isto é, $-iS$ é autoadjunto. A unicidade da representação é óbvia. \square

Teorema 5.5.7 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Então,*

i) *Todo autovalor de T é real;*

ii) *Autovetores de T associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Demonstração. i) Se $T(v) = \alpha v$, onde $v \in V \setminus \{0\}$ e $\alpha \in F$ então

$$\alpha \langle v, v \rangle = \langle \alpha v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle v, v \rangle.$$

Logo, $(\alpha - \bar{\alpha}) \langle v, v \rangle = 0$, ou seja, $\alpha = \bar{\alpha}$.

ii) Se $T(v) = \alpha v$ e $T(w) = \beta w$, onde $v, w \in V \setminus \{0\}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então

$$\alpha \langle v, w \rangle = \langle \alpha v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = \langle v, \beta w \rangle = \beta \langle v, w \rangle.$$

Se $\alpha \neq \beta$, segue que v e w são ortogonais. \square

O teorema a seguir completa as informações sobre os autovalores de um operador autoadjunto.

Teorema 5.5.8 *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Então todas as raízes de p_T são reais.*

Demonstração. Sejam $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ e B uma base ortonormal de V . O polinômio característico é dado por $p_T(\lambda) = \det(T_B^B - \lambda I_n) \in P_{n+1}(F)$. O Teorema 5.5.5 revela que $T_B^B = \overline{T_B^B}^t$. Consideremos o espaço $M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ munido do produto interno $[X, Y] = \overline{Y}^t X$ e definamos $S \in \mathcal{L}(M_{n \times 1}(\mathbb{C}))$ por $S(X) = T_B^B X$, $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$. O operador S é autoadjunto já que

$$[S(X), Y] = \overline{Y}^t S(X) = \overline{Y}^t T_B^B X = \overline{(T_B^B Y)}^t X = \overline{(S(Y))}^t X = [X, S(Y)], \quad X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}).$$

Como \mathbb{C} é algebricamente fechado, p_T tem n raízes complexas. Seja α uma destas raízes. Como $T_B^B - \alpha I_n$ não é inversível, existe $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tal que $(T_B^B - \alpha I_n)X = 0$. Segue que $S(X) = T_B^B X = \alpha X$, ou seja, α é um autovalor de S . Como S é autoadjunto, $\alpha \in \mathbb{R}$ pelo Teorema 5.5.7. \square

O exemplo a seguir exhibe um operador autoadjunto que não possui autovalores.

Exemplo 5.5.9 Consideremos o espaço $C([0, 1], \mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$$

e $T \in \mathcal{L}(C([0, 1], \mathbb{R}))$ dado por $T(f)(x) = xf(x)$, $x \in [0, 1]$, $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. T é claramente autoadjunto. Se $T(f) = \alpha f$, onde $f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $(x - \alpha)f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Logo, $f(x) = 0$, $x \in [0, 1] \setminus \{\alpha\}$. Como f é contínua, $f(\alpha) = 0$ e, conseqüentemente, $f = 0$. Isto é uma contradição.

Exercícios 5.5.10 43) Enuncie e prove uma versão do Teorema 5.5.7 para operadores anti-autoadjuntos.

44) Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ autoadjuntos. Mostre que $T \circ S$ é autoadjunto se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$.

45) Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que:

i) Se T é autoadjunto e S possui adjunta então $S^* \circ T \circ S$ é autoadjunto;

ii) Se S é isomorfismo, S e T possuem adjunta e $S^* \circ T \circ S$ é autoadjunto, então T é autoadjunto;

i) A hipótese “ S é isomorfismo” é essencial?

46) Considere o espaço vetorial $V = P_n(\mathbb{C})$.

- i) Mostre que a expressão $\langle p, q \rangle = \sum_{j=0}^n p(j/n) \overline{q(j/n)}$, $p, q \in V$, define um produto interno em V ;
- ii) Verifique se o operador $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por $(T(p))(t) = tp'(t)$, $p \in V$, é autoadjunto;
- iii) Faça o mesmo para o operador S dado por $S(p) = p'$, $p \in V$;
- iv) Responda os itens ii) e iii) no caso em que produto interno de V é o usual.
- 47) Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $T, S \in \mathcal{L}(V)$.
- i) Prove que se T e S são autoadjuntos, então $S \circ T + T \circ S$ é autoadjunto e $S \circ T - T \circ S$ é anti-autoadjunto;
- 2) As conclusões do item i) ainda valem quando T e S são anti-autoadjuntos?
- 3) O que acontece se um deles é autoadjunto e o outro é anti-autoadjunto?
- 48) Sejam V um espaço unitário e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador que tem adjunto. Prove que T é autoadjunto se, e somente se, $\langle T(v), v \rangle \in \mathbb{R}$, $v \in V$.
- 49) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e P uma projeção de V . Mostre que P é autoadjunto se, e somente se, $P \circ P^* = P^* \circ P$.
- 50) Sejam V um espaço com produto interno, de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Se T é autoadjunto e S é anti-autoadjunto, verifique se $\text{traço}(T \circ S) = 0$.
- 51) Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão finita e $\phi \in V^V$. Assuma que $\phi(0) = 0$ e que $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$, $v, w \in V$. Mostre que ϕ é um operador ortogonal.
- 52) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita e $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ produtos internos sobre V . Mostre que:
- i) Existe $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ tal que $\langle v, w \rangle_2 = \langle T(v), w \rangle_1$, $v, w \in V$;
- ii) Existe uma base B de V que é um conjunto ortogonal em relação aos produtos internos dados.
- 53) No espaço $P(\mathbb{C})$, munido do produto interno do Exemplo 5.5.2, verifique se o operador T dado por $(T(p))(t) = p(-t)$, $p \in P(\mathbb{C})$ preserva produto interno. Ele é autoadjunto?
- 54) Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que:
- i) Se T é autoadjunto e preserva produto interno então $T^2 = I_V$;
- ii) Se T é autoadjunto e $T^2 = I_V$ então T preserva produto interno;
- iii) Se T preserva produto interno e $T^2 = I_V$ então T é autoadjunto.

55) Seja V um espaço vetorial unitário de dimensão finita. Prove:

i) Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é anti-autoadjunto então $T \pm I_V$ é um isomorfismo;

ii) Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é anti-autoadjunto então $S := (T - I_V)(T + I_V)^{-1}$ é unitário;

iii) Se S é como em ii) então $S + I_V$ é um isomorfismo;

iv) Se $R \in \mathcal{L}(V)$ preserva produto interno e $R - I_V$ é isomorfismo então o operador $(R + I_V)(R - I_V)^{-1}$ é anti-autoadjunto.

56) Sejam V um espaço unitário e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que S é autoadjunto e que T é anti-autoadjunto. Prove que $I_V - T - iS$ é inversível e que $(I_V + T + iS)(I_V - T - iS)^{-1}$ é unitário.

57) Sejam V um espaço euclidiano e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que T é autoadjunto, S é anti-autoadjunto e que $T \circ S = S \circ T$. Prove que $T - S$ é inversível e que $(T + S)(T - S)^{-1}$ é ortogonal.

58) Sejam V um espaço unitário e $T \in \mathcal{L}(V)$ satisfazendo $T^* \circ T = -T$. Mostre que

i) T é autoadjunto;

ii) Assumindo que $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, mostre que os únicos autovalores de T são 0 e -1 .

59) Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) Se $p \in P(\mathbb{R})$ e $p(T) = 0$ então $p(-T) = 0$;

ii) O polinômio minimal de T é par.

60) Considere o espaço $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ usual. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ dado por

$$T(f) = \int_0^1 x y f(y) dy, \quad x \in [0, 1], \quad f \in V.$$

i) Verifique que T é autoadjunto;

ii) Se n é um inteiro positivo então $f_n(x) = x^n - (2/(n+2))$, $x \in [0, 1]$, é um autovetor de T associado ao autovalor 0;

iii) Use o método de Gram-Schmidt para encontrar dois autovetores de T associados ao autovalor 0, que são ortogonais;

iv) Encontre o único autovalor não nulo de T e os autovetores correspondentes.

5.6 Projeções Ortogonais

Projeções ortogonais foram introduzidas na Definição 5.2.5 e investigadas superficialmente na Seção 5.2. Coletamos no teorema abaixo as duas maneiras mais simples de construção de tais projeções.

Teorema 5.6.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e W um subespaço de V , de dimensão finita.*

i) Se $\{w_1, \dots, w_n\}$ é base ortonormal de W então $P \in \mathcal{L}(V)$ dada por $P(v) = \sum_{j=1}^n \langle v, w_j \rangle w_j$, $v \in V$ é uma projeção ortogonal de V sobre W ;

ii) Se $V = W \oplus W^\perp$ então $P \in \mathcal{L}(V)$ dada por $P(w_1 + w_2) = w_1$, $w_1 \in W$, $w_2 \in W^\perp$ é uma projeção ortogonal de V sobre W .

Uma terceira maneira é dada a seguir.

Teorema 5.6.2 *Sejam V um espaço com produto interno e P uma projeção de V . Valem as propriedades:*

i) P é uma projeção ortogonal se, e somente se, $P = P^$;*

ii) Se P é projeção ortogonal de V sobre W então $I_V - P$ é projeção ortogonal de V sobre W^\perp ;

iii) Se P é projeção ortogonal então $\|P(v)\| \leq \|v\|$, $v \in V$.

Demonstração. i) Suponhamos que P é uma projeção ortogonal sobre W . Vamos mostrar que P é autoadjunta. Sejam $u, v \in V$. Usando a decomposição $V = W \oplus W^\perp$, garantida pelo Teorema 5.2.4, podemos escrever $u = w_1 + w_2$, $v = w_3 + w_4$, onde $w_1, w_3 \in W$ e $w_2, w_4 \in W^\perp$. Segue que

$$\langle P(u), v \rangle = \langle w_1, w_3 + w_4 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle = \langle w_1 + w_2, w_3 \rangle = \langle u, P(v) \rangle.$$

Assim, $P = P^*$. Reciprocamente, suponhamos que $P = P^2 = P^*$. Se $w \in \text{Im } P$ e $u \in \text{Ker } P$ então

$$\langle w, u \rangle = \langle P(w), u \rangle = \langle w, P(u) \rangle = \langle w, 0 \rangle = 0.$$

Segue que $\text{Ker } P = (\text{Im } P)^\perp$. Portanto, P é projeção ortogonal de V sobre $\text{Im } P$.

ii) Já sabemos que $Q = I_V - P$ é uma projeção de V , e que $\text{Im } Q = \text{Ker } P = W^\perp$. Se

$u \in \text{Ker}(I_V - P)$ e $v \in \text{Ker} P$ então $\langle u, v \rangle = \langle P(u), v \rangle = \langle u, P(v) \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$. Logo, $\text{Ker} Q = (\text{Ker} P)^\perp$. Claramente, $Q|_{W^\perp} = I_{W^\perp}$. Portanto, Q é uma projeção ortogonal de V sobre W^\perp .

iii) Inicialmente notemos que se P é projeção ortogonal então

$$\langle v, P(v) \rangle = \langle v, P(P(v)) \rangle = \langle P(v), P(v) \rangle = \|P(v)\|^2 \geq 0, \quad v \in V.$$

Usando este resultado para $I_V - P$ e a relação

$$\begin{aligned} \|v\|^2 - \|P(v)\|^2 &= \langle v, v \rangle - \langle P(v), P(v) \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, P(P(v)) \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \langle v, P(v) \rangle = \langle v, v - P(v) \rangle = \langle v, (I_V - P)(v) \rangle, \quad v \in V, \end{aligned}$$

concluimos a prova. □

Em espaços de dimensão finita, a recíproca do Teorema 5.6.2-iii) vale.

Teorema 5.6.3 *Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e P uma projeção de V . Se $\|P(v)\| \leq \|v\|$, $v \in V$, então P é uma projeção ortogonal.*

Demonstração. Seja $W = \text{Im} P$. Vamos mostrar que se $\|P(v)\| \leq \|v\|$, $v \in V$, então $\text{Ker} P = W^\perp$. Devido ao Corolário 5.2.6, basta mostrar que $(\text{Ker} P)^\perp = W$. Se $u \in (\text{Ker} P)^\perp$, como $v := P(u) - u \in \text{Ker} P$, temos que $P(u) = v + u$, onde $\langle u, v \rangle = 0$. Ainda,

$$\|u\|^2 \geq \|P(u)\|^2 = \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \geq \|u\|^2.$$

Portanto $v = 0$, ou seja, $P(u) = u$. Segue que $(\text{Ker} P)^\perp \subset W$. Reciprocamente, se $w \in W$, o Teorema 5.2.4 permite-nos escrever, $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in \text{Ker} P$ e $w_2 \in (\text{Ker} P)^\perp$. Daí,

$$w = P(w) = P(w_1 + w_2) = P(w_1) + P(w_2) = P(w_2) = w_2,$$

pois $w_2 \in (\text{Ker} P)^\perp \subset W$. Portanto, $w \in (\text{Ker} P)^\perp$. Logo, $W \subset (\text{Ker} P)^\perp$. □

Teorema 5.6.4 *Sejam V um espaço com produto interno e P_1, \dots, P_n projeções ortogonais de V . São equivalentes:*

- i) $P = P_1 + \dots + P_n$ é uma projeção ortogonal;
- ii) $P_j \circ P_k = 0$, $j \neq k$.

Demonstração. Se $P_j \circ P_k = 0$, $j \neq k$, então, uma extensão óbvia do Corolário 4.1.11, garante que P é uma projeção de V . Por outro lado,

$$P^* = (P_1 + \cdots + P_n)^* = P_1^* + \cdots + P_n^* = P_1 + \cdots + P_n = P.$$

Portanto, P é projeção ortogonal. Reciprocamente, assumamos que P é uma projeção ortogonal. Se $v \in \text{Im } P_j$, para algum j , então, pelo Teorema 5.6.2,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &\geq \|P(v)\|^2 = \langle P(v), P(v) \rangle \\ &= \langle P^2(v), v \rangle = \langle P(v), v \rangle \\ &= \langle P_1(v) + \cdots + P_n(v), v \rangle \\ &= \langle P_1(v), v \rangle + \cdots + \langle P_n(v), v \rangle \\ &= \|P_1(v)\|^2 + \cdots + \|P_n(v)\|^2 \\ &\geq \|P_j(v)\|^2 = \|v\|^2. \end{aligned}$$

Logo, $\|P_1(v)\|^2 + \cdots + \|P_n(v)\|^2 = \|P_j(v)\|^2$ e, conseqüentemente, $P_k(v) = 0$, $k \neq j$. Portanto, $\text{Im } P_j \subset \text{Ker } P_k$, $k \neq j$, isto é, $P_k \circ P_j = 0$, $k \neq j$. \square

A seguir, mostraremos que um operador autoadjunto sobre um espaço de dimensão finita é diagonalizável.

Lema 5.6.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Se α é autovalor de T então $\dim_F V(\alpha, T) = m_T(\alpha)$.*

Demonstração. Seja α um autovalor de T . Usando o Teorema 5.4.7-iv), vemos que $V(\alpha, T)^\perp$ é T -invariante. Como $V = V(\alpha, T) \oplus V(\alpha, T)^\perp$, segue que $p_T = p_{T_1} p_{T_2}$, onde $T_1 = T|_{V(\alpha, T)}$ e $T_2 = T|_{V(\alpha, T)^\perp}$. Sendo α o único autovalor de T_1 , $p_{T_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m$, para algum $m \leq \dim_F V(\alpha, T)$. Como T_1 é autoadjunto, p_{T_1} tem $\dim_F V(\alpha, T)$ raízes reais (Teorema 5.5.8), ou seja, $m = \dim_F V(\alpha, T)$. Como $p_{T_2}(\alpha) \neq 0$, o resultado segue. \square

Teorema 5.6.6 *(Decomposição espectral para operadores autoadjuntos) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Então existem números reais distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ e projeções ortogonais P_1, \dots, P_r tais que*

i) $P_j \circ P_k = 0$, $j \neq k$, e $P_j \neq 0$, $j = 1, \dots, r$;

ii) $I_V = P_1 + \dots + P_r$;

iii) $T = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r$.

Demonstração. i) Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ os autovalores distintos de T e P_j a projeção ortogonal de V sobre $V(\alpha_j, T)$, $j = 1, \dots, r$. Cada α_j é real devido ao Teorema 5.5.7. Obviamente, $P_j \neq 0$, $j = 1, \dots, r$. Se $u, v \in V$, então $P_k(u) \in V(\alpha_k, T)$ e $P_j(v) \in V(\alpha_j, T)$. Pelo Teorema 5.5.7 novamente, $\langle P_k(u), P_j(v) \rangle = 0$, $j \neq k$. Daí, $\langle (P_j \circ P_k)(u), v \rangle = \langle P_k(u), P_j(v) \rangle = 0$, $j \neq k$. Segue que, $P_j \circ P_k = 0$, $j \neq k$.

ii) Pelo Teorema 5.6.4, temos que $P := P_1 + \dots + P_r$ é projeção ortogonal. Lembrando que $\text{Im } P = \text{Im } P_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } P_r$, o Lema 5.6.5 garante que

$$\dim_F \text{Im } P = \sum_{j=1}^r \dim_F \text{Im } P_j = \sum_{j=1}^r \dim_F V(\alpha_j, T) = n = \dim_F V.$$

Portanto, $P = I_V$.

iii) É óbvio que $T(P_j(v)) = \alpha_j P_j(v)$, $j = 1, \dots, r$, $v \in V$. Logo,

$$T(v) = T(P_1(v) + \dots + P_r(v)) = \alpha_1 P_1(v) + \dots + \alpha_r P_r(v) = (\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r)(v), \quad v \in V.$$

Portanto, $T = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r$. □

Corolário 5.6.7 *Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Então T é diagonalizável.*

Observação 5.6.8 Se V é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$, então V possui uma base ortonormal formada por autovetores de T se, e somente se, T é autoadjunto.

Exercícios 5.6.9 61) Encontre todas as projeções do espaço \mathbb{C}^2 usual que são ortogonais.

62) Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T é uma projeção ortogonal se, e somente se, $S := 2T - I_V$ preserva produto interno e satisfaz $S^2 = I_V$.

63) Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão finita. Denotemos por p_W a projeção

ortogonal de V sobre o subespaço W de V . Prove que se $p_{W_1} \circ p_{W_2} = p_{W_2} \circ p_{W_1}$ então $p_{W_1} \circ p_{W_2} = p_{W_1 \cap W_2}$.

64) Nas notações do exercício 63), conclua que se $p_{W_1} \circ p_{W_2} = 0$ então $p_{W_1} + p_{W_2} = p_{W_1 + W_2}$.

65) Ainda nas notações do exercício 63), prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $\langle p_{W_1}(v), v \rangle \leq \langle p_{W_2}(v), v \rangle, v \in V$;
- ii) $\|p_{W_1}(v)\| \leq \|p_{W_2}(v)\|, v \in V$;
- iii) $p_{W_1} \circ p_{W_2} = p_{W_2} \circ p_{W_1} = p_{W_1}$;
- iv) $W_1 \subset W_2$;
- v) $p_{W_2} - p_{W_1}$ é uma projeção ortogonal.

66) Sejam V e W espaços euclidianos, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Prove:

i) Existe uma única $T^+ \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que $T \circ T^+ \circ T = T, T^+ \circ T \circ T^+ = T^+$ e $T^+ \circ T$ e $T \circ T^+$ são autoadjuntas;

ii) $\text{Ker } T^+ = \text{Ker } T$ e $\text{Im } T^+ = \text{Im } T$;

iii) $T^* \circ T \circ T^+ = T^+ \circ T \circ T^* = T^*$;

iv) Se $v \in W, T^+(v)$ é o único elemento de V , de norma mínima, que minimiza o conjunto $\{\|T(u) - w\| : w \in W\}$;

v) $(T^+)^+ = T$ e $(T^+)^* = (T^*)^+$;

vi) Se T é inversível então $T^+ = T^{-1}$;

vii) Se $T^* \circ T$ é inversível então $T^+ = (T^* \circ T)^{-1} \circ T^*$;

ix) Se $T \circ T^*$ é inversível então $T^+ = T^* \circ (T \circ T^*)^{-1}$.

5.7 Operadores Positivos Definidos

A motivação para esta seção reside no seguinte lema.

Lema 5.7.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se a função $\phi : V^2 \rightarrow F$ dada por $\phi(u, v) = \langle T(u), v \rangle$ é um produto interno sobre V então T é autoadjunto e $\langle T(v), v \rangle > 0, v \in V \setminus \{0\}$.*

Demonstração. Como $\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)}, u, v \in V$, segue que $\langle T(u), v \rangle = \overline{\langle T(v), u \rangle}, u, v \in V$, ou seja, $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, u, v \in V$. Portanto, T é autoadjunto. A outra desigualdade é simplesmente $\phi(v, v) > 0, v \in V$. □

Definição 5.7.2 *Sejam V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que T é positivo definido quando T é autoadjunto e $\langle T(v), v \rangle > 0$, $v \in V \setminus \{0\}$.*

Observação 5.7.3 *Se na definição acima, trocarmos a última condição por $\langle T(v), v \rangle \geq 0$, $v \in V$, então dizemos que T é não-negativo definido.*

O teorema a seguir revela que todo produto interno sobre um espaço de dimensão finita é produzido por um único operador positivo.

Teorema 5.7.4 *Seja V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $\phi : V^2 \rightarrow F$ é um produto interno sobre V , então existe um único $T \in \mathcal{L}(V)$ positivo definido tal que $\phi(u, v) = \langle T(u), v \rangle$, $u, v \in V$.*

Demonstração. Fixemos $v \in V$. A função $u \in V \rightarrow \phi(u, v) \in F$ é um elemento de V^* . Pelo Teorema 5.1.9, existe um único $w = w(v) \in V$ tal que $\phi(u, v) = T_w(u) = \langle u, w \rangle$, $u \in V$. Definamos então $T \in V^V$ por $T(v) = w$, $v \in V$. Certamente $T \in \mathcal{L}(V)$. Ainda,

$$\langle u, T(v) \rangle = \phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)} = \overline{\langle v, T(u) \rangle} = \langle T(u), v \rangle, \quad u, v \in V.$$

Logo, T é autoadjunto e, devido ao lema anterior, positivo definido. Para completar a prova, suponhamos que $\phi(u, v) = \langle T'(u), v \rangle$, $u, v \in V$, para algum $T' \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto e positivo definido. Então $\langle T(u), v \rangle = \langle T'(u), v \rangle$, $u, v \in V$, isto é, $\langle (T - T')(u), v \rangle = 0$, $u, v \in V$. Segue que $T' = T$. \square

Exemplos 5.7.5 1) Consideremos o espaço \mathbb{R}^3 usual. Se B é a base usual de \mathbb{R}^3 e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ é dado por $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, então

$$T_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 5.5.5, T é autoadjunto. Além disso,

$$\langle T(x, y, z), (x, y, z) \rangle = \langle (x, 2y, 3z), (x, y, z) \rangle = x^2 + 2y^2 + 3z^2 > 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Portanto, T é positivo definido.

Se $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ é dado por $S(x, y, z) = (0, y, z)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, então

$$\langle S(x, y, z), (x, y, z) \rangle = \langle (0, y, z), (x, y, z) \rangle = y^2 + z^2 \geq 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Logo, T é não-negativo definido. Notemos que S não é positivo definido.

2) Sejam V um espaço com produto interno e $P \in \mathcal{L}(V)$ uma projeção ortogonal. Então

$$\langle P(v), v \rangle = \langle P^2(v), v \rangle = \langle P(v), P(v) \rangle = \|P(v)\|^2 \geq 0, \quad v \in V.$$

Se $\|P(v)\| = 0$ então $P(v) = 0$ e, portanto, $v \in \text{Ker } P$. Assim, P é não-negativo definido. Ainda, P é positivo definido se, e somente se, $\text{Ker } P = \{0\}$, ou seja, se, e somente se, $P = I_V$.

Teorema 5.7.6 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathcal{L}(V)$. São equivalentes:*

- i) T é não-negativo definido;*
- ii) $T = T^*$ e os autovalores de T são não-negativos;*
- iii) Existe $R \in \mathcal{L}(V)$, R não-negativo definido tal que $T = R^2$;*
- iv) Existe $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $S^* \circ S = T$.*

Demonstração. Assuma que T é não-negativo definido. Se α é um autovalor de T então $\alpha \in \mathbb{R}$, uma vez que T é autoadjunto. No entanto, se $T(v) = \alpha v$, $v \in V \setminus \{0\}$ então

$$0 \leq \langle T(v), v \rangle = \langle \alpha v, v \rangle = \alpha \langle v, v \rangle = \alpha \|v\|^2.$$

Segue que $\alpha \geq 0$. Portanto, i) implica ii).

Se ii) vale, podemos usar o Corolário 5.6.7 e o método de Gram-Schmidt para escolher uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V formada por autovetores de T . Seja $\alpha_j \in F$ um autovalor de v_j , $j = 1, \dots, n$. Como $\alpha_j \geq 0$, podemos definir $\beta_j := \alpha_j^{1/2}$. Daí, $R \in \mathcal{L}(V)$ dado por $R(v_j) = \beta_j v_j$, $j = 1, \dots, n$, tem a propriedade exigida em ii). De fato, se $u = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_n v_n$ e $v = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n$, $\delta_j, \gamma_j \in F$, $j = 1, \dots, n$, então

$$\begin{aligned} \langle R(u), v \rangle &= \langle \delta_1 R(v_1) + \dots + \delta_n R(v_n), \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n \rangle \\ &= \langle \delta_1 \beta_1 v_1 + \dots + \delta_n \beta_n v_n, \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n \rangle \\ &= \delta_1 \beta_1 \overline{\gamma_1} + \dots + \delta_n \beta_n \overline{\gamma_n} \\ &= \langle \delta_1 v_1 + \dots + \delta_n v_n, \beta_1 \gamma_1 v_1 + \dots + \beta_n \gamma_n v_n \rangle \\ &= \langle u, R(v) \rangle \end{aligned}$$

ou seja, R é autoadjunto. Similarmente,

$$\langle R(v), v \rangle = \langle \gamma_1 \beta_1 v_1 + \cdots + \gamma_n \beta_n v_n, \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n \rangle = \beta_1 |\gamma_1|^2 + \cdots + \beta_n |\gamma_n|^2 \geq 0,$$

ou seja, R é não-negativo definido. Além disso,

$$(T - R^2)(v_j) = T(v_j) - R(R(v_j)) = \alpha_j v_j - \beta_j^2 v_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

e, conseqüentemente, $T = R^2$. Assim, iii) vale. iv) segue de iii), tomando-se $S = R$. Finalmente, se iv) vale temos que $T^* = (S^* \circ S)^* = S^* \circ S^{**} = S^* \circ S = T$ e

$$\langle T(v), v \rangle = \langle (S^* \circ S)(v), v \rangle = \langle S(v), S(v) \rangle = \|S(v)\|^2 \geq 0, \quad v \in V.$$

Portanto, T é não-negativo definido. □

Observação 5.7.7 O leitor deve enunciar e provar um teorema análogo para operadores positivos definidos.

Exercícios 5.7.8 67) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $u, v \in V$. Prove que $\langle u, v \rangle > 0$ se, e somente se, existir um operador positivo definido $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T(u) = v$.

68) Sejam V um espaço com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ não-negativo definido. Prove:

i) $|\langle T(u), v \rangle|^2 \leq \langle T(u), u \rangle \langle T(v), v \rangle$, $u, v \in V$;

ii) Se $\langle T(v), v \rangle = 0$, $v \in V$, então $T = 0$.

69) Sejam V e W espaços vetoriais, de dimensão finita, com produto interno, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $w \in V$. Prove: $\min_{u \in V} \{\|T(u) - w\|\} = \|T(v) - w\|$ se, e somente se, $T^*(T(v)) = T^*(w)$.

70) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita n , com produto interno, B uma base ortonormal de V e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T é positivo definido se, e somente se, $T_B^B := (a_{jk})$ é uma matriz positiva definida no seguinte sentido: dados vetores distintos v_1, \dots, v_n de V e escalares c_1, \dots, c_n , não todos nulos, vale a desigualdade

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k a_{jk} > 0.$$

71) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $R, T, S \in \mathcal{L}(V)$.

- i) Verifique que é impossível ter-se $T - S$ e $S - T$ positivos definidos simultaneamente;
- ii) Se $R - S$ e $S - T$ são positivos definidos conclua que $R - T$ é positivo definido;
- iii) Se $R - S$ e T são positivos definidos então $T \circ R - T \circ S$ é positivo definido?
- 72) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $P \in \mathcal{L}(V)$ uma projeção ortogonal.
- i) Prove que se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, então $\alpha I_V + P$ é positiva definida;
- ii) Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é autoadjunto e satisfaz $T^2 = I_V + P$, expresse T como combinação linear de I_V e P .
- 73) Dê exemplo de operadores lineares positivos definidos cuja composição não é um operador positivo definido.
- 74) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno, $T \in \mathcal{L}(V)$ não-negativo definido e $v \in V$. Prove que $v \in \text{Ker } T$ se, e somente se, $\langle T(v), v \rangle = 0$.
- 75) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ não-negativos definidos. Prove que $T \circ S$ é não negativo definido se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$.
- 76) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Se n é um inteiro ímpar positivo, prove que existe um único $S \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto tal que $S^n = T$.
- 77) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ projeções ortogonais de V sobre W_1 e W_2 , respectivamente. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
- i) $Q - P$ é não-negativo definido;
- ii) $\|P(v)\| \leq \|Q(v)\|$, $v \in V$;
- iii) $W_1 \subset W_2$.
- 78) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $R, S, T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjuntos. Prove: se $R - S$ e T são não-negativos definidos, $T \circ R = R \circ T$ e $T \circ S = S \circ T$ então $R \circ T - S \circ T$ é não-negativo definido.
- 79) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Prove:
- i) Se T é não negativo definido e $R \in \mathcal{L}(V)$ satisfaz $R^2 = T$ então $\text{Im } T = \text{Im } R$ e $\text{Ker } T = \text{Ker } R$;
- ii) Se ambos T e S são não-negativos definidos e $T + S = 0$ então $S = T = 0$.

5.8 Operadores Normais

Nesta seção, vamos explorar uma classe mais geral de operadores sobre espaços com produto interno: vamos estudar os espaços que admitem uma base ortonormal formada por autovetores do operador.

Definição 5.8.1 *Sejam V um espaço com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que T é um operador normal quando $T \circ T^* = T^* \circ T$.*

Exemplos 5.8.2 1) Todo operador autoadjunto é normal.

2) Todo operador unitário (resp. ortogonal) é normal (Teorema 5.4.9).

3) Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ dado por $T(z) = \alpha z$, $z \in \mathbb{C}$, onde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Então

$$\langle T(z), w \rangle = \langle \alpha z, w \rangle = \langle z, \bar{\alpha} w \rangle, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Logo, $T^*(z) = \bar{\alpha} z$, $z \in \mathbb{C}$. Portanto, T não é autoadjunto. No entanto,

$$(T^* \circ T)(z) = T^*(\alpha z) = \alpha T^*(z) = \alpha \bar{\alpha} z = |\alpha|^2 z = (T \circ T^*)(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

ou seja, T é normal.

4) Se T é normal então T^* é normal.

Observação 5.8.3 Um operador normal sobre um espaço euclidiano pode não ter autovalores. De fato, seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

onde $\theta \neq k\pi$. Então,

$$T^*(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (T^* \circ T)(x, y) &= (\cos^2 \theta x - \cos \theta \text{sen } \theta y + \text{sen}^2 \theta x + \text{sen } \theta \cos \theta y, y) \\ &= (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, T é ortogonal. Logo, T é normal e (obviamente) não possui autovalores.

A seguir, apresentamos uma importante caracterização de operadores normais. Antes, porém, apresentamos um lema técnico.

Lema 5.8.4 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Valem as seguintes propriedades:*

i) Se $F = \mathbb{C}$ então $\langle T(v), v \rangle = 0, v \in V$ se, e somente se, $T = 0$;

ii) Se $F = \mathbb{R}$ e T tem adjunto, então $\langle T(v), v \rangle = 0, v \in V$ se, e somente se, T é anti-autoadjunto.

Demonstração. i) Basta notar que para $u, v \in V$ vale a igualdade:

$$4\langle T(u), v \rangle = \langle T(u+v), u+v \rangle - \langle T(u-v), u-v \rangle + i\langle T(u+iv), u+iv \rangle - i\langle T(u-iv), u-iv \rangle.$$

Logo, se $\langle T(v), v \rangle = 0, v \in V$, então $\langle T(u), v \rangle = 0, u, v \in V$. Portanto, $T = 0$.

ii) Se $T^* = -T$ então

$$\langle T(v), v \rangle = \langle v, T^*v \rangle = \langle v, -T(v) \rangle = -\langle T(v), v \rangle, \quad v \in V.$$

Segue que $\langle T(v), v \rangle = 0, v \in V$. Reciprocamente, se a última igualdade valer,

$$\begin{aligned} \langle (T + T^*)(u), v \rangle &= \langle T(u), v \rangle + \langle u, T(v) \rangle \\ &= \langle T(u), v \rangle + \langle T(v), u \rangle \\ &= \langle T(u), u \rangle + \langle T(u), v \rangle + \langle T(v), u \rangle + \langle T(v), v \rangle \\ &= \langle T(u+v), u+v \rangle = 0, \quad u, v \in V. \end{aligned}$$

Logo, $T + T^* = 0$ e T é anti-autoadjunto. □

Teorema 5.8.5 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se T tem adjunto, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) T é normal;

ii) $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle T^(u), T^*(v) \rangle, u, v \in V$;*

iii) $\|T(v)\| = \|T^(v)\|, v \in V$.*

Demonstração. Se i) vale, podemos usar o Teorema 5.4.6-iii) para obter

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, T^*(T(v)) \rangle = \langle u, T(T^*(v)) \rangle = \langle u, T^{**}T^*(v) \rangle = \langle T^*(u), T^*(v) \rangle, \quad u, v \in V.$$

Logo, ii) vale. Certamente ii) implica iii). Provemos então que iii) implica i). Definamos $S = T^* \circ T - T \circ T^*$. Então

$$\langle S(v), v \rangle = \langle T^*(T(v)), v \rangle - \langle T(T^*(v)), v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle - \langle T^*(v), T^*(v) \rangle, \quad v \in V.$$

Logo, se iii) vale, $\langle S(v), v \rangle = 0$, $v \in V$. Se $F = \mathbb{C}$, o Lema 5.8.4-i) implica que $S = 0$. Se $F = \mathbb{R}$, o Lema 5.8.4-ii) implica que S é anti-autoajunto. Entretanto, a definição de S revela que ele é autoajunto. Portanto, $S = 0$. Assim, em qualquer caso, $S = 0$, ou seja, T é normal. \square

Aqui estão algumas propriedades interessantes dos operadores normais.

Teorema 5.8.6 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Valem as seguintes propriedades:*

- i) $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$;
- ii) Se $\dim_F V < \infty$ então $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T = \text{Ker } T^* \oplus \text{Im } T^*$;
- iii) Se $\dim_F V < \infty$ então $\text{Ker } T^k = \text{Ker } T$, $k = 1, 2, \dots$

Demonstração. i) Segue do Teorema 5.8.5-iii).

ii) Segue do Teorema 5.4.7-ii), iii) e da parte i).

iii) Vamos provar que $\text{Ker } T = \text{Ker } T^2$. As outras igualdades são justificadas de maneira análoga. Obviamente, $\text{Ker } T \subset \text{Ker } T^2$. Para a outra inclusão, notemos que se $T^2(v) = 0$ então $T(v) \in \text{Ker } T \cap \text{Im } T$. Logo, $T(v) = 0$, pela primeira igualdade do item ii). \square

Observação 5.8.7 A soma direta do item ii) acima é *ortogonal* no seguinte sentido: $\langle u, v \rangle = 0$, $u \in \text{Im } T$, $v \in \text{Ker } T$.

Os três próximos resultados implicam que um operador normal sobre um espaço unitário de dimensão finita é diagonalizável.

Lema 5.8.8 *Sejam V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W_1 e W_2 subespaços de V e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Se $V = W_1 \oplus W_2$ é uma soma direta ortogonal e W_i é T -invariante, $i = 1, 2$, então W_2 é T^* -invariante e $T|_{W_2}$ é um operador normal.*

Demonstração. Se $V = W_1 \oplus W_2$ é soma ortogonal e W_1 é T -invariante, o Teorema 5.4.7-iv) garante que W_1^\perp é T^* -invariante. Logo, $W_2 = W_1^\perp$ é T^* -invariante. Por outro lado, temos que

$$\langle T|_{W_2}(w_2), v_2 \rangle = \langle T(w_2), v_2 \rangle = \langle w_2, T^*(v_2) \rangle = \langle w_2, T^*|_{W_2}(v_2) \rangle, \quad w_2, v_2 \in W_2.$$

Segue que $(T|_{W_2})^*$ existe e $(T|_{W_2})^* = T^*|_{W_2}$. Como T é normal, obviamente $T|_{W_2}$ é normal.

Se V é um espaço unitário, a hipótese de W_2 ser T -invariante não é necessária, ver Exercício 5.8.21-97. \square

Lema 5.8.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $T \in \mathcal{L}(V)$ normal, $v \in V$ e $\alpha \in F$. Então:*

- i) $T - \alpha I_V$ é normal;
- ii) $T(v) = \alpha v$ se, e somente se, $T^*(v) = \bar{\alpha}v$;
- iii) $\text{Ker}(T - \alpha I_V)$ e $(\text{Ker}(T - \alpha I_V))^\perp$ são T -invariantes.

Demonstração. i) Segue das propriedades listadas no Teorema 5.4.6 que

$$(T - \alpha I_V)^* = T^* - (\alpha I_V)^* = T^* - \bar{\alpha} I_V^* = T^* - \bar{\alpha} I_V.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (T - \alpha I_V)(T - \alpha I_V)^* &= (T - \alpha I_V)(T^* - \bar{\alpha} I_V) \\ &= TT^* - \bar{\alpha}T - \alpha T^* + \alpha \bar{\alpha} I_V \\ &= T^*T - \bar{\alpha}T - \alpha T^* + \alpha \bar{\alpha} I_V \\ &= (T^* - \bar{\alpha} I_V)(T - \alpha I_V) \\ &= (T - \alpha I_V)^*(T - \alpha I_V). \end{aligned}$$

ii) Basta usar o item i) e o Teorema 5.8.5 para ver que $\|(T - \alpha I_V)(v)\| = \|(T^* - \bar{\alpha} I_V)(v)\|$, $v \in V$.

iii) Seja $v \in \text{Ker}(T - \alpha I_V)$. Então $T(T(v)) = T(\alpha v) = \alpha T(v)$, ou seja, $(T - \alpha I_V)(T(v)) = 0$. Logo, $T(v) \in \text{Ker}(T - \alpha I_V)$. Portanto, $\text{Ker}(T - \alpha I_V)$ é T -invariante. Por outro lado, se $v \in \text{Ker}(T - \alpha I)$ então

$$(T - \alpha I_V)(T^*(v)) = T(T^*(v)) - \alpha T^*(v) = T^*(T(v)) - \alpha T^*(v) = T^*(\alpha v) - \alpha T^*(v) = 0,$$

isto é, $T^*(v) \in \text{Ker}(T - \alpha I_V)$. Portanto, $\text{Ker}(T - \alpha I_V)$ é T^* -invariante. Pelo Teorema 5.4.7, segue que $(\text{Ker}(T - \alpha I_V))^\perp$ é T -invariante. \square

Teorema 5.8.10 *Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então T é normal se, e somente se, V possui uma base ortonormal constituída de autovetores de T .*

Demonstração. A prova é por indução sobre a dimensão n do espaço. O caso $n = 1$ é trivial. Assuma então que $n \geq 2$. Como \mathbb{C} é algebricamente fechado existem $\alpha \in \mathbb{C}$ e $v \in V \setminus \{0\}$ tais que $T(v) = \alpha v$. Podemos assumir que $\|v\| = 1$. Aplicando o Lema 5.8.8 com $W_1 = [\{v\}]$, vemos que $T|_{W_1^\perp}$ é normal. Como $\dim_F W_1^\perp < \dim_F V$, a hipótese de indução implica que W_1^\perp possui uma base ortonormal composta de autovetores de $T|_{W_1^\perp}$ e, portanto, de T . A união desta base com $\{v\}$ é a base de V desejada. Reciprocamente, suponha que $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V , onde $T(v_j) = \alpha_j v_j$, $j = 1, \dots, n$. Temos, pelo Teorema 5.4.8, que $(T^*)_B^B = \overline{T_B^B}^t$. Portanto $T^*(v_j) = \overline{\alpha_j} v_j$, $j = 1, \dots, n$. Daí,

$$\begin{aligned} T(T^*(v)) &= T(\beta_1 \overline{\alpha_1} v_1 + \dots + \beta_n \overline{\alpha_n} v_n) \\ &= \beta_1 \overline{\alpha_1} T(v_1) + \dots + \beta_n \overline{\alpha_n} T(v_n) \\ &= \beta_1 \overline{\alpha_1} \alpha_1 v_1 + \dots + \beta_n \overline{\alpha_n} \alpha_n v_n \\ &= T^*(\beta_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \beta_n \alpha_n v_n) \\ &= T^*(T(v)). \end{aligned}$$

Segue que $T^* \circ T = T \circ T^*$. \square

Teorema 5.8.11 *Sejam V um espaço com produto interno e $P \in \mathcal{L}(V)$ uma projeção sobre V . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) P é normal;
- ii) P é autoadjunto;
- iii) P é projeção ortogonal.

Demonstração. Se P é normal então $\|P(v)\| = \|P^*(v)\|$, $v \in V$. Logo, $P(v) = 0$ se, e somente se, $P^*(v) = 0$. Se $v \in V$ e $w = v - P(v)$ então

$$0 = P(w) = P^*(w) = P^*(v) - P^*(P(v)).$$

Conseqüentemente, $P^* = P^*P$. Segue que, $P = P^{**} = (P^*P)^* = P^*P = P^*$, ou seja, i) implica ii). Para verificarmos que ii) implica iii), basta verificar que se P é autoadjunto então $\text{Im } P$ e $\text{Ker } P$ são ortogonais. Mas a igualdade $\langle P(u), v \rangle = \langle u, P(v) \rangle$, $u, v \in V$, revela que $v \in (\text{Im } P)^\perp$ se, e somente se, $P(v)$ é ortogonal a todos os elementos de V , isto é, se, e somente se, $v \in \text{Ker } P$. Finalmente, suponha que P seja uma projeção ortogonal. Então

$$\langle u, P(v) - P^*(P(v)) \rangle = \langle u, P(v) \rangle - \langle P(u), P(v) \rangle = \langle u - P(u), P(v) \rangle = 0, \quad u, v \in V.$$

Segue que $P = P^* \circ P$. Portanto, P é autoadjunto e, por conseguinte, normal. Assim iii) implica i). \square

Vamos concluir esta seção apresentando a decomposição espectral de um operador normal e algumas conseqüências desta. Apresentamos inicialmente alguns lemas técnicos.

Lema 5.8.12 *Sejam V um espaço vetorial, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Então $\text{Im } T \cap \text{Ker } T = \{0\}$.*

Demonstração. Seja $v \in \text{Im } T \cap \text{Ker } T$. Então $v = T(u)$, $u \in V$ e $T(v) = 0$. Como T é normal, $T^*(v) = 0$. Logo, $\langle v, v \rangle = \langle v, T(u) \rangle = \langle T^*(v), u \rangle = 0$, ou seja, $v = 0$. \square

Lema 5.8.13 *Seja V um espaço vetorial, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Se $p \in P(F)$ então $p(T)$ é normal.*

Demonstração. Exercício.

Lema 5.8.14 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Então o polinômio minimal de T não possui raízes múltiplas.*

Demonstração. Seja p o polinômio minimal de T e suponha que alguma raiz de p seja múltipla. Então $p(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 q(\lambda)$, onde α é uma tal raiz e $q \in P(F)$. Como $p(T) = 0$,

segue que $(T - \alpha I_V)^2 \circ q(T) = 0$. Notemos agora que o operador $T - \alpha I_V$ é normal. Por outro lado, se $v \in V$ temos que $(T - \alpha I_V)(q(T)(v)) \in \text{Im}(T - \alpha I_V) \cap \text{Ker}(T - \alpha I_V)$. Pelo Lema 5.8.12, $(T - \alpha I_V)(q(T)(v)) = 0$. Segue que $(T - \alpha I_V)q(T) = 0$, contradizendo a definição de polinômio minimal. \square

Teorema 5.8.15 (Decomposição espectral para operadores normais) *Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ os autovalores distintos de T e P_1, \dots, P_n as projeções ortogonais de V sobre $V(\alpha_j, T)$, $j = 1, \dots, n$. Então:*

- i) $T = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$;
- ii) $I_V = P_1 + \dots + P_n$;
- iii) $P_j \circ P_k = 0$, $j \neq k$.

Demonstração. Pelo lema anterior, o polinômio minimal de T é $p(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_n)$. Definamos então m_j e P_j , $j = 1, \dots, n$, como na prova do Teorema 4.5.7. As conclusões do teorema seguem daquela prova. Resta portanto verificar que cada P_j é ortogonal e que $\text{Im } P_j = V(\alpha_j, T)$. Se $P_j(v) = v$, então

$$T(v) = (\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n)(P_j(v)) = \alpha_j P_j(v) = \alpha_j v,$$

ou seja $v \in V(\alpha_j, T)$. Por outro lado, se $v \in V(\alpha_j, T)$ então

$$\alpha_1 P_1(v) + \dots + \alpha_n P_n(v) = T(v) = \alpha_j v = \alpha_j (P_1(v) + \dots + P_n(v)),$$

ou seja,

$$(\alpha_1 - \alpha_j)P_1(v) + \dots + (\alpha_n - \alpha_j)P_n(v) = 0.$$

Segue que $P_k(v) = 0$, $k \neq j$ e, portanto, $v = P_j(v)$, isto é, $v \in \text{Im } P_j$. Portanto, $\text{Im } P_j = V(\alpha_j, T)$, $j = 1, \dots, n$. Como cada $P_j = m_j(T)$ e T é normal, P_j é normal. Pelo Teorema 5.8.11, P_j é uma projeção ortogonal. \square

Observação 5.8.16 A decomposição de T apresentada no teorema anterior é única no seguinte sentido: se β_1, \dots, β_m são números complexos distintos e Q_1, \dots, Q_m são projeções satisfazendo as condições i), ii) e iii) do teorema, então os β_j 's são precisamente os

autovalores distintos de T (em particular $m = n$) e Q_j é a projeção ortogonal de V sobre $V(\beta_j, T)$, $j = 1, \dots, n$.

Corolário 5.8.17 *Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Então T é diagonalizável.*

Demonstração. Adotando as notações do teorema anterior, tome base ortonormal B_j de $V(\alpha_j, T)$. Então $B_1 \cup \dots \cup B_n$ é base ortonormal de V . \square

O próximo teorema caracteriza parcialmente alguns operadores normais através de seus autovalores.

Teorema 5.8.18 *Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Valem as seguintes propriedades:*

- i) T é autoadjunto se, e somente se, cada autovalor de T é real;*
- ii) T é projeção ortogonal se, e somente se, cada autovalor de T é igual a 0 ou 1;*
- iii) T é anti-autoadjunto se, e somente se, cada autovalor de T é imaginário puro;*
- iv) T é unitário se, e somente se, cada autovalor de T tem módulo 1.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.8.15, V possui uma base ortonormal $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ composta por autovetores de T . Assuma que $T(v_j) = \alpha_j v_j$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$. Se $T^* = T$, a equação $T(v_j) = T^*(v_j)$ corresponde a $\alpha_j v_j = \overline{\alpha_j} v_j$, ou seja, a $\alpha_j = \overline{\alpha_j}$. Reciprocamente, se T é normal e cada autovalor de T é real, a decomposição de T dada pelo Teorema 5.8.15 garante que $T^* = T$. Portanto, i) vale. Os demais itens são provados similarmente. \square

Aqui está uma bela aplicação da decomposição espectral de um operador normal.

Teorema 5.8.19 *Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ não-negativo definido. Então existe um único $R \in \mathcal{L}(V)$ não-negativo definido tal que $T = R^2$.*

Demonstração. A existência de um operador R como pedido, segue do Teorema 5.7.6. De qualquer maneira, uma construção alternativa é como a seguir. Observemos inicialmente que T é normal. Seja então $T = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n$ a decomposição espectral de

T . Temos que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. O operador

$$R := \sqrt{\alpha_1}P_1 + \dots + \sqrt{\alpha_n}P_n$$

é certamente normal e a expressão à direita é a decomposição espectral de R . Como $\alpha_j^{1/2} \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, segue que R é não-negativo definido. Cálculo direto revela que $R^2 = T$. Para completar a prova, suponha que existe um $S \in \mathcal{L}(V)$ não-negativo definido tal que $S \circ S = T$. Seja

$$S = \beta_1Q_1 + \dots + \beta_mQ_m$$

a decomposição espectral de S . Então $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ e

$$T = S \circ S = \beta_1^2Q_1 + \dots + \beta_m^2Q_m.$$

Pela unicidade da decomposição espectral, segue que $m = n$ e, após uma possível reordenação, $Q_j = P_j$, $\beta_j^2 = \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$. Segue que $S = R$. \square

Finalizamos este capítulo com a forma polar de um operador.

Teorema 5.8.20 (Forma Polar) *Sejam V um espaço unitário e $T \in \mathcal{L}(V)$. Valem as seguintes afirmações:*

i) Se $U, R \in \mathcal{L}(V)$, U é unitário, R é não-negativo definido e $T = U \circ R$ então $R^2 = T^ \circ T$;*

ii) Se $R \in \mathcal{L}(V)$ é autoadjunto e satisfaz $R^2 = T^ \circ T$ então $\|T(v)\| = \|R(v)\|$, $v \in V$;*

iii) Se $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, existem $U, R \in \mathcal{L}(V)$, U unitário e R não-negativo definido tais que $U \circ R = T$;

iv) Se T é inversível então a decomposição em iii) é única.

Demonstração. i) Já sabemos que U e R têm adjunta. Como $T = U \circ R$, temos que $T^* = R^* \circ U^* = R \circ U^*$. Daí,

$$T^* \circ T = (R \circ U^*) \circ (U \circ R) = R \circ I_V \circ R = R^2.$$

ii) Temos que

$$\|R(v)\|^2 = \langle R(v), R(v) \rangle = \langle R^2(v), v \rangle = \langle (T^* \circ T)(v), v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2, \quad v \in V.$$

Logo, ii) segue.

iii) Como $T^* \circ T$ é não-negativo definido, seja $R \in \mathcal{L}(V)$ satisfazendo $R^2 = T^* \circ T$. Definiremos U através da decomposição $V = \text{Im } R \oplus (\text{Im } R)^\perp$. Precisamente, escreveremos

$$U(R(v) + u) := U_1(R(v)) + U_2(u), \quad v \in V, \quad u \in (\text{Im } R)^\perp,$$

onde U_1 e U_2 são construídos a seguir. Defina $U_1 \in \mathcal{L}(\text{Im } R, \text{Im } T)$ por $U_1(R(v)) = T(v)$, $v \in V$. Então U_1 está bem definida pois se $R(v_1) = R(v_2)$ então, por ii),

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|^2 = \|T(v_1 - v_2)\|^2 = \|R(v_1 - v_2)\|^2 = \|R(v_1) - R(v_2)\|^2 = 0,$$

ou seja, $T(v_1) = T(v_2)$. U_1 é um isomorfismo pois, se $U_1(R(v)) = T(v) = 0$ então, por ii) novamente, $R(v) = 0$. Isto equivale a dizer que $\text{Ker } U_1 = \{0\}$. Claramente U_1 é sobrejetora. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle U_1(R(v)), U_1(R(w)) \rangle &= \langle T(v), T(w) \rangle = \langle T^*(T(v)), w \rangle \\ &= \langle R^2(v), w \rangle = \langle R(v), R^*(w) \rangle \\ &= \langle R(v), R(w) \rangle, \quad v, w \in V, \end{aligned}$$

ou seja, U_1 preserva produto interno. Assim, U_1 é unitário. Notemos agora que $\dim_F(\text{Im } R)^\perp = \dim_F(\text{Im } T)^\perp$. Com isso, é possível tomar $U_2 \in \mathcal{L}((\text{Im } R)^\perp, (\text{Im } T)^\perp)$ unitária. Sendo U obviamente linear, vamos agora verificar que U é unitária. Como $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, basta verificar que U preserva produto interno. Sejam $v_1, v_2 \in V$, $v_j = R(v_j) + u_j$, $u_j \in (\text{Im } R)^\perp$, $j = 1, 2$. Então

$$\begin{aligned} \langle U(v_1), U(v_2) \rangle &= \langle U_1(R(v_1)) + U_2(u_1), U_1(R(v_2)) + U_2(u_2) \rangle \\ &= \langle T(v_1) + U_2(u_1), T(v_2) + U_2(u_2) \rangle \\ &= \langle T(v_1), T(v_2) \rangle + \langle U_2(u_1), U_2(u_2) \rangle \\ &= \langle U_1(R(v_1)), U_1(R(v_2)) \rangle + \langle U_2(u_1), U_2(u_2) \rangle \\ &= \langle R(v_1), R(v_2) \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle \\ &= \langle R(v_1) + u_1, R(v_2) + u_2 \rangle \\ &= \langle v_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, U é unitária. Finalmente, $U(R(v)) = U(R(v) + 0) = U_1(R(v)) + U_2(0) = T(v)$, $v \in V$.

iv) Se T é inversível e $T = U \circ R = U' \circ R'$, com U e U' unitárias e R e R' não-negativas definidas, então $R \circ U^* = (U \circ R)^* = (U' \circ R')^* = R' \circ U'^*$ e, conseqüentemente,

$$R^2 = R \circ (U^* \circ U) \circ R = (R' \circ U'^*) \circ (U' \circ R') = R' \circ (U'^* \circ U') \circ R' = R'^2.$$

Daí, $R = R'$. Como $R = U^{-1} \circ T$, segue que R é inversível. Assim, $U = U \circ (R \circ R^{-1}) = T \circ R^{-1} = U'$. \square

Exercícios 5.8.21 80) Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão 2 e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se B é uma base de V , determine condições sobre as entradas de T_B^B de modo que T seja normal.

81) Seja V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que T é normal se, e somente se, a seguinte condição vale: Se $W \leq V$ e $T(W) \subset W$ então $T(W^\perp) \subset W^\perp$.

82) Seja V um espaço unitário. Para $u, v \in V$ defina $T_{u,v} \in \mathcal{L}(V)$ da seguinte forma:

$T_{u,v}(w) = \langle w, v \rangle u$, $w \in V$. Prove:

i) $T_{u,v} \circ T_{v,w} = \|v\|^2 T_{u,w}$, $u, v, w \in V$;

ii) $T_{u,v}$ tem adjunta e $T_{u,v}^* = T_{v,u}$;

iii) Se $u \neq 0 \neq v$, $T_{u,v}$ é normal se, e somente se, $\{u, v\}$ é l.d.;

iv) Se $u \neq 0 \neq v$, $T_{u,v}$ é autoadjunto se, e somente se, $u = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

83) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Prove que $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$.

84) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Assuma que T é projeção e normal. Prove:

i) T^* é projeção;

ii) $\text{Im } T = \text{Im } T^*$;

iii) T é uma projeção ortogonal.

85) Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Prove:

i) Se T e S são normais então $\text{traço}(S \circ T) = \text{traço}(T \circ S)$;

ii) T é normal se, e somente se, $\text{traço}(T^2 \circ (T^*)^2 - (T \circ T^*)^2) = 0$.

86) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T é normal se, e somente se, $T^* = p(T)$, para algum $p \in P(\mathbb{C})$.

87) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Prove que se $S \in \mathcal{L}(V)$ satisfaz $S \circ T = T \circ S$ então $S \circ T^* = T^* \circ S$.

88) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ normais. Se $T \circ S = S \circ T$ então $T + S$ e $T \circ S$ são normais.

89) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T é normal se, e somente se, $T = T_1 + iT_2$ onde T_1 e T_2 são autoadjuntos e $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

90) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ normais. Assuma que $S \circ T = T \circ S$. Prove que:

i) Existe $R \in \mathcal{L}(V)$ normal tal que $T = p(R)$, $S = q(R)$, $p, q \in P(\mathbb{C})$;

ii) Se $R_1 \in \mathcal{L}(V)$, $R_1 \circ T = T \circ R_1$ e $R_1 \circ S = S \circ R_1$ então $R \circ R_1 = R_1 \circ R$.

91) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ normais. Se $S \circ T = T \circ S$ então existe uma base ortonormal B de V tal que T_B^B e S_B^B são diagonais.

92) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que T é diagonalizável se, e somente se, existe $S \in \mathcal{L}(V)$ inversível tal que $S^{-1} \circ T \circ S$ é normal.

93) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita, com produto interno e $T, S \in \mathcal{L}(V)$ normais. Prove: existe um isomorfismo $R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = R^{-1} \circ S \circ R$ se, e somente se, T e S possuem o mesmo polinômio característico.

94) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que T é uma *isometria parcial* quando $T^* \circ T$ é uma projeção ortogonal. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) T é uma isometria parcial;

ii) T^* é uma isometria parcial;

iii) $T \circ T^* \circ T = T$;

iv) $\|T(v)\| = \|v\|$, $v \in (\text{Ker } T)^\perp$;

v) $\|T^*(v)\| = \|v\|$, $v \in (\text{Ker } T^*)^\perp$.

95) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras. Justifique.

i) Todo operador unitário é uma isometria parcial;

ii) Toda isometria parcial é um operador unitário;

iii) Toda projeção ortogonal é uma isometria parcial;

iv) Toda isometria parcial é uma projeção ortogonal;

v) Todo operador normal sobre um espaço unitário é um operador unitário;

vi) Todo operador normal sobre um espaço unitário é um operador unitário;

vii) Todo operador normal que é uma projeção é autoadjunto;

viii) Todo operador normal nilpotente é nulo;

ix) Todo operador normal T satisfazendo $T^2 = T^3$ é uma projeção.

96) Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita, com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que se T é normal e uma isometria parcial então todo autovalor não nulo de T é unitário.

97) Sejam V um espaço unitário, de dimensão finita, e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que as afirmações abaixo são equivalentes:

i) T é normal;

ii) Se W é T -invariante então W é T^* -invariante;

iii) Se W é T -invariante então W^\perp é T -invariante;

iv) Se W é T^* -invariante então W é T -invariante;

v) Se W é T^* -invariante então W^\perp é T^* -invariante.

98) Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove as seguintes afirmações:

i) Se T é anti-autoadjunto então existe uma base ortonormal B de V tal que T_B^B é diagonal em blocos, onde os elementos da diagonal principal são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_k \\ \alpha_k & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0$$

onde $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \dots, k$, e $2k = \rho(T)$;

ii) Se T é ortogonal então existe uma base ortonormal B de V tal que T_B^B é diagonal em blocos, onde os elementos da diagonal principal são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\operatorname{sen} \alpha_1 \\ \operatorname{sen} \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos \alpha_k & -\operatorname{sen} \alpha_k \\ \operatorname{sen} \alpha_k & \cos \alpha_k \end{pmatrix}, \pm 1, \dots, \pm 1$$

onde $\pi^{-1}\alpha_j \notin \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$.

Capítulo 6

Formas Bilineares

6.1 Definições e Exemplos

Vamos neste capítulo final estender o conceito de produto interno.

Definição 6.1.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre F . Uma função bilinear sobre $V \times W$ é uma função $f : V \times W \rightarrow F$ satisfazendo:*

$$i) f(\alpha v_1 + v_2, w) = \alpha f(v_1, w) + f(v_2, w), \quad \alpha \in F, \quad v_1, v_2 \in V, \quad w \in W;$$

$$ii) f(v, \beta w_1 + w_2) = \beta f(v, w_1) + f(v, w_2), \quad \beta \in F, \quad v \in V, \quad w_1, w_2 \in W.$$

Quando $V = W$, dizemos que F é uma forma bilinear sobre V .

O conjunto $\mathcal{B}(V, W)$ das funções bilineares sobre $V \times W$, munido das operações de soma e produto usuais é um espaço vetorial sobre F .

Exemplos 6.1.2 1) Se V é um espaço euclidiano com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ então $f(u, v) = \langle u, v \rangle$, $u, v \in V$, define um elemento de $\mathcal{B}(V, V)$.

2) Sejam $V = M_{m \times n}(F)$ e fixemos $A \in M_{m \times m}(F)$. Então a expressão

$$f_A(X, Y) = \text{traço}(X^t A Y), \quad X, Y \in V,$$

define um elemento $f_A \in \mathcal{B}(V, V)$. De fato,

$$\begin{aligned} f_A(\alpha X + Z, Y) &= \text{traço}((\alpha X + Z)^t A Y) \\ &= \text{traço}((\alpha X^t + Z^t) A Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{traço}(\alpha X^t AY + Z^t AY) \\
&= \alpha \text{traço}(X^t AY) + \text{traço}(Z^t AY) \\
&= \alpha f_A(X, Y) + f_A(Z, Y), \quad \alpha \in F, \quad X, Y, Z \in V.
\end{aligned}$$

Analogamente, $f_A(X, \beta Y + Z) = \beta f_A(X, Y) + f_A(X, Z)$, $\beta \in F$, $X, Y, Z \in V$.

3) Sejam V o subespaço de $\mathbb{C}^{[0,1]}$ formado pelas funções que são contínuas e $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. A função ϕ dada por

$$\phi(f, g) = \int \int_{I^2} f(s)K(s, t)g(t)dsdt, \quad f, g \in V$$

é um elemento de $\mathcal{B}(V, V)$.

4) Sejam F um corpo e $V = F^2$. Se $f \in \mathcal{B}(V, V)$ então

$$\begin{aligned}
f((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) &= f(\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1), \beta_1(1, 0) + \beta_2(0, 1)) \\
&= \alpha_1\beta_1 f((1, 0), (1, 0)) + \alpha_1\beta_2 f((1, 0), (0, 1)) \\
&\quad + \beta_1\alpha_2 f((0, 1), (1, 0)) + \alpha_2\beta_2 f((0, 1), (0, 1)), \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F.
\end{aligned}$$

Logo, f é determinada pelos escalares

$$a_{11} = f((1, 0), (1, 0)), \quad a_{12} = f((1, 0), (0, 1)), \quad a_{21} = f((0, 1), (1, 0)), \quad a_{22} = f((0, 1), (0, 1)).$$

Precisamente,

$$\begin{aligned}
f((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) &= a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_1\beta_2 + a_{21}\alpha_2\beta_1 + a_{22}\alpha_2\beta_2 \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F.
\end{aligned}$$

A idéia contida no exemplo anterior é estendida a seguir.

Sejam V e W espaço vetoriais sobre F , de dimensão finita, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W e $f \in \mathcal{B}(V, W)$. Se $v \in V$, $w \in W$, $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ e $w = \sum_{k=1}^m \beta_k w_k$, temos que

$$f(u, v) = f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^m \beta_k w_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_j \beta_k f(v_j, w_k).$$

Se $A = (a_{jk}) := (f(v_j, w_k))$, obtemos

$$f(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{jk} \alpha_j \beta_k = X^t AY$$

onde $X = (\alpha_k)_{m \times 1}$ e $Y = (\beta_j)_{n \times 1}$.

Definição 6.1.3 A matriz A explicitada na construção acima é denominada a matriz de f em relação às bases B e C .

Observação 6.1.4 Quando $V = W$, é muito comum usar-se $C = B$ na definição anterior. Neste caso, a matriz é simplesmente denominada *matriz de f em relação à base B* .

As seguintes propriedades são de fácil verificação.

Teorema 6.1.5 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , de dimensões finitas, B_1 e B_2 bases de V , C_1 e C_2 bases de W e $f \in \mathcal{B}(V, W)$. Seja A_j a matriz de f em relação às bases B_j e C_j , $j = 1, 2$. Então $A_2 = (M_{B_1}^{B_2})^t A_1 M_{C_1}^{C_2}$.*

Observação 6.1.6 Se $V = W$, $B_1 = C_1$ e $B_2 = C_2$, a igualdade matricial do teorema anterior torna-se $A_2 = (M_{B_1}^{B_2})^t A_1 M_{B_1}^{B_2}$, ou seja, A_1 e A_2 são congruentes.

Teorema 6.1.7 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre F , de dimensões m e n , respectivamente, e B e C bases de V e W , respectivamente. A função que associa a cada elemento de $\mathcal{B}(V, W)$ sua matriz em relação às bases B e C é um isomorfismo entre $\mathcal{B}(V, W)$ e $M_{m \times n}(F)$.*

A seguir, descrevemos alguns tipos especiais de formas bilineares.

Definição 6.1.8 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$. Então f é dita ser*

- i) simétrica quando $f(u, v) = f(v, u)$, $u, v \in V$;*
- ii) anti-simétrica quando $f(u, v) = -f(v, u)$, $u, v \in V$;*
- iii) alternada quando $f(v, v) = 0$, $v \in V$.*

Exemplos 6.1.9 1) No exemplo 6.1.2-1), f é simétrica.

2) Sejam F um corpo, $A = (a_{jk}) \in M_{n \times n}(F)$ e $f \in \mathcal{B}(F^n, F^n)$ dada por

$$f((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^t (a_{jk}) (\beta_1 \dots \beta_n), \quad \alpha_j, \beta_j \in F, \quad j = 1, \dots, n.$$

Então f é simétrica se, e somente se, $A^t = A$, anti-simétrica se, e somente se, $A^t = -A$ e alternada se, e somente se, $A^t = -A$ e $a_{jj} = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Observação 6.1.10 1) A matriz de uma forma bilinear simétrica em relação a qualquer base do espaço é simétrica.

2) Se F tem característica $\neq 2$, V é um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ é simétrica e anti-simétrica então $f = 0$.

Teorema 6.1.11 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$.*

i) Se f é alternada então f é anti-simétrica;

ii) Se F tem característica $\neq 2$ e f é anti-simétrica então f é alternada;

iii) Se F tem característica $\neq 2$ então f decompõe-se de maneira única como a soma de uma forma bilinear simétrica com outra anti-simétrica.

Demonstração. i) Segue da identidade

$$f(u, v) + f(v, u) = f(u + v, u + v) - f(u, u) - f(v, v), \quad u, v \in V.$$

ii) Se f é anti-simétrica então $f(u, u) = -f(u, u)$, $u \in V$, ou seja, $2f(u, u) = 0$, $u \in V$.

Daí, se F não tem característica igual a 2, $f(u, u) = 0$, $u \in V$.

iii) Se a característica de F não é 2, vale a fórmula

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(f(u, v) + f(v, u)) + \frac{1}{2}(f(u, v) - f(v, u)), \quad u, v \in V.$$

A conclusão segue. A unicidade fica como exercício para o leitor. □

Observação 6.1.12 Nas condições do teorema acima, $\mathcal{B}(V, V)$ é soma direta do subespaço formado pelas formas bilineares simétricas com o subespaço formado pelas formas bilineares anti-simétricas.

Exercícios 6.1.13 1) Sejam V um espaço vetorial, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\{T_1, \dots, T_n\}$ base de V^* . Se $f_{jk}(v, w) = T_j(v)T_k(w)$, $v, w \in V$, $j, k = 1, \dots, n$, comprove que o conjunto $\{f_{jk} : j, k = 1, \dots, n\}$ é uma base de $\mathcal{B}(V, V)$.

2) Descreva todas as formas bilineares simétricas (anti-simétricas) sobre \mathbb{R}^3 .

3) No espaço $V = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ defina $f(A, B) = n \text{ traço}(AB) - (\text{traço } A)(\text{traço } B)$, $A, B \in V$.

i) Prove que $f \in \mathcal{B}(V, V)$;

ii) Decida se f é simétrica.

4) Comprove que $f \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ dada por $f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{Z}_2$ é anti-simétrica, mas não é alternada.

5) Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} . Assuma que a função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é linear sobre \mathbb{R} na primeira variável, linear na segunda e satisfaz $f(u, v) - f(v, u) \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$. Prove que $2if = f_1 + f_2$ onde, f_1 é linear na primeira variável e linear conjugada na segunda variável e f_2 é uma forma bilinear simétrica sobre V . Comprove que f_1 e f_2 são determinadas de maneira única por estas condições.

6.2 Ortogonalidade

A noção de ortogonalidade vista anteriormente pode ser estendida da seguinte forma.

Definição 6.2.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$. Dois vetores $u, v \in V$ são ortogonais (em relação a f) quando $f(u, v) = f(v, u) = 0$. Dois subconjuntos A e B de V são ortogonais (em relação a f) quando $f(u, v) = 0$, $u \in A$, $v \in B$.*

A relação entre ortogonalidade e os conceitos anteriores é descrita no teorema abaixo. Dentre outras coisas, o teorema revela que o conceito de ortogonalidade é mais apropriado quando a forma bilinear é simétrica ou anti-simétrica.

Teorema 6.2.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$. São equivalentes:*

- i) Se $u, v \in V$ e $f(u, v) = 0$ então $f(v, u) = 0$;*
- ii) f é simétrica ou alternada;*
- iii) f é simétrica ou anti-simétrica.*

Demonstração. Suponha inicialmente que f não é simétrica nem alternada. Então podemos encontrar $u, v, w \in V$ satisfazendo $f(u, v) \neq f(v, u)$ e $f(w, w) \neq 0$. Existem dois casos a considerar:

Caso 1: $w = u$ ou $w = v$. Sem perda de generalidade assumimos que $w = u$. Então, definindo $u_1 = f(v, u)u - f(u, u)v$ temos que $f(u_1, u) = f(u, u)f(v, u) - f(u, u)f(v, u) = 0$.

Mas, $f(u, u_1) = f(u, u)f(v, u) - f(u, u)f(u, v) \neq 0$. Neste caso, a condição i) não vale.

Caso 2: $w \neq u$ e $w \neq v$. Aqui, podemos supor, adicionalmente, que $f(u, u) = f(v, v) = 0$, $f(u, w) = f(w, u)$ e $f(v, w) = f(w, v)$. De fato, senão aplicamos diretamente o caso

anterior. Se $f(u, w) = f(v, w) = 0$, definimos $v_1 = f(w, w)u - f(u, v)w$ e $w_1 = v + w$. Então $f(v_1, w_1) = f(w, w)f(u, v) - f(w, w)f(u, v) = 0$ e $f(w_1, v_1) = f(w, w)f(v, u) - f(w, w)f(u, v) \neq 0$, e, novamente, a condição i) não vale. Se $f(u, w) \neq 0$ ou $f(v, w) \neq 0$, então existem $\alpha, \beta \in F$ tais que $\alpha f(u, w) + \beta f(v, w) \neq 0$. Definimos então $v_2 = \alpha u + \beta v + \gamma w$ e $w_2 = -f(w, v)u + \beta f(w, u)v + w$, onde $\gamma \in F$ é escolhido de modo que $f(v_2, w_2) = 0$. Daí, notando que $f(v_2, w_2) - f(w_2, v_2) = (f(u, v) - f(v, u))(\alpha f(u, w) + \beta f(v, w)) \neq 0$, segue que $f(w_2, v_2) \neq 0$. Mais uma vez, i) não vale. Assim, concluímos que i) implica ii). O teorema anterior revela que ii) implica iii), enquanto que a implicação restante é imediata. \square

A seguir, estendemos a noção de complemento ortogonal.

Definição 6.2.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , W um subespaço de V e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica. Então, o ortogonal de W em relação a f é*

$$W^\perp := \{v \in V : f(v, w) = 0, w \in W\} = \{v \in V : f(w, v) = 0, w \in W\}.$$

W é isotrópico se $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ e é totalmente isotrópico se $W \subset W^\perp$. f é não degenerada se $V^\perp = \{0\}$ e degenerada, caso contrário. O posto de f é a codimensão de V^\perp .

Observação 6.2.4 Nas notações acima, W é isotrópico se, e somente se, $f|_{W \times W}$ é degenerada. Ainda, W é totalmente isotrópico se, e somente se, $f|_{W \times W} = 0$.

Exemplos 6.2.5 1) Seja V um espaço euclidiano e seja f seu produto escalar. Qualquer subespaço não trivial de V não é isotrópico.

2) Seja F um corpo e consideremos $f \in \mathcal{B}(V, V)$ cuja matriz em relação à base canônica é A . Então f é não degenerada se, e somente se, A é inversível. De fato, se denotarmos a base canônica de F^n por $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ então as entradas de A são dadas por

$$a_{jk} = v_j^t A v_k = f(v_j, v_k), \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Portanto, A é não inversível se, e somente se, existem escalares $\alpha_j, j = 1, \dots, n$, não todos nulos, tais que o vetor $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ satisfaz $f(v_j, v) = 0, j = 1, \dots, n$. Isto equivale a dizer que $v \in V^\perp$.

3) Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica. A aplicação \bar{f} dada por

$$\bar{f}(v + V^\perp, w + V^\perp) = f(v, w), \quad v, w \in V$$

define um elemento de $\mathcal{B}(V/V^\perp, V/V^\perp)$. Se f é simétrica (resp. anti-simétrica), assim é \bar{f} .

4) Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica. Seja W satisfazendo $V = W \oplus V^\perp$. Então $\bar{f}|_{W \times W}$ é não degenerada. Em particular, W é não isotrópico.

Aqui estão algumas propriedades do ortogonal de um subespaço em relação a uma forma bilinear.

Teorema 6.2.6 *Sejam V um espaço vetorial e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica.*

Valem as seguintes propriedades:

i) Se $U, W \leq V$ então $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$;

ii) Se $U \subset W \leq V$ então $W^\perp \subset U^\perp$;

iii) Se $U \leq V$ então $U \subset U^{\perp\perp}$;

iv) Se $U \leq V$ então $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$;

v) Se $V = V^\perp \oplus W$, para algum subespaço W de V então W não é isotrópico;

vi) Se $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ é uma soma direta formada por subespaços dois a dois ortogonais, então $V^\perp = W_1^\perp \oplus \dots \oplus W_n^\perp$, onde W_j^\perp é em relação a $f_j = f|_{W_j \times W_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Provaremos somente o item v). Os demais são análogos a outros que fizemos no capítulo anterior. Se $w_0 \in W \cap W^\perp$ então $f(w_0, w) = 0$, $w \in W$. Daí, se $v \in V$ então $v = v^\perp + w$, $v^\perp \in V^\perp$, $w \in W$ e

$$f(w_0, v) = f(w_0, v^\perp) + f(w_0, w) = 0 + 0 = 0,$$

ou seja, $w_0 \in V^\perp$. Assim, $w_0 \in V^\perp \cap W = \{0\}$. □

Teorema 6.2.7 *Sejam V um espaço vetorial, de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica e não-degenerada. Valem as seguintes propriedades:*

- i) A aplicação $v \in V \rightarrow f(\cdot, v) \in V^*$ é um isomorfismo;
 ii) Se $W \leq V$ então $W^{\perp\perp} = W$;
 iii) Se $W_1 \subset W_2 \leq V$ e $W_1 \neq W_2$ então $W_1^\perp \neq W_2^\perp$.

Demonstração. i) Basta observar que a aplicação é linear e injetora. Portanto, é um isomorfismo.

ii) Já sabemos que $W \subset W^{\perp\perp}$ pelo Teorema 6.2.6. Se $W \neq W^{\perp\perp}$ então existe $T \in V^*$ tal que $T|_W = 0$ e $T|_{W^{\perp\perp}} \neq 0$. Daí, por i), $T = f(\cdot, v)$, para algum $v \in V$. Portanto, $v \in W^\perp$ mas, $v \notin W^{\perp\perp}$, contradizendo a propriedade iv) do Teorema 6.2.6.

iii) Se $W_1 \subset W_2$ então $W_2^\perp \subset W_1^\perp$. Se $W_2^\perp = W_1^\perp$, o ítem ii) garante que $W_1 = W_1^{\perp\perp} = W_2^{\perp\perp} = W_2$, contradizendo a hipótese. Logo, $W_1^\perp \neq W_2^\perp$. \square

Exercícios 6.2.8 6) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica. Se W_1, \dots, W_n são subespaços totalmente isotrópicos de V e para $j \neq k$ temos $W_j \subset W_k$ ou $W_k \subset W_j$, prove que W_j e W_k são ortogonais quando $j \neq k$ e $W_1 + \dots + W_n$ é totalmente isotrópico.

7) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica. Prove que cada subespaço totalmente isotrópico de V está contido em algum subespaço totalmente isotrópico maximal.

8) Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$. Considere os seguintes conjuntos: $V_+^\perp = \{v \in V : f(v, w) = 0, w \in V\}$ e $V_-^\perp = \{v \in V : f(w, v) = 0, w \in V\}$. Prove que se $\dim_F V < \infty$ então $V_-^\perp = V_+^\perp = V^\perp$. Quais implicações este exercício traz para a definição 6.2.3?

9) Sejam F um corpo e considere o subespaço V de F^∞ formado pelas sequências que possuem somente um número finito de termos não nulos. Se $f \in \mathcal{B}(V, V)$ é dada por

$$f((\alpha_1, \alpha_2, \dots), (\beta_1, \beta_2, \dots)) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta_{j+1}, \quad \alpha_j, \beta_j \in F, \quad j = 1, 2, \dots$$

prove que $V_-^\perp \neq V_+^\perp$.

10) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$. Prove que f tem posto r se, e somente se, existem $\{T_1, \dots, T_r\}, \{S_1, \dots, S_r\} \subset V^*$, ambos l.i, tais que

$$f(u, v) = T_1(u)S_1(v) + \dots + T_r(u)S_r(v), \quad u, v \in V.$$

11) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita, $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica e não-degenerada e $\alpha \in F$. Assuma que existe $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $f(v, v) = 0$. Prove que existe $w \in V$ tal que $f(w, w) = \alpha$.

12) Considere o espaço e a forma bilinear do exercício 3).

i) Prove que f é degenerada;

ii) Se $W = \{A \in V : \text{traço } A = 0\}$, provar que $f|_{W \times W}$ é não degenerada;

iii) Se $U = \{A \in V : \text{traço } A = 0 \text{ e } \bar{A}^t = -A\}$, prove que $f(A, A) < 0$, $A \in U \setminus \{0\}$;

iv) Calcule o posto de f .

13) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$. Assuma que V possui um subespaço W tal que $f|_{W \times W}$ é não degenerada. Prove que o posto de f é $\geq \dim_F W$.

14) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , de dimensão finita, $f \in \mathcal{B}(V, V)$, $S = \{f \in \mathcal{B}(V, V) : f \text{ é simétrica}\}$ e $A = \{f \in \mathcal{B}(V, V) : f \text{ é anti-simétrica}\}$. Mostre que S e A são subespaços de $\mathcal{B}(V, V)$ e determine suas dimensões.

15) Determine uma base para o espaço das formas bilineares anti-simétricas sobre \mathbb{R}^4 .

16) Sejam $f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ satisfazendo: f simétrica, g é anti-simétrica e $f + g = 0$. Prove que $f = g = 0$.

17) Sejam F um corpo de característica $\neq 2$ e V um espaço vetorial sobre F , de dimensão n . Prove:

i) O operador dado pela expressão $2P(f)(u, v) = f(u, v) - f(v, u)$, $u, v \in V$, $f \in \mathcal{B}(V, V)$ é uma projeção de $\mathcal{B}(V, V)$;

ii) O posto de P é $n(n - 1)/2$;

iii) Se $T \in \mathcal{L}(V)$, a expressão $R_T(f)(u, v) = f(T(u), T(v))$, $u, v \in V$, $f \in \mathcal{B}(V, V)$, define um operador linear sobre $\mathcal{B}(V, V)$;

iv) Se $T \in \mathcal{L}(V)$, $P \circ R_T = R_T \circ P$.

18) Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $T_1, T_2 \in V^*$. Prove que a expressão $f(u, v) = T_1(u)T_2(v) - T_1(v)T_2(u)$, $u, v \in V$, define um forma bilinear anti-simétrica sobre V . Prove ainda que $f = 0$ se, e somente se, $\{T_1, T_2\}$ é l.d.

19) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ anti-simétrica. Prove que f tem posto 2 se, e somente se, existe um subconjunto l.i. $\{T_1, T_2\}$ de V^* tal que $f(u, v) = T_1(u)T_2(v) - T_1(v)T_2(u)$, $u, v \in V$.

6.3 Diagonalização de Formas Bilineares

Nesta seção, estudamos representações matriciais para alguns tipos especiais de formas bilineares sobre espaços de dimensão finita. Começamos com o seguinte resultado técnico.

Teorema 6.3.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre F e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica ou anti-simétrica.*

i) Se W é um subespaço de V , de dimensão finita e não-isotrópico então $V = W \oplus W^\perp$;

ii) Se $v_1, \dots, v_n \in V$ e a matriz $(f(v_j, v_k))$ é inversível então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.i. e $W = [\{v_1, \dots, v_n\}]$ satisfaz $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. i) Como W não é isotrópico, $W \cap W^\perp = \{0\}$. Seja $v \in V$. Como a função $w \in W \rightarrow f(w, v) \in F$ é um elemento de W^* e $f|_{W \times W}$ é não degenerada, o Teorema 6.2.7 garante a existência de $w_0 \in W$ tal que $f(w, v) = f(w, w_0)$, $w \in W$. Daí, $v - w_0 \in W^\perp$, ou seja, $v = (v - w_0) + w_0 \in W^\perp + W$. Isto mostra que $V = W + W^\perp$ e o resto segue.

ii) Exercício. □

Teorema 6.3.2 *Sejam V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ alternada. Valem as seguintes propriedades:*

i) Existe uma base B de V tal que a matriz de f em relação a B é diagonal em blocos, onde os elementos da diagonal são, respectivamente,

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right), 0, \dots, 0;$$

ii) Na representação do item i), o número r de blocos de ordem 2 e o número s de zeros dependem exclusivamente de f : $s = \dim_F V^\perp$ e $r = (\dim_F V - s)/2 = (\text{posto de } f)/2$.

Demonstração. i) Podemos assumir que $f \neq 0$. Existem então $v_1, v_2 \in V$ tais que $f(v_1, v_2) \neq 0$. Como f é alternada, $\{v_1, v_2\}$ é l.i. Trocando v_2 por algum múltiplo apropriado, podemos supor que $f(v_1, v_2) = 1 = -f(v_2, v_1)$. Daí, se $W = [\{v_1\}] \oplus [\{v_2\}]$, a

matriz de $f|_{W \times W}$ em relação a alguma base apropriada tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em particular, W é não isotrópico. Pelo teorema anterior, $V = W \oplus W^\perp$. Repetindo o processo para W^\perp , e assim sucessivamente, o resultado segue após um número finito de passos.

ii) Se existirem exatamente r blocos 2×2 do tipo descrito acima na diagonal da matriz representando f , tal representação corresponde a uma decomposição de V na forma $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r \oplus W_0$, onde $f|_{W_j \times W_j}$, $j = 1, \dots, r$, é não degenerada e $f|_{W_0 \times W_0} = 0$. Isto implica que $V^\perp = W_0$, $s = \dim_F W_0 = \dim_F V^\perp$ e, conseqüentemente, $\dim_F V - s = 2r$. \square

Observação 6.3.3 O leitor deve observar que duas formas bilineares alternadas que possuem uma mesma representação matricial (em relação a bases diferentes do espaço) possuem o mesmo posto. Reciprocamente, se duas formas alternadas possuem o mesmo posto, então existem bases do espaço tais que as representações matriciais das formas em relação a estas bases são iguais.

No restante desta seção, vamos buscar representações matriciais para formas bilineares simétricas.

Teorema 6.3.4 *Sejam F um corpo de característica $\neq 2$, V um espaço vetorial sobre F , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica. Então existe uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que a matriz de f em relação a ela é diagonal, onde os elementos da diagonal principal são, respectivamente, $\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0$, onde $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \dots, r$. O número r é precisamente $\dim_F V - \dim_F V^\perp$.*

Demonstração. A prova é feita por indução sobre $n = \dim_F V$. Se $n = 1$, nada a demonstrar. Suponha que $n \geq 2$. Se $f(v, v) = 0$, $v \in V$, então

$$2f(v, w) = f(v + w, v + w) - f(v, v) - f(w, w) = 0, \quad v, w \in V,$$

ou seja, f é identicamente nula. Logo, podemos assumir que $f(v_1, v_1) \neq 0$, para algum $v_1 \in V$. Então $\{v_1\}$ é um subespaço não isotrópico e, conseqüentemente, $V = \{v_1\} \oplus \{v_1\}^\perp$

pelo Teorema 6.3.1. Aplicando a hipótese de indução a $f|_{\{v_1\} \times \{v_1\}}$, encontramos uma base $\{v_2, \dots, v_n\}$ de $\{v_1\}^\perp$ que possui a propriedade desejada. A base $\{v_1, \dots, v_n\}$ é a base de V procurada. \square

Corolário 6.3.5 *Se no teorema anterior, ainda tivermos que F é algebricamente fechado, existe uma base de V tal que a representação de f em relação a ela é da forma*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde r é precisamente o posto de f .

Demonstração. Escolha uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ como no teorema anterior. Como F é algebricamente fechado, existem escalares $\alpha_j \in F \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots, n$ tais que $\alpha_j^2 = f(v_j, v_j)$, $j = 1, \dots, r$. Definimos então $w_j = \alpha_j^{-1}v_j$, $j = 1, \dots, r$ e $w_j = v_j$, $j = r + 1, \dots, n$. A matriz de f em relação à base $\{w_1, \dots, w_n\}$ tem a forma desejada. \square

Observação 6.3.6 A observação 6.3.3 vale agora para formas bilineares simétricas.

Corolário 6.3.7 *Se no teorema anterior $F = \mathbb{R}$, então existe uma base de V tal que a representação de f em relação a ela é da forma*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_s \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Escolha base $\{v_1, \dots, v_n\}$ como no teorema anterior. Defina então $w_j = |f(v_j, v_j)|^{-1/2}v_j$, $j = 1, \dots, r$ e $w_j = v_j$, caso contrário. A base procurada é então uma reordenação de $\{w_1, \dots, w_n\}$. \square

Mostraremos a seguir que os números p e q do corolário acima são únicos e dependem exclusivamente da forma bilinear f . Para tanto, introduzimos a seguinte definição.

Definição 6.3.8 *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica. Uma decomposição formal de V relativa a f é uma decomposição da forma $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$, onde $f(v, v) > 0$, $v \in V_+ \setminus \{0\}$, $f(v, v) < 0$, $v \in V_- \setminus \{0\}$, $f|_{V_0 \times V_0} = 0$ e cada dois subespaços da decomposição são ortogonais.*

Teorema 6.3.9 *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita, $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica e $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ uma decomposição formal de V em relação a f . Valem as seguintes propriedades:*

- i) $V_0 = V^\perp$;
- ii) V_+ é maximal, isto é, se $V_+ \subset W \leq V$ e $f(v, v) > 0, v \in W \setminus \{0\}$ então $V_+ = W$;
- iii) V_- é maximal, isto é, se $V_- \subset W \leq V$ e $f(v, v) < 0, v \in W \setminus \{0\}$ então $V_- = W$.

Demonstração. i) Como V_0 é ortogonal a V , $V_0 \subset V^\perp$. Por outro lado, pelo Teorema 6.2.6.-i) vemos que $V^\perp = V_+^\perp \cap V_-^\perp \cap V_0^\perp \subset V_0^\perp = V_0 \cap V^\perp$. Logo, $V^\perp \subset V_0$.

ii) Assuma que existe $W \leq V$ tal que $V_+ \subset W \neq V_+$ com $f(v, v) > 0, v \in W \setminus \{0\}$. Obviamente, $V = W + V_- + V_0$. Daí,

$$\begin{aligned} \dim_F(W \cap (V_- \oplus V_0)) &= \dim_F W + \dim_F(V_- \oplus V_0) - \dim_F V \\ &= \dim_F W - \dim_F V_+ > 0. \end{aligned}$$

Logo, $W \cap (V_- \oplus V_0) \neq \{0\}$. Isto é uma contradição já que $f(v, v) > 0, v \in W \setminus \{0\}$ e $f(v, v) < 0, v \in V_- \oplus V_0$.

iii) Exercício. □

Teorema 6.3.10 *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita, $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica e U um subespaço de V . Se U é maximal como descrito no Teorema 6.3.9-ii) então existe uma decomposição formal de V na forma $V = U \oplus V'_- \oplus V^\perp$, para algum V'_- .*

Demonstração. Assuma que U é maximal. Pelo Teorema 6.3.1, $V = U \oplus U^\perp$. Obviamente, $V^\perp \subset U^\perp$. Se $f(v, v) > 0$ para algum $v \in U^\perp$ então $U \oplus [\{v\}]$ contradiz a maximalidade de U . Logo, $f(v, v) \leq 0, v \in U^\perp$. Notando agora que $-f|_{U^\perp \times U^\perp}$ é um produto interno sobre U^\perp e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz vemos que $-f(v, w) \leq f(v, v)f(w, w), v, w \in U^\perp$. Daí, se $f(u_0, u_0) = 0$ para algum $u_0 \in U^\perp$ então $f(u_0, w) = 0, w \in U^\perp$. Conseqüentemente, $f(u_0, v) = 0, v \in V$, isto é, $u_0 \in V^\perp$. Portanto, se W é um complementar de V^\perp em U^\perp , concluímos que $f(w, w) < 0, w \in W$. Assim, $U \oplus W \oplus V^\perp$ é uma decomposição formal de V . □

Observação 6.3.11 Vale resultado análogo para um subespaço maximal como descrito no Teorema 6.3.9-iii).

Teorema 6.3.12 *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita, $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica e W um subespaço de V . Se $V = V_+ \oplus V_- \oplus V^\perp = V'_+ \oplus V'_- \oplus V^\perp$ são duas decomposições formais de V relativas a f então $\dim_{\mathbb{R}} V_+ = \dim_{\mathbb{R}} V'_+$ e $\dim_{\mathbb{R}} V_- = \dim_{\mathbb{R}} V'_-$.*

Demonstração. Certamente $V_+ \cap (V'_- \oplus V^\perp) = \{0\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} V_+ &= \dim_{\mathbb{R}}(V_+ + V'_- + V^\perp) - \dim_{\mathbb{R}}(V'_- \oplus V^\perp) \\ &\leq \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}}(V'_- \oplus V^\perp) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} V'_+. \end{aligned}$$

As outras desigualdades seguem de maneira análoga. □

Observação 6.3.13 É fácil ver agora que, nas condições acima, dois subespaços de V que são maximais como no Teorema 6.3.9-ii) ou iii), têm mesma dimensão.

A definição abaixo é o último ingrediente necessário para uma classificação mais precisa das forma bilineares simétricas.

Definição 6.3.14 *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica. Seja p a dimensão de qualquer subespaço maximal como descrito no Teorema 6.3.9-ii) e q a dimensão de qualquer subespaço maximal como descrito no Teorema 6.3.9-iii). Seja ainda, $s = \dim_{\mathbb{R}} V^\perp$. O índice de f é a terna (p, q, s) e a assinatura de f é o número $p - q$.*

Teorema 6.3.15 *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita. Valem as seguintes propriedades:*

- i) Toda forma bilinear simétrica sobre V tem uma representação matricial como descrita no Corolário 6.3.7. A tripla (p, q, s) é exatamente o índice da forma;*
- ii) Duas formas bilineares simétricas possuem uma mesma representação matricial se, e somente se, elas possuem o mesmo índice;*
- iii) Duas formas bilineares simétricas possuem uma mesma representação matricial se, e somente se, possuem o mesmo posto e a mesma assinatura.*

Demonstração. Exercício.

Concluimos este capítulo refinando os resultados no caso em que o espaço envolvido tem produto interno.

Teorema 6.3.16 *Sejam V um espaço euclidiano, de dimensão finita n e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica. Valem as seguintes propriedades:*

i) Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que a representação matricial de f em relação a ela é diagonal;

ii) (Lei da Inércia de Sylvester) Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ na diagonal principal da representação do item i) dependem exclusivamente de f e são únicos no seguinte sentido: se a representação de f em relação a alguma outra base ortonormal de V é diagonal, então a diagonal principal desta matriz é formada pelos mesmos α_j 's, dispostos possivelmente em uma ordem diferente;

iii) Se (p, q, s) é o índice de f então $p =$ número de α_j 's que são positivos, $q =$ número de α_j 's que são negativos e $s =$ número de α_j 's que são nulos.

Demonstração. i) Seja $\{w_1, \dots, w_n\}$ uma base ortonormal de V . A matriz A de f em relação a esta base é simétrica. Logo, sendo A a matriz de um operador ortogonal sobre V em relação àquela base, e sendo tal operador diagonalizável, podemos encontrar uma outra base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que a matriz deste operador em relação a esta nova base é diagonal (a diagonal principal dela contém os autovalores do operador). Segue que a representação matricial de f em relação a esta base é diagonal.

ii) Exercício.

iii) Exercício. □

Exercícios 6.3.17 20) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ anti-simétrica. Mostre que o posto de f é par e que existe uma base de V em relação a qual a matriz de f é diagonal em blocos, onde os elementos da diagonal são, respectivamente,

$$0, \dots, 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

21) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ tal que $f(v, v) > 0$, $v \in V \setminus \{0\}$. Prove que existe uma base de V tal que a representação de

f em relação a ela é diagonal em blocos, onde as entradas na diagonal principal são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & \alpha_k \\ -\alpha_k & 1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1$$

onde $\alpha_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots, k$.

22) Seja $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e defina $f \in \mathcal{B}(V, V)$ pela seguinte fórmula: $f(A, B) = \text{traço}(AB)$, $A, B \in V$. Prove que:

- i) $f(A, A) > 0$, $A \in \{A \in V : A^t = A\}$;
- ii) $f(A, A) < 0$, $A \in \{A \in V : A^t = -A\}$;
- iii) Os conjuntos $\{A \in V : A^t = A\}$ e $\{A \in V : A^t = -A\}$ são ortogonais;
- iv) A assinatura de f é n .

23) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita e defina $f \in \mathcal{B}(\mathcal{L}(V), \mathcal{L}(V))$ por $f(T, S) = \text{traço}(T \circ S)$, $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Prove que a assinatura de f é $\dim_{\mathbb{R}} V$.

24) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita e defina $f \in \mathcal{B}(\mathcal{L}(V), \mathcal{L}(V))$ por $f(T, S) = \text{traço}(T \circ S) - \text{traço}(T)\text{traço}(n)$, $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Ache o posto e a assinatura de f .

25) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita, W um subespaço de V e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica de índice (p, q, s) . Prove que:

- i) Se W é isotrópico e maximal então $\dim_{\mathbb{R}} W = s + \min\{p, q\}$;
- ii) Se W é maximal e $f(w, w) \neq 0$, $w \in W \setminus \{0\}$ então $\dim_{\mathbb{R}} W = s + \min\{p, q\}$.

26) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita ≥ 3 e $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica e $T \in \mathcal{L}(V)$. Prove que se $T \circ S = S \circ T$, para todo $S \in \mathcal{L}(V)$ satisfazendo $f(u, v) = f(S(u), S(v))$, $u, v \in V$, então T é um múltiplo de I_V .

27) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , de dimensão finita n , $f \in \mathcal{B}(V, V)$ simétrica de índice $(n - 1, 1, 0)$ e $u, v \in V$. Prove que se $f(u, u) < 0$, $f(v, v) > 0$ então $f(u, v)^2 \geq f(u, u)f(v, v)$. Conclua que vale a igualdade na expressão acima se, e somente se, $\{u, v\}$ é l.d.

28) Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , de dimensão finita e $f, g \in \mathcal{B}(V, V)$ anti-simétricas. Comprove: existe $T \in \mathcal{L}(V)$ injetora tal que $f(T(u), T(v)) = g(u, v)$, $u, v \in V$, se, e somente se, f e g possuem o mesmo posto. O que acontece se o corpo de escalares é \mathbb{R} ?

Referências Bibliográficas

1. BERBERIAN, S. K. - Linear Algebra, Oxford University Press, Oxford, 1992.
2. BROWN, W. C. - A Second Course in Linear Algebra, John Wiley @ Sons, New York, 1988.
3. BURTON, D. M. - Abstract and Linear Algebra, Reading, Addison-Wesley, 1972.
4. CATER, F. S. - Lectures on Real and Complex Vector Spaces, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1966.
5. CURTIS, M. L. - Abstract Linear Algebra, Springer-Verlag, New York, 1990.
6. FICKEN, F. A. - Linear Transformations and Matrices, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1967.
7. GELBAUM, B. R. - Linear Algebra: Basics, Practice and Theory, North Holland, New York, 1989.
8. GREUB, W. - Linear Algebra, Springer-Verlag, New York, 1975.
9. HALMOS, P. H. - Finite Dimensional Vector Spaces, Van Nostrand, Princeton, 1958.
10. HOFFMAN, K. e KUNZE, R. - Algebra Linear, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1979.
11. HORN, R. A. e JOHNSON, C. R. - Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
12. HUNGERFORD, T. W. - Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.
13. KOSTRIKIN, A. I. e MANIN, Y. I. - Linear Algebra and Geometry, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1989.
14. LIMA, E. L. - Álgebra Linear, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
15. LIPSCHUTZ, S. - Álgebra Linear, McGraw-Hill, São Paulo, 1972.
16. SATAKE, I. - Linear Algebra, Marcel Dekker, New York, 1975.
17. SMITH, L. - Linear Algebra, Springer-Verlag, New York, 1985.
18. WARNER, S. - Modern Algebra, Dover Publications, New York, 1990.